CAROLI RENALDINII

SERENISS. MAGNI PRINCIPIS ETRVRIÆ PHILOSOPHI, AC MATHEMATICI.

OLIM IN PISANA ACADEMIA PHILOSOPHIAM ORDINARIO LOCO PROFITENTIS.

NVNC IN PATAVINO LYCEO PHILOSOPHI PRIMÆ SEDIS.

ARTIS ANALYTICÆ MATHEMATVM PARS SECVNDA:

Tractatus de Algebra Speciosa; de Resolutione, & Compositione Mathematica; & Geometram promotum complectens.

EIDEM SERENISSIMO PRINCIPI D.



PATAVII, MDCLXIX.

Typis Petri Mariæ Frambotti Bibliopolæ. *Superiorum Permissu.*

SERENISSIMO

COSMO MAGNO ETRVRIÆ PRINCIPI

CAROLVS RENALDINIVS F. P.

TANTI refert, Serenissime Princeps, te literarum studijs operam iugiter nauasse; quas enim Artes ingenuus, atque robustus animus excoluit, eas & amore prosequitur, & opitulatione fouet, & patrocinio sustentat. Nec Romanorum splendor ille Mecœnas credatur ad optimas disciplinas sese adiungentibus extitisse præsidio, quòd Fortunæ, sed potiùs animi diuitijs amplissimis circumflueret. Adamas, Rubinus, & pretiosum quodcumque lapillorum genus, Regiæ coronæ decus, quamuis ingentis pretij, tamen apud rudes, ac indisertos homines nullam æstimationem adipiscitur. Neque refert, quòd incomparabili splendore suapte natura, fulgeat, atque detineat; adhuc enim pretiosissima gemma, vel rudis, & inculta iacet; vel etsi perpolita præstantis Artificis industria, summisq; laboribus exculta blandiús rideat, non tamen agrestem animum percellit, cui perspectum haud est, suspiciendam esse, maximaque cum admiratione spectandam, quòd primò sit Naturæ solertis, deinde verò Artis elegantissimum opus. Iam dudum in hoc literario puluere primos, quos exercui labores, tibi consecratos voluit excelsi tui nominis Maiestas, cœlestis Indoles, eximia Virtus; cùm verò per-

ſpexerim non inuiſos tibi fuiſſe, deinceps, & quos modo tibi nuncupatos volo, & cæteros, quos in poſterum intueberis; non enim iniucundos futuros tua ſumma clementia fretus exiſtimo. Illud autem plurimum habet momenti, quòd cum omnibus virtutum ornamentis me affectum eſſe deſiderem, nihil tamen eſt, quod malim, quám me, & gratum eſſe, & videri, vt cum Sapientiſsimo loquar, cui hæc vna virtus maxima nedum, ſed reliquarum mater, & altrix videbatur. Perge Sereniſsime Princeps; Maiorum enim videberis immortali cum laude veſtigia repetere, qui calcando ſubſtructam virtutibus viam ad gloriam nomen æternitati commendarunt. Hinc tamen pace dixerim Celſitudinis tuæ, tibi ſolùm id ſplendoris affulget, quod argumento ſit, te debere ijs acceptam referre Virtutem, quaſi non proprijs ſudoribus, ſed quodam hæreditario iure comparatam.

Siquidem hæc, de qua Poſteritas gloriatur, in illis primùm illuxit, adeo vt, in poſteris virtutis iubar aliunde transfuſum, præclaros itidem alienos labores præſeferat, atque teſtetur. Maiores enim nobis liberaliſsimè Fortunę bona, nedum, ſed animi, hoc eſt Virtutum ornatus laborum ſuorum tolerantia; dignitatem, ſplendoremq; nominis pręclariſsimis geſtis; famæ perennitatem propriæ vitæ diſcrimine pepererunt.

Ne igitur me quiſpiam carpat, quòd ad Emblematis vniuerſo huic Operi præfixi limina, Proſapiam inclytam honoribus proſecutus, cecinerim.

Græcia quas peperit, claris quas vexit Athenis
Artes, quas aluit, perficit vna Domus.

Medicea ſiquidem Regia ſemper literarum aſylum, veluti templum Mineruæ ſacrum, bonis artibus, ac diſciplinis inſtructos, in inclinatam, & prope iacentem fortunam deiectos, vtpote illos, quibus naſcentibus dicta lex eſt, nunquam, vt fortunato ſidere vterentur, ſumma clementia, ſummaque munificentia ſuſcepit, ne ab ijs rebus forent imparati, ſine quibus frui lucis vſura non licet. Quo cuique fatendum, ſolùm apud Heroes Mediceæ Gentis datum eſſe, feliciſsimam vitam traducere, ijs nimirum, qui literarum

ſtudijs

ſtudijs addicti, perduellis Fortunæ barbarie vexati, Principis clementiam, hoc eſt, tutelare Numen anhelant. Tu autem Heroice Princeps id gloriæ tibi quidem amplius vſurpas, nempe Maiorum laudem auxiſſe, quinimò (abſit à verbo mendacium) ſuperaſſe. Neque ſplendor ille tuus tenebris vllis offunditur, quòd viam ad immortalitatem nominis, & honoris aliorum exemplo concitatus, inieris. Nam ſempiterna quidem eſt laus plæclariſsimis geſtis excelſæ virtutis, famam æternitatis in poſteros transfundere, eoſdemque nondum decorare ſuperſtites; exigua tamen non eſt ab ijs nec latum vnguem diſcedere, eorundemque veſtigijs inhærendo, viam eandem maiori faſtu calcare. Feruеſcit autem in te quotidie magis amor ille peruetus in præclariſsimarum Artium ſtudia, tantòque maiorem ſuadeo mihi futurum, quantò in dies te procliuiorem ad eadem inſpicio. Iure igitur hæc ætas tuo nomine gloriatur, quòd vniuerſo terrarum Orbe reſonans, optimæ Indolis teſtis ad tui obſequium omnes allicit, trahit, ac arripit. Viue interim Neſtoreos annos, Sereniſsime Heros, ætatis decus, Principum gloria, ac totius Orbis Lumen, vt tui exemplo mortales ad cultum Heroicæ virtutis compellantur. Vale. Florentiæ Anno à Virginis partu MDCLXVI.

IN SECVNDAM OPERIS PARTEM PRÆFATIO.

RESOLVTIVAM Artem apud Veteres Magno in honore, summoque pretio extitisse memoriæ, literisque proditum est, eius enim dignitatem, splendorem, atque præstantiam videntur satis appositis laudibus prosecuti, quod iure factum arbitraberis, vt opinor, intelligens commemoratam Artem adeo fœcundam esse, vt vberrimè demonstrationes suppeditet, quo circa omnes ingenij neruos in ipsam numeris tamen tractatam, intenderunt; quapropter Geometriæ campos, non ea, qua opus erat, sedulitate numerorum calculo fortasse nimium addicti perquirentes, elegantiores, suauioresque flores omiserunt. In Arithmeticis profectò multa, eaque non vulgaria ipsius Analytices præsidio sunt assecuti; quamobrem de his optimè meritos esse non erit cur quispiam inficietur; quinimò fatendum in eos amplissimas, ac honestissimas laudes debere conferri; eò vel maximè quòd sublime, nobileque versabant argumentum; subtilissima enim numerorum contemplatione detenti Diuinum quidpiam ex Platonis Oraculo mentis agitatione persequuntur. At quantum in ipsa numerorum contemplatione, dignitatis, atque decoris adepti sunt: tantundem in Geometricis videntur perdidisse; tametsi enim vetus Ars illa quoque numeris exculta Geometræ nonnihil prosit, opemque ferat, tamen specierum, characterumque frequentatione comparata, longe id felicius assequitur.

Resolutiua Ars apud Veteres magno extitit in honore, ac pretio.

Huiusmodi Ars vberrimè demonstrationes suppeditat.

Antiqui numeris fortè, in resoluendo nimium addicti veritatem perquirentes in Geometriæ campo elegantiores flores omiserunt.

Digni sunt tamen laudibus Diuinum enim tractabant argumentum.

Quantum in Arithmeticis adepti sunt tantundem in Geometricis perdiderunt.

Proinde sagaciores Artifices diuturna quadam experientia edocti, contendentes nedum in Arithmeticis, verùm etiam in Geometricis abstrusiora reperire, neglecto parumper numerorum vsu, atque adeo Arithmeticis quasi multa dicta salute, nouam hanc Logisticen aggressi, versantibus in Geometrico puluere fortasse longa meditatione defessis, mirum in modum opitulati sunt; ita nimirum, vt Geometriam ipsam, nedum Arithmeticam promouentes, secretiora vtriusque Disciplinæ mysteria detexerint, quo recentiores non minus, quàm Veteres de sua possunt Arte gloriari; vt iure dixeris præclarissimum hoc, penèq; Diuinum inuentum in literario certamine ijs exstitisse palmarium. Potiori tamen id iure sibi vendicant, qui nouæ Disciplinæ specimina tradiderunt. Cum enim omnis industria, omnisque solertia eò tenderet, vt Theoremata, atque Problemata resoluerentur; ita vt Mathesis vniuersa locupletior facta Veritates deinceps innumeras aperiret; Recentiores constanti, pertinacique labore noua, de qua loquimur, vsi Logistice,

Recentiores multum Geometræ opitulati sunt.

Recẽtiores nõ minus, quàm Veteres de sua Arte possunt gloriari.

Omnis industria eò tendit, vt Theoremata, ac Problemata resoluantur.

Hæc Ars opus fuit Veteribus inaccessum.

facti sunt voti compotes. Opus quidem Veteribus inaccessum, vtpotè illis, qui sua tantum Arte muniti, ardua, ac difficilia aggredi minimè tutum existimarunt. Quantum autem in Arithmeticis profecerint, & quousque tandem peruenerint, ex hactenus in Prima huius Operis Parte satis abundè traditis, cuique conijcere licebit. Quantum verò in Geometricis progressi sint, ex nostro de Resolutione, atque

Pluris est facienda Noua, quàm Vetus Ars resolutiua.

Compositione Mathematica Tractatu perspicuum, manifestumque fiet. Solum hîc igitur commemorandum, puto nouam Analystarum pluris, quàm Vueterm Artem faciendam esse, cum hæc in primis ad finem, cuius gratia ingenij solertia fuit comparata, illa verò parum conducat.

Auctoris partes, quænam sint.

Arduum est opus, sed insignis vtilitatis.

De hac propterea cumulatè differere nostræ sunt partes. Arduum quidem opus, vt eo difficilius in re literaria fortaße nemini liceat adinuenire, insignis tamen vtilitatis; propterea quod labores, quos præclarissimi Viri in Elementis tractandis pertulerunt, tanti fieri non deberent, nisi præceptiones forent adinuentæ, à quibus parati, nos in demonstrationibus contexendis Elementorum vsum aßequeremur.

Auctor miratur, quòd nonnulli parui fecerint hanc resoluendi, componendique rationem.

Magna propterea me tenet eorum admiratio, quibus parui momenti celebris Analystarum Ars visa est; atque adeò ægrè fero ab ijs pronunciari operæ non esse pretium in illam incumbere, vigilias, atque labores perferre, quasi Mathematicas introspicere Disciplinas liceat ijs, qui commemoratæ Artis opitulationem, negligunt, atque contemnunt. O tempora ò mores. Iam in animis hominum penitus insederat, nihil in huiusmodi Disciplinis esse tentandum destituto præceptionibus Analyticis, quod, & Græci Sapientes, & Latini solertes vnanimi consensione Veritati consentaneum esse duxerunt, quippe qui in his summa cum laude versati prædictarum Disciplinarum introspicientes arcana necessitate adacti præstantiam, ac vtilitatem Artis adnotarunt. Nunc verò tamen insulsi admodum, quamuis non omnino Mathematicæ eruditionis expertes solum contemplationis illud genus commendant, cuius tractatio, velut amœnior videtur animis blandiri, quos alioquin hæc nimis

Hæc est cæteris amœnior contemplatio.

austera lucubratio vexat, & angit. Sed id planè contendo, videlicet hanc potius esse dicendam amæniorem. Si namque finem respicias, cuius gratia Mineruæ addicti tot labores improbos generosè adeunt, curasque mordaces libenter subeunt, veritatem profectò comperies, quæ nimirum animum ingenuum allicit, & arripit. Iure igitur dixeris hanc, de qua loquimur meditationem amæniorem, vtpote illam, cuius præsidio promptius Veritas occurrit, atque faciliùs fit obuia; ea siquidem nihil homini suauius, nihil amœnius, nihil denique iucundius, qua nimirum

Homini nihil veritate suauius.

humanus animus plerumque corporis perturbationibus defatigatus, ac lacessitus, recreatur, & veluti præstantissimo pabulo, reficitur. Sed vtra veritatem vberius exhibeat, atque certiùs assequatur, an illa superficietenus, cognitio, de rebus Mathematicis habita: an quæ intimiora perquirens, abstrusiora detegit, & obuoluta tenebris, sacratiora mysteria recludit. Quòd si quispiam adhuc satis esse ab his Disciplinis paratum existimet, quem hoc nostrum minus iuuat argumentum, is profectò decipitur, & nimium à veritate recedit. Casu enim hæc potius, quàm ar-

Quæ cognitio amænior.

Casu Mathematicas Disciplinas tractare, nò eius est, qui diu laborauit pro earum assecutione &c.

tificiosa differendi ratione tractare, non eius est, quem diuturna in his detinuit meditatio, vt earum exercitatione afflueret, ac ipsius Matheseos doctrinam optimè redoleret. Quòd autem difficultatem detestando aliquid illi dedecoris inurere, ac dignitatis arripere conentur; nihil est, oleum operamque perdunt. Nihil enim præclarum ingenuo animo accommodatum, nihil, quod hominem excelsæ Indolis deceat

compertum est vnquam difficultatibus non implicatum. Et certè non tot foret Diuinis laudibus exornanda virtus, nisi adeptio ipsius operosa esset mortalibus concessa tantùm per salebrosam viam incommodis, curis, laboribusque substructam. Neque foret Alcidis nomen æternitati commendatum nisi Heroica illa virtus de qua nunquam Posteritas conticescet radices altiùs amarore consperfas egisset, vt inde suauitas eiusdem virtutis emanaret. Illud igitur cuique, exploratum esto, quicquid difficile, ac arduum; illud idem esse præclarum. At verò si tam parum solliciti de Analystarum doctrina nos esse deberemus, quòd ea neglecta adhuc animo erecti in Mathematicis disciplinis magna consequi valeamus, ea perficiendo, quæ præstantiores in his Disciplinis Antistites consecutos fuisse monumenta testantur, æquum profectò foret illius Pastoris generosum animum æmulari, qui cùm anhelaret eximiam Artem, canendi, certandique carminibus, qua præditum alterum audierat, cecinit.

Quoniã æquisitio virtutis difficilis est, ideo præclara.

Nisi Analytices foret insigni vtilitatis, haud esset operæ pretium in illam adeo difficilem incumbere.

Virgilius Egloga 7.

- - - - - - - - at si non possumus omnes
Heic arguta sacra pendebit fistula pinu.

Nisi enim implicatissimis illis Analyseos vestigijs insistentes præclara, atque admiranda consequi possemus, haud foret operæ pretium in his tantum temporis impendere, tantum laboris insumere, tantum sollicitudinis perferre. Sed potius prudentis esset his omnibus contemptis, ad aliud philosophandi genus sese transferre. Qui sapit autem secus existimat, nobisque consentit; aduertens has Disciplinas Theorematibus, atque Problematibus constare, quorum veritatem inquirere difficilimum est. Hic verò animo perpendendum, An Artifex ille tutiorem viam elegerit ad veritatis indagationem, qui casu procedendo, sese dubiæ fortunæ committit, vt denique longa mentis agitatione, animique curis, aliquod specimen veritatis consequatur. An verò, qui certa, quadam ratione differendi, firmaque ratiocinandi methodo incedit, & in tenebris, quibus verum obuoluitur, rationis lumine ductus, certisque vestigijs insistens, ad finem sibi præstitutum progreditur, gradumque facit.

Sagaciores homines magni eam faciunt.

Quis Artifex tutiorem eligat viam ad veritatis inquisitionem.

Nec ineptè credas à me huic vniuerso Operi præfixum Emblema fuisse, vbi præstantis Artificis labore, & delineata, & sculpta cernitur Geometria Labyrinthum multis viarum ambagibus inflexum, hoc est, arduuam, ac difficilimam contemplationem initura, filo tamen Analytices deducta, quasi secus impotens difficilimum exitum adinuenire; Est enim Mathesis, præsertim Arithmetica, & Geometria, veluti Labyrinthus, summis, & inextricabilibus difficultatibus impeditus, nemini quidem adeundus, nisi Arianna, hoc est Analytice comite, ac perductrice.

Emblematis vniuerso huic Operi præfixi explicatio.

Non me præterit, idem haud omnibus probari; cùm potiùs rectè illud videatur vsurpatum.

Mille hominum species, & rerum discolor vsus
Velle suum cuique est, nec voto viuitur vno.

Persius Satyra V.

Id tamen minus commodè in re de qua agimus, cadere videtur, cum vna sit veritas, quæ æquè animos inuadit, nec vlla profectò suppetit ratio, qua quispiam sibi suadeat, oblato Problemati, occurrendum casu nulla differendi ratione nixus. Innumera enim occurrent, maxime ab instituto aliena, & vt illuceat veritas perquesita, vel nunquam à meditationibus feriandum erit, quod nimium

Vna est veritas quæ æquè animos inuadit.

animum

animum vexat, ac torquet. Vel erit immolandum Mineruæ, vt cum ei arriserit, extemplo, quod in obscuris latitat, det in conspectum, ac in lucem prodat; atque dum quis per istarum contemplationum Oceanum nauigaturus, fortunæ fidem habet, hæc vt optatis respondeat, atque res ex animi sententia succedat.

Cuiuslibet Artis, Disciplinæq; finis.

Omnes Artes, omnesque Disciplinæ, cum eò colliment, vt vel veritatem inquirant, operis gratia, quemadmodum practicæ: vel in ipsius veritatis meditatione sistant, vt contemplatrices. Quæcumque tamen sit, nullam sanè reperies, quæ certis præfinitis legibus in inquirenda veritate non subijciatur. Nulla est, quæ casu illam venetur; Multò propterea id minus, de Mathematicis enunciandum, quæ reliquas demonstrandi certudine vincunt, omnibusque, certa differendi ratione antecellunt.

Quid denique pro comperto habendum.

Ratum igitur esto, Si qui sunt qui pauci profectò non sunt, quorum animus aliorum inuentis non contentus, longius expatiatur veritatis consequendæ gratia, demonstrationes, atque causas inquirens, huius Artis præsidio innumera propemodum reperient, alijs ignota prorsus, & multo plura, quàm ea, de quibus iure se iactant Antiqui per compositionem, atque resolutionem procedentes, quasi dixerim sola naturali quadam ingenij facultate, vtentes, exercitatione tamen exculti; Cum recentiores Artem certis legibus, præceptisque contentam, adhibeant.

Sed nimis multa, de re, quæ nec dubia est, nec obscura. Ex his intelliges, vt opinor partes à nobis, in hoc Opere conscribendo susceptas; & quantum diligentiæ, curæque fuerit adhibendum, vt præstantissimum argumentum satis pro dignitate tractasse videremur.

Tractando rũ ordo. Primo de Speciosa Algebra differendum.

Primò autem sese tractandam offert Speciosa Algebra, nempe noua Logistice, quam demonstrationibus firmare conabimur, post accuratam explicationem eorum præceptorum, quibus ipsa constat.

Secundò de resolutione, & compositione Mathematica tractandum.

Secundò autem in explicatione eorum, quæ ad Resolutionem, & Compositionem Mathematicam pertinent, nostra versabitur industria, ac omnis labor erit occupatus. At quoniam etiam Antiquis Resolutricis Artis vsus familiaris erat, à qua tamen longe, lateque differt illa, quam Recentiores adinuenerunt. Propterea nostrum erit vtramque tractare diligenter, exordium ab Antiquorum illa ducentes, vbi, & ipsius Artis intimiora prosequemur, & vsum eiusdem ad enodanda Problemata illustrabimus. Recentiorum verò subtiliorem æquè, ac vtiliorem, methodum, pluribus explicabimus. Multo enim fœcundior cùm sit, paucis perstringi non potest; Sed vberiorem tractationem exposcit.

Rei totius summa.

Hæc igitur sunt, de quibus, in hac Secunda Operis Parte nobis agendum superest, ex ijs verò, quæ sumus allaturi, non dubito quin futurum sit, vt cuique perspicue constet; non inepte à nobis, aliquando pronunciatum fuisse, cuilibet Problemati, huius Artis opitulatione fieri satis posse.

Nonnulla aduertenda.

Cæterum Speciosa ipsa, cum quammaximè ad numerorum tractationem conducat; propterea, non pigebit, eius præcepta numeris aptare, quamuis præcipuè Geometriæ gratia illam tradamus. Nam in Prima huius Operis parte Speciosa Logistica vsi sumus, cum ea non opitulante, minime liceret, difficiliora perquirere. Tamen locus non erat, vbi præceptorum omnium explanationem traderemus; quibus Speciosa Algebra continetur, quod in præsenti nobis præstandum superest. Qua in re a primis huius Artis Elementis exordium desumemus, ordinatim tractando vt demum, ad Αναλυσεως, atque Συνθεσεως rationem Mathematicam perueniamus.

CAROLI

CAROLI RENALDINII
ALGEBRA NOVA
ANALYTICES
PARS SECVNDA.

In quibus hæc Ars consistat, & de ijs, quæ sunt ad ipsam præmittenda.

CAPVT PRIMVM.

Speciosa suum quoque habet Algorithmum

QVEMADMODVM Veterem, ac Numerosam Algebram dicebamus occupari circa numerorum Algorithmum, quem affirmauimus esse tractationem, siue peritiam numerorum complectentem quatuor illas vulgatas operationes, hoc est Additionem, Subtractionem Multiplicationem, ac Diuisionem. Ita, & Speciosa suum Algorithmum habet. Tantùm inter has discriminis illud intercedit, quòd Numerosæ Algorithmus numeris: Speciosæ verò Alphabeti elementis exhibetur. Quapropter non immeritò huic illam esse persimilem asserere licebit; hæc etsi longè præstantior dicenda sit. Dum enim Alphabeti elementis vtitur in suis perficiendis operationibus, ea tractat, quæ nullam mutationem subeunt: illa verò quoniam numeros adhibet, in ijs est occupata, quæ maximè sunt mutationi obnoxia; quamobrem hæc excellentior, non iniuria esse dicetur.

Speciosa Algorithmus Speciebus, Numerosa autem numeris perficitur.

Commodum ex Alphabeti characteribus.

Illud autem commodum affert Alphabeti characterum vsus, quòd omnia ijs designari commodè possint, neque vni magis, quàm alteri sint rerum generi accommodati. Sunt autem notæ simplicissimæ quidem ad cuiusque rei designationem idoneç; non enim a, vel b &c. magis designant lineam, quàm pondus, numerum, vel aliud quidpiam; consueuimus autem hisce elementis significare lineas, vtpotè phantasiæ, sensibusque maximè obuias, quibus relationes, atque rationes inter alia omnia commodissimè exprimi possunt. Si itaque duæ sint quantitates characteribus a, b, designatæ, intelligendæ sunt duæ lineæ longitudinis diuersæ, quarum vna quidem a, alia verò b, dicatur. At per a, & a duæ lineæ æquales intelligentur, vt per b, & b &c. nisi fortè supponatur a, æqualis b, &c.

Notanda sunt quædam circa significationē characterum.

Ad significandam duarum dimensionum quantitatem.

Ad significandam verò duarum dimensionum quantitatem ijsdem characteribus vtimur apposito numero dimensiones ipsas designante, vt a^2, at, vt huiusmodi quantitatis genus denotemus hoc vtimur symbolo, puta pl. vnde a pl. vel b pl. &c. quantitatem ipsam planam, seu longitudinem, cum longitudine significat, cum a^2,

Alia quaedam circa idem occurrunt.

speciatim potestatem quadraticam planitieij speciem importet. Ad significandas verò tres dimensiones apponimus numerum 3, Vnde a^3, quantitatem triuum dimensionum significat, cuius genus hoc significamus symbolo sol: quare a sol. vel b sol. significat solidam quantitatem, seu longitudinem cum latitudine, & profunditate; cùm a^3 speciatim importet cubicam potestatem, quæ soliditatis est species; ita suo modo de reliquis gradibus.

Aliquoties aliquã esse quantitatem acceptam, quomodo significetur.

Cæterum, vt significemus aliquoties acceptam esse aliquam lineam a, præponimus numerum significantem, quoties ipsa quantitas accipi intelligitur, vt 2 a, vel 3 a &c. ad significandum a, bis vel ter acceptam fuisse; Sic ad designandum bis terue, acceptum esse aliquod planum, scribimus 2 a pl. 3 a pl. vel 2 b pl. 3 b pl. &c. non dissimiliter de solidis, alijsque gradibus. Præterea ad denotandum partem quantitatis numerum ad id idoneum præponimus; vnde ad significandam semissem, scribimus $\frac{1}{2}$ a ad trientem $\frac{1}{3}$ a, item in planis, vt $\frac{1}{2}$ a pl. vel $\frac{1}{3}$ a pl. aut $\frac{1}{2}$ b pl. vel $\frac{1}{3}$ b pl. & sic de reliquis.

De ijs, quę præmittenda sunt, quæque Analysta mutuatur ab Elementis.

Ea prorsus quæ ad Numerosam Algebram præmittuntur, hic etiam prælibari debent. Eadem enim ex elementis in vtraque Analysta desumit, in Numerosa tamen ad numeros contracta, in Speciosa generaliter sumpta. Non est autem cur hìc eadem repetantur; proinde sat erit tractationem illam consulere.

Definitiones autem, hunc in modum se habent.

Posita quantitas quid.

Quantitas posita, est illa, quæ ad libitum ponitur, ad comunem mensuram quantitatum eiusdem generis, & quæ ab vnitate denominatur.

Additio quid.

Additio quantitatis ad quantitatem est acceptio illius quantitatis, quæ ex quantitatibus illis tanquam ex partibus coalescit.

Subtractio quid.

Subtractio quantitatis à quantitate est sumptio excessus quantitatis maioris supra minorem.

Multiplicatio quid.

Multiplicatio quantitatum, est acceptio quantitatis, quæ ad multiplicatam eam habet rationem, quam multiplicans ad positam, & sumpta hæc quantitas Productum dicitur.

Diuisio quid.

Diuisio quantitatum, est acceptio quantitatis, ad quam diuisa eam habet rationem, quam diuidens ad positam, & quantitas hæc accepta, Quotiens nuncupatur.

Solet etiam dici applicatio, tunc autem pro vocabulis diuidendum, diuisor, & Quotiens, adhiberi possunt.

Applicatum, Metiens, & Ortiuum.

Quantitates homogeneæ dicuntur, quæ sunt naturæ eiusdem, vt latus, & latus, quantitates homogeneæ dicendæ sunt, quemadmodum planum, & planum; solidum, & solidum.

Heterogeneæ porro quantitates dicuntur illæ, quæ natura differunt, vt latus, & planum &c.

SVPPOSITIONES.

Supponenda verò hæc sunt.

Si magnitudo magnitudi additur, hæc illi homogenea est.

Si magnitudo magnitudini subducitur, hæc illi homogenea est.

Si magnitudo in magnitudinem ducitur, quæ fit huic, & illi heterogenea est.

Si magnitudo magnitudini applicatur, applicata huic, & illi heterogenea est.

SCHO-

SCHOLION.

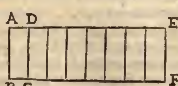
Sensus supradictorum perspicuus est; non enim latus potest addi plano, vt neque planum solido; sed latus lateri; planum plano, & solidum solido, quod etiam intelligendum est de subtractione. At verò si latus ducatur in latus producitur planum, quod huic, & illi heterogeneum est; si ducatur planum in latus producitur solidum, quod huic, & illi heterogeneum est.

Hic aduerte plurimum interesse discriminis in operationibus supradictis.

Prȩterea hoc idem in Diuisione, siue Applicatione contingit. Quandoquidem si planum applicetur lateri, oritur latus, quod illi quidem, scilicet plano heterogeneum est, atque adeo applicatum, vtrique nimirum metienti, & ortiuo, heterogeneum est. Neque conturbet nos, quòd superiùs definita fuerit multiplicatio magnitudinum, quȩ sit acceptio, quantitatis, quæ ad multiplicatam eam habet rationem, quam multiplicans ad positam, qua definitione significatur multiplicatam, & productam homogeneas esse quantitates, quandoquidem secundum proportionem comparantur, & proportio inter quantitates eiusdem generis, atque adeo homogeneas exercetur; cum tamen hìc dictum sit; si latus in latus ducatur produci planum, quod huic, & illi heterogeneum est; Non conturbet inquam, propterea quod multiplicatio tanquam additionis compendium vsurpari potest, & ita multiplicata superficies erit, quæ toties in producto continetur, quoties posita quantitas in latere multiplicante; quamobrem eadem erit proportio productæ superficiei ad multiplicatam superficiem, quæ est lateris multiplicantis ad positam.

Quædam de Diuisione, siue Applicatione notanda.

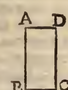
Si sit parallelogrammum A B C D, poterit per additionis compendium intelligi multiplicatum, si protrahatur latus B C, vsque ad F, adeo vt B C, in B F, toties contineatur, quoties parallelogrammum multiplicatum esse volumus, & sit exempli gratia multiplicandum octies, ea igitur proportio erit parallelogrammi B E, ad parallelogrammum B D, quæ est B F, ad B C.



Productum igitur erit B E, multiplicatum verò B D, multiplicans B F, posita verò quantitas B C.

Supradictorũ explicatio ad multiplicationem quod attinet.

Cæterùm alio sensu cum latus per latus multiplicatur fit productum, quod huic, & illi heterogeneum est, si nempe ducatur latus A B, in B C; fit rectangulum A B C D, quod vtrique lateri heterogeneum est; rectangulum enim contineri dicitur sub ijs rectis lineis, quæ vnum ex rectis angulis comprehendunt.



Alio sensu superiora explicantur.

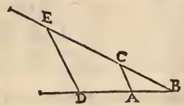
Animaduertendum autem, quatuor istas operationes sic etiam explicari posse.

Et quod ad multiplicationem attinet. Productum ad multiplicandum esse vt multiplicans ad vnitatem, hanc scilicet intelligendo esse A B, in adiuncto schemate. Sitq; operæ pretium multiplicare B D, per B C, iungantur puncta A, C, & D E, fiat parallela ipsi A C, & erit E B, ad B D, nempe productum ad multiplicatum, vt B C, multiplicans ad A B, vnitatem. Ex E B, in vnitatem A B, fit id, quod producitur ex C B, in D B. Per vnitatem autem intelligi debet linea quædam determinata, quæ ad quamuis linearum reliquarum talem habeat relationem, qualem vnitas ad certum aliquem numerum. Vt si A B, foret 4, D A, verò 16, C B 12, & E C 48, erit productum sub A B, & E B 240, quantum est productum ex D B, in C B, nempe ex 20, in 12. At si intelligatur A B, 1, A D, erit 4, & C B, erit 3, & E C 12. Vides igitur per vnitatem intelligi lineam quandam determinatam, quæ ad quamuis linearum reliquarum talem habet relationem, qualem vnitas ad certum aliquem numerum.

Alio etiam modo hactenus dicta explicãtur magna cũ Geometriæ vtilitate.

De diuisione agitur.

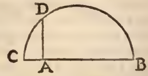
Non secus de diuisione sentiendum, vt si sit diuidenda E B, per D B, iunctis punctis E, & D, per rectam E D, ducatur A C, illi parallela, & erit B C, quotiens ipsius diuisionis; intellecta tamen A B, pro vnitate. Itaq; hoc modo in Geometria quatuor operationes Arithmeticæ non sine magno commodo adhibentur, adeo vt ipsis lineis addantur lineæ, ab ijsdem subtrahantur aliæ, & etiam si vna pro vnitate statuatur, quam communiter ad libitum licet assumere, & præter hanc aliæ duæ, adeo vt ad ipsas inueniatur quarta, quæ ad alterutram sit, vt est altera ad vnitatem, quod idem est, atque multiplicare; velut si per ipsas, quarta reperiatur, quæ ad vnam ex illis duabus sit vt vnitas ad alteram, quod est diuidere.



In Geometria quatuor operationes Arithmeticæ non sine magno commodo adhibentur.

Radicis extractio.

Vel demum si recta sit A B, & ex ea oporteat radicem extrahere quadratam; protrahatur ad C, adeo vt A C, sit tanquam vnitas; super C B, describatur semicirculus, ductaque perpendiculari A D, hæc erit radix quadrata ipsius A B, si nimirum A C, pro vnitate accipiatur, atque A B, alicuius numeri munere fungatur, cuius radix est A D, Sit C A 3, A B, verò 12, vtique A D, erit 6, cuius qnadratum est 36, quantum est rectangulum C A B; at verò sumpta C A, pro vno, A B, valebit 4, proinde A D, erit 2, cuius quadratum æquatur ipsi A B, sed de his iterum in sequentibus.



Symbola, quibus hæc noua Algebra vtitur.

Cæterum hæc etiam Algebra sua symbola habet perpetua, atque constantia, vt perpetuò ac perspicuè magnitudines datas à quæsitis distinguat. Itaque ad significandas quæsitas magnitudines vtitur elemento A, vel alia quacunque ex vocalibus E, I, O, V, frequentiùs autem vtitur A, E, ad denotandas autem datas quantitates adhibet consonantes B, C, D, vel alias quascunque, Nonnulli verò sunt, qui ad designandas quantitates ignotas vti solent X, vel Y; ita Cartesius. Ad æqualitatem designandam nos vtemur eodem symbolo, quo suprà in Numerosa vsi sumus vt ⩶ Plerique hanc æqualitatem designant hunc in modum 2 | 2. Alij verò vtuntur hoc charactere ∞. Notæ verò significantes additionem, & subtractionem, seu signa additorum, & subtractorum eadem erunt, ac illa, vt ✠ denotabit plus, & — significabit minus; & ∽ est signum anceps, seu ancipitis subtractionis. Quia enim sæpe sæpius contingit, vt non ponatur in subtractione, vtra sit magnitudo maior, vel minor, & subtractio nihilominus fieri debeat, pro differentię nota quidam vtuntur charactere isto ⩶.

Characteres, quibus alij vtuntur, explicantur.

Apud ipsos enim signum ⩶ significat differentiam inter duas, pluresue quantitates, cum non exprimitur, aut cognoscitur, penes quas sit excessus; quo cùm nos vsi fuerimus ad significandam æqualitatem, alium characterem opus fuit excogitare, nimirum ∽ ad quod designandum nonnulli hoc symbolo vsi sunt, nempe ∻. quemadmodum ad significandum minus hunc characterem ∼ adhibent; Apud nonnullos autem signum hoc ♌ significat †, vel —, signum hoc ♉ significat †, vel —, sensu contrario prioris signi, nempe cum per signum ♌ significatur ✠, tum per signum ♉ intelligitur —, aut cùm per signum ♌ intelligitur —, tum per signum ♉ intelligitur ✠.

Admonitio.

Cæterùm hic te monitum volo characteres, à plerisque adhibitos fuisse maiusculos, vt nos aliquando fecimus, ab alijs verò minusculos, quibus nos modò vtimur, experientia edocti eorum vsum faciliorem esse.

Proponuntur characteres.

Hìc autem subijcimus characteres, tam maiusculos, quàm minusculos sibi inuicem respondentes, quibus nimirum Potestates significantur, & quidem progressio ipsa nullis finibus coercetur, cum potius in infinitum extendi possit; satis tamen duximus extensam esse ad quadrato-quadrato-cubum; in reliquis enim altioribus potestatibus non dissimili modo procedendum, quemadmodum cuiq; perspicuum esse potest. Ipsorum verò characterum, siue specierum hæ sunt significationes, siue characteres sint maiusculi, siue minusculi &c.

2 !

2 l	l	A	A	a latus siue Radix
4 Q	q	Aq	A quadratum	a^2 quadratum
8 C	c	Ac	A cubus	a^3 cubus
16 QQ	qq	Aqq	A quadrato-quadratum	a^4 quadrato-quadratum
32 QC	qc	Aqc	A quadrato-cubus	a^5 quadrato-cubus
64 CC	cc	Acc	A cubo-cubus	a^6 cubo-cubus
128 QQC	qqc	Aqqc	A quadrato-quadrato-cubus	a^7 quadrato-quadrato cubus

Vt autem significetur, bis acceptam esse speciem aliquam, si adhibeatur character maiusculus, apponitur, siue postponitur numerus ipsi characteri; vnde ad significandum bis A, scribimus A 2, sic ad significandum ter A, scribimus A 3, nec dissimiliter de alijs speciebus &c. secus verò procedimus vtentes characteribus minusculis. Vt igitur designemus bis A, non apponimus notam 2, sed pręponimus, ita ad significandum ter a pręponimus notam 3, & sic de reliquis, itaque 2 a, significat bis a, & 3 a, significat ter a. Si autem postponeremus, vt a^2, significaremus, a quadratum; insuper a^3, significaret a cubum &c. Cæterum his etiam vtimur characteribus. *Specierũ vsus.*

Alij etiam characteres quorum hic est vsus, explicantur.

B in A	*b a*
B in A quadratum	*b a^2*
B quadratum in A	*b^2 a*
A planum	*a pl.*
A plani-quadratum	*a $pl.^2$*
A plani-cubus	*a $pl.^3$*
A solidum	*a sol.*
A solidi-quadratum	*a $sol.^2$*

Itaque cùm scribimus b a, significamus quantitatem b, ductam esse in quantitatem a, & cùm scribimus b a^2, denotamus quantitatem b ductam esse in quantitatem, quæ est quadratum ex a, & ita de reliquis. Illud porrò non est prætereundum silentio, nihil referre in ipsa multiplicatione, vtra species præponatur; quamobrem perinde est scribere ba, ac scribere ab, & sic de cæteris.

Aduerte tamen nos in posterum semper vsuros esse characteribus minusculis; experientia siquidem didicimus eorum vsum longe expeditiorem esse. *Auctor minusculis characteribus se vsurum dicit.*

Verum enim verò, redigendum in memoriam est, quod aliàs monuimus, nempe quantitatem diuidi in realem, & imaginariam, illa quidem est quam in natura licet aduertere, alia verò quæ solùm imaginatione suum esse consequitur; Illa tripartita est, etenim de continua permanente loquendo, alia est linea, alia superficies, & alia corpus, tot enim dimensiones admittit natura, quot sunt diuisibilitates, triplex autem vnius cuiusq; rei diuisibilitas est, etenim res ipsa diuisibilis est secundum longitudinem, secundum latitudinem, & secundum profunditatem, præter hás nulla superest diuisibilitas; latus, est diuisibile secundum longitudinem tantùm. planum verò secundum longitudinem, & latitudinem; solidum denique secundum longitudinem, latitudinem, & profunditatem; hæc igitur in natura sunt, nec plures dimensiones admittit, quod eleganter Ptolemæus ostendit in Analemmate. Cæteræ verò, vt quadrato-quadratum, quadrato-cubus &c. imaginariæ dicuntur, à quibus Geometriæ candor est alienus, cùm tamen admisso vnitatis vsu in Geometria ipsa, etiam hæ quantitates plurimùm ad veritatis assecutionem conducant. *Quantitatis diuisio in realem, & imaginariam, & quotuplex vtraq;*

De

De gradibus, atq; generibus magnitudinum comparatarum.

CAPVT II.

Magnitudines quæ de genere ad genus proportionaliter aſcendunt.

HIC agendum eſt primò de magnitudinibus, quæ ex genere ad genus ſua vi proportionaliter aſcendunt atque deſcendunt, quas Vieta ſcalares appellat. Sunt autem hæ.

1 *Latus, ſeu Radix*
2 *Quadratum*
3 *Cubus*
4 *Quadrato-quadratum*
5 *Quadrato-cubus*
6 *Cubo-cubus*
7 *Quadrato-quadrato-cubus*
8 *Quadrato-cubo-cubus*
9 *Cubo-cubo-cubus*

Et ita deinceps eodem pacto in infinitum procedendo. Genera verò magnitudinum comparatarum vti de ſcalaribus enunciantur, ſunt hęc.

1 *Longitudo, latitudoue*
2 *Planum*
3 *Solidum*
4 *Plano-planum*
5 *Plano-ſolidum*
6 *Solido-ſolidum*
7 *Plano-plano-ſolidum*
8 *Plano-ſolido-ſolidum*
9 *Solido-ſolido-ſolidum*

Quare genera magnitudinũ dicantur.

Dicuntur autem genera, ſiquidem rectè dicimus, latus eſſe longitudinem, vel latitudinem; quadratum eſſe planum; cubum eſſe ſolidum; & ſic de reliquis, has enim magnitudines tamquam genera de ſpeciebus ſibi ſubiectis enunciamus.

Gradus parodici, quid ſint.

Quid verò ſint gradus parodici ad Poteſtatem, quid ipſa Poteſtas, patet ex ſuperiùs traditis, & explicatis, ex ſerie enim ſcalarium, gradùs altior, in quo conſiſtit comparata magnitudo exinde à latere Poteſtas appellatur; reliquæ verò inferiores ſcalares gradus ſunt parodici ad Poteſtatem. Huiuſmodi autem gradus parodici dicuntur à voce græca παρόδικος, quaſi tranſitorius, ita vt perinde ſit dicere gradus parodici ad poteſtatem, ac gradus tranſitorij, hoc eſt quibus fit tranſitus ad Poteſtatem. Omnes autem magnitudines, quę ſunt infra Poteſtatem, vocantur gradus parodici ad Poteſtatem, vt gradus parodici ad cubum, ſunt latus, & quadratum; his enim fit tranſitus ad cubum.

Animaduertendum eſt autem ſigna quibus deſignantur genera magnitudinum progreſſionis ſcalarium nuncupari characteres coſſicos; in Algebra enim ſpecioſa magnitudines, quæ ex genere ad genus ſua vi proportionaliter aſcendunt, vel deſcendunt ſcalares vocantur.

In Numeroſa verò numeri coſſici nuncupari conſueuerunt. Hìc iterum inculcandum ex ſupra dictis magnitudinum generibus tria tantum realia eſſe; nempe lineam ſuperficiem, & corpus, imaginaria verò infinita eſſe nimirum quadrato-quadratum, quadrato-cubum, cubo-cubum &c. de quibus ſuperiùs diſſeruimus.

Poteſtas alia pura, alia affecta.

Cęterum Poteſtas aut pura eſt aut affecta. Poteſtas eſt pura cum affectione vacat, vt $a^2 = b^2$. Affecta verò cui homogeneum ſub parodico ad Poteſtatem gradu, &

adicita

adſcita coefficiente magnitudine immiſcetur. Vt ſi ſit æquatio a^2 ✱ b a = z^2. Magnitudo dicitur b coefficiens; at verò a^2 eſt poteſtas, & a, gradus eſt parodicus ad poteſtatem, quemadmodum b a, eſt illud homogeneum ſub gradu parodico, & coefficiente longitudine; atque demum z^2 dicitur comparationis homogeneum. Magnitudines autem adſcitæ, ſunt quibus, & gradu parodico fit poteſtati quid homogeneum ad eam afficiendam ſubgraduales dicuntur, quas etiam coefficientes appellauimus; ita in ſuprapoſita æquatione b, eſt ſubgradualis. De his autem copioſiùs capite de Æquatione Algebrica tractandum erit. Illud hìc ſilentio prætereundum non eſt, nimirum æquationes Algebricas reperiri poſſe in illis tribus Problematum generibus, quæ Veteres in Geometria agnouerunt. *Quid coefficiens, quid homogeneum ſub gradu. Quid comparationis homogeneum. Quid ſubgraduales magnitudines.*

Quorum aliqua plana ſunt appellata, alia ſolida, alia demum linearia, de quibus in præcitato loco copioſiſſimè ſumus acturi. Aduerte autem pro comparationis homogeneo conſtitui patuiſſe etiam z pl. in ſuprapoſita æquatione, vnde eſſet hoc modo a^2 † b a = z pl. Item potuiſſet etiam ipſi b, præponi a, itaut foret a^2 † a b = z^2 vel z pl. idem enim eſt ſenſus ſiue homogeneum illud ſcribatur b a, ſiue a b.

Algorithmus Speciosæ Logiſtices

CAPVT III.

SVPERIVS iam adnotauimus in hac etiam Logiſtica dari Algorithmum, quem iam definiuimus, huius autem operationis præcipuę, quas ipſa nimirum complectitur ſunt numero quatuor, vt in Numeroſa quoque contingit nimium Additio Subtractio, Multiplicatio, atque Diuiſio. *Operationes ab Algorithmo comprehenſæ quatuor ſunt numero.*

Magnitudinem Magnitudini addere.

OPERATIO PRIMA.

MAgnitudines addendæ, vel ſunt eiuſdem, vel diuerſæ appellationis. Si ſint appellationis eiuſdem; fit additio præponendo numerum magnitudinum ſummæ, quę ex illis dicitur conſurgere adhibis characteribus minuſculis. Vt ſi ad a, addi debeat a; item ad b, addi debeat b, fiet additio; vt dictum eſt, atque adeo ex a, ad a fiet 2 a ex b, ad b, fiet 2 b, ex 3 a ad a, fiet ſumma 4 a; item ex 4 b, ad b, fiet ſumma 5 b. *Magnitudinum addendarum diuiſio vel eiuſdem, vel diuerſæ appellationis.*

Si verò magnitudines ſint appellationis diuerſæ, fit additio beneficio ſigni ✱. Vt ſit iniunctum addere a, ad b. Quoniam igitur magnitudo magnitudini addenda eſt; homogeneæ verò heterogeneas non afficiunt: duæ autem magnitudines propoſitæ addendæ ſunt homogeneæ, plus autem, vel minus non conſtituunt genera diuerſa; proinde nota adiuctionis comodiſſimè perficietur operatio, & erit aggregatum ex ipſis a ✱ b; Hac autem additione facta per ſymbolum ✱, erit ſumma a ✱ b. *Quando ſunt appellationis diuerſæ.*

EXEMPLA

EXEMPLA.

a	b	5 a	5 a	6 a^2
a	b	a	3 a	3 a^2
2 a	2 b	6 a	8 a	9 a^2

		3 b		
a	a	b	4 a	4 c
b	2 b	4 b	2 b	5 d
a † b	a † 2 b	7 b	4 a † 2 b	4 c † 5 d

a
b
c
a † b † c

Nonnulla ad notatione digna.

Hic aduerte, in additione signum †, referri ad literam sequentem priori addendam. Item aduerte cùm literæ nullus est præfixus numerus, intelligendam esse præfixam vnitatem. Aduerte demum cùm literæ connectuntur signo †, nihil referre vtra earum præponatur, vel postponatur.

Numeris explicatur superior doctrina.

Hæc autem numeris explicari possunt; nam si per a, nos intelligamus 10; per b, verò 6, ex a, & b, fiet a † b; hoc est 10 † 6, erit itaque summa 10 † 6, hoc est 16; item si per b, nos intelligamus 8, per c, autem 4, fiet summa 8 † 4; hoc est 12; sic & reliqua exempla numeris declarari possunt.

Cum ascendũt per expositam scalam vel ascendentibus genere communicent, quid agendum.

At verò si ascendant per expositam scalam, vel ascendentibus genere communicent sua, quæ congruit, denominatione, designabuntur. Vel itaque sunt eiusdem, vel diuersæ appellationis; si eiusdem; puta ad a^2 addi debeat a^2, fiet 2 a^2; item ex 5 a^2, & 3 a^2, fiet 8 a^2.

At si fuerint appellationis diuersæ, vt a^2, & b pl. ex his fiet a^2 † b pl. ita si ad a^2, addi debeat b sol. fiet summa a^2 † b sol.

Vel sunt eiusdem, vel diuersæ appellationis.

Hæc autem numeris facilè poterunt explicari. Si enim a^2, valet 4, certè 5 a^2, valebunt 20, & 3 a^2, valebunt 12, horum summa est 32, nempe 8 a^2, quantum fit ex 5 a^2, & 3 a^2.

Quando eiusdem, quando diuersa.

Demonstratio patet ex dictis in Arte veteri, cùm enim additio sit acceptio quantitatis, quæ coalescit ex ijs, quæ addi dicuntur, certè aliter fieri non poterit, quàm illas simul connectendo &c.

Insinuatur numeris explicatio horum præceptorum. *Demonstratio.*

Obseruandum est autem cùm literæ nullus præponitur numerus, cogitandum esse præfixam esse vnitatem, ita quidem ex 3 a, & a fiunt 4 a. Cæterùm nihil refert in ipsa additione, vtra litera scribatur prius, an posteriùs; cùm plures adduntur literæ diuersæ. Perinde enim est scribere a † b, ac scribere b † a. De quibus etiam suprà.

SCHOLION.

Notanda quædã circa characteres maiusculos, & minusculos.

Illud autem subijciam, nimirum adhibitis characteribus maiusculis fieri addition in appositis numeris, vt si ad A, addi debeat A, fiet A 2, & si ad B, addatur B, fiet B 2. Hoc igitur animaduertisse iuuat pro declaratione eorum, quæ apud alios reperiuntur.

Magnitu-

Magnitudinem Magnitudini Subducere.

OPERATIO SECVNDA.

SI magnitudines fuerint eiusdem appellationis, fit subtractio subducendo numerum à numero, intelligendo nimirum de illis numeris, qui literis præfiguntur. Vt si ab a, auferri debeat a, remanet o, quoniam ipsi a, intelligitur præfigi 1, auferendo autem 1, ab 1, remanet o, item abs 5 a, auferri debeat a, remanebunt 4 a. Præterea abs 8 b, ablatis 3 b, remanent 5 b. *Quando magnitudines fuerint eiusdem appellationis.*

Si verò magnitudines sint appellationis diuersæ fit subtractio per signum —. Vt sit opus ab a, subducere b. Quoniam itaque magnitudo magnitudini subducenda est; homogeneæ autem magnitudines heterogeneas non afficiunt. *Cùm magnitudines fuerint appellationis diuersæ.*

Sunt autem, quæ proponuntur, magnitudines homogeneæ, plus verò, vel minus, non constituunt genera diuersa; quamobrem disiunctionis, siue multæ nota commodè subtractio fiet; & erit differentia ipsarum a minus b, scribenda a — b; Item si ex b, subtrahi debet d, fiet residuum b — d, hoc est b, minus d.

Verùm si ascendant per expositam scalam, vel ascendentibus genere communicent, sua, quę congruit, designabuntur denominatione. Vel igitur sunt eiusdem denominationis, vel diuersæ. Si sint appellationis eiusdem, fiat subtractio, vt superiùs innuimus; itaque si abs 5 a^2, auferri debeat a^2, remanebunt 4 a^2. Et si abs 2 b pl. auferri debeat b pl. remanebit b pl. si abs 5 a^3, auferri debeant 2 a^3, remanebunt 3 a^3. Si verò sint appellationis diuersæ. Vt si ab a^2, auferri debeat b pl. remanebit a^2 — b pl. hoc est a^2, minus b pl. vel si ab a^3, auferri debeat b sol. remanebit a^3 — b sol. hoc est a^3, minus b sol. Hæc autem facilè numeris possunt illustrari. Si verò non proponatur, vtra magnitudo sit maior; fiat subductio symbolo superiùs instituto. Itaque si ipsi a^2, subducere debeamus b pl. ignoretur autem vtra istarum magnitudinum sit maior, fiet residua magnitudo hæc a^2 ∾ b pl. vel b pl. ∾ a^2. *Quando magnitudines ascendunt per expositã scalam.*

EXEMPLA.

a	2 a	7 a	10 b	a
a	a	5 a	6 b	b
o	a	2 a	4 b	a — b

b	5 c	a	2 c	a^3
d	3 d	5 b	d	a^3
b — d	5 c — 3 d	a — 5 b	2 c — d	o

6 a^2	7 a^2	a^3
2 a^2	5 b^2	b^3
4 a^2	7 a^2 — 5 b^2	a^3 — b^3

Aduerte quantitatem subtrahendam minorem esse debere ea, à qua fit subtractio. *Notandum.*

SCHOLION.

Aduertenda quaedam circa characteres maiusculos.

HAud erit difficile intelligere, quo pacto superior operatio instituenda sit, adhibitis characteribus maiusculis; itaque si auferatur A, ex A 5, remanebit A 4. Nec dissimiliter quotiescunque magnitudines fuerint eiusdem appellationis. Quod si extiterint appellationis diuersae, vt cum ex A, auferri debet B, fit subtractio, vt in characteribus minusculis per signum —, itaque remanet A — B, &c.

Magnitudinem in Magnitudinem ducere.

OPERATIO TERTIA.

Magnitudinum simplicium multiplicatio, quo pacto instituenda sit.

SVnto duae magnitudines a, & b, oporteat vnam in aliam ducere. Quoniam igitur magnitudo in magnitudinem ducenda est; illae magnitudines ductu suo efficiunt magnitudinem sibi ipsis heterogeneam. Proinde magnitudo producta, quae nimirum sub ijs fit, hoc symbolo b a, designabitur; hoc autem intellige, cum fuerint magnitudines diuersi nominis; alioquin cum existerint appellationis eiusdem, vt dum a, duci debet in se, fiet a^2, si multiplicatio fuerit quadratica. Quòd si fuerit cubica fiet a^3. Vt mox dicemus.

At verò si ascendant in scala, vel eis genere communicent, adhibeantur congruae denominationes, Sit iniunctum b, ducere in a^2, producetur b a^2. Item sit opus ducere b pl. in d, fiet b pl. d. Si verò a, duci debeat in a^2, fiet a^3, vt supra tactum est. Quòd si praeterea multiplicari debeat a, per a^3, producetur a^4.

Denominationes factorum &c.

Caeterùm denominationes factorum, seu productorum à scandentibus proportionaliter magnitudinibus, ex genere ad genus, hoc modo se habet, nimirum ductum.

Latus in se facit Quadratum.
Latus in Quadratum facit Cubum.
Latus in Cubum facit Quadrato-quadratum.
Latus in Quadrato-quadratum facit Quadrato-cubum.
Latus in Quadrato-cubum facit Cubo-cubum.
Et contra, seu permutatim hoc est.
Quadratum in latus efficit Cubum.
Cubus in Latus efficit Quadrato-quadratum.

R in R	Q	a in a	a^2
R in Q	C	a in a^2	a^3
R in C	QQ	a in a^3	a^4
R in QQ	QC	a in a^4	a^5
R in QC	CC	a in a^5	a^6
Q in R	C	a^2 in a	a^3
C in R	QQ	a^3 in a	a^4

RVRSVS.

Quadratum in se facit Quadrato-quadratum.
Quadratum in Cubum facit Quadrato-cubum.
Quadratum in Quadrato-quadratum facit Cubo-cubum.
Et permutatim.

Q in Q	QQ	a^2 in a^2	a^4
Q in C	QC	a^2 in a^3	a^5
Q in QQ	CC	a^2 in a^4	a^6

RVRSVS.

Cubus in se facit Cubo-cubum.	c in c | cc | a^3 in a^3 | a^6
Cubus in Quadrato-quadratum facit Quadrato-quadrato-cubum.	c in qq | qqc | a^3 in a^4 | a^7
Cubus in Quadrato-cubum facit Quadrato-cubo-cubum.	c in qc | qcc | a^3 in a^5 | a^8
Cubus in Cubo-cubum facit Cubo-cubo-cubum. Et permutatim.	c in cc | ccc | a^3 in a^6 | a^9

IN HOMOGENEIS.

Latitudo in longitudinem facit Planum.	Latitudo in longitudinem | pl. | a in b | a b
Latitudo in Planum facit Solidum.	Latitudo in planum | sol. | a in b pl. | a b pl.
Latitudo in Solidum facit Plano-planum.	Latitudo in solidum | pl. pl. | a in b sol. | a b sol.
Latitudo in Plano-planum facit Plano-solidum.	Latitudo in pl. pl. | pl. sol. | a in b pl. pl. | a b pl. pl.
Latitudo in Plano-solidum facit Solido-solidum. Et permutatim.	Latitudo in pl. sol. | sol. sol. | a in b pl. sol. | a b pl. sol.

Planum in Planum facit Plano-planum.
Planum in Solidum facit Plano-solidum.
Et permutatim.
Solidum in Solidum facit Solido-solidum.
Solidum in Plano-planum facit Plano-plano-solidum.
Solidum in Plano-solidum facit Plano-solido-solidum.
Solidum in Solido-solidum facit Solido-solido-solidum.
Et permutatim.

Itaq; cùm fuerint eædem literæ instituimus multiplicationem additione exponentium, quam quidem summam eidem literæ apponimus, & a tergo quidem, sed aliquantulum altiùs, vel eandem literam repetimus toties, quoties est opus; hoc est quoties patitur multiplicatio instituta, adeo vt literæ immediatè se se consequentes, multiplicationem earum per inuicem factam, vel faciendam esse indicent. Si verò literæ fuerint diuersæ ponuntur continuè vna cum exponentibus suis. Quòd si habeant numeros præfixos, debet earum fieri multiplicatio, vt in numeris absolutis; quamobrem si debet multiplicari a, per a, hoc est a, in se, fit a^2, est enim 1, exponens ipsius a, ex 1, verò, & 1, fit 2, exponens ipsius a^2, & sic de reliquis, vt suprà dicebamus, quòd si debeat multiplicari a^2, per a, fit a^3; At si literæ fuerint diuersæ, vt b, & a, debeamus verò multiplicare b, per a, fiet a b, vel b a, quod si multiplicare debeamus a, b, & c, per inuicem, fiet a, b, c, vel c, b, a; Nihil enim refert, vtro modo literæ disponantur, licet præstet, literam, qua significatur quantitas ignota, postponere.

Quando sunt eadem literæ instituitur multiplicatio additione exponentium. Quando literæ sunt diuersæ. Quãdo habent numeros præfixos.

Vt igitur ex ductu alicuius numeri in se, quod producitur vocatur quadratum eiusdem numeri, & si productum illud adhuc semel per numerum eundem multiplicetur, productus numerus cubus ipsius nuncupatur, & ita deinceps; ita pariter si a, multiplicetur per a, productum a^2, consueuit appellari a, quadratum siue a, duarum dimensionum, & si a^2, rursus multiplicetur per a, producetur a^3, nempe a, cubus, seu a, trium dimensionum, & ita de reliquis vnde a^4, dicetur a, quadrato-

Explicatur quomodo fiat multiplicatione quadratũ.

quadratum, seu a^4, quatuor dimensionum, & a^5, dicetur a surdesolidum secundùm Veteres, at iuxta Recentiores a quadrato-cubus, seu a^5, quinque dimensionum, & insuper a^6, iuxta Veteres dicetur a quadrato-cubus, at secundum Recentiores a cubo-cubus; siue a sex dimensionum, & sic de cæteris.

Radix explicatur.

Quemadmodum verò numerus quispiam in se multiplicatus dicitur radix ipsius producti, & si adhuc semel per huiusmodi productum, dicitur radix cubica huius posterioris producti &c. ita a dicitur radix quadrata ex a^2, & radix cubica ex a^3, & radix quadrato-quadrata ex a^4 &c.

Sensus, qui redditur, cùm literæ præfigitur numerus.

Ex his facilè intelliges alium sensum reddi, cùm literæ præfigitur numerus, & alium, cùm idem numerus à tergo ipsimet literæ adscribitur.

Aduertendum est autem in hac Operatione multiplicationis.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{ccccccc} a & a^2 & a^2 & a & b^2 & ab & ab^2 \\ a & a & a^2 & b & b & c & b \\ \hline a^2 & a^3 & a^4 & ab & b^3 & abc & ab^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} ab & a^2 & a^3 & a^3 \\ cd & ab & a^2 & a^3 \\ \hline abcd & a^3 b & a^5 & a^6 \end{array}$$

Superiora explicantur.

Cùm scribitur $a^3 b$, quod est productum multiplicationis quantitatum a^2, & $a b$, ternarium numerum respicere quantitatem præcedentem a, non autem subsequentem b, & ita de consimilibus.

Quando sunt quantitates multiplicandæ quibus numeri siue integri, siue fracti præfiguntur.

Quòd si multiplicandæ quantitates occurrant, quibus numeri, siue integri, siue fracti præfiguntur, numeros prædictos oportet in se inuicem ducere, eorumque productum præfigere producto, consurgenti ex multiplicatione dictarum quantitatum, quod superiùs etiam innuimus; itaque ad multiplicandum $2a$, per $5b$, multiplicatis 2, per 5, prouenit 10, quod si præfigatur ipsi ab, producto quantitatum a, & b, per inuicem, productum quæsitum erit $10ab$. Non dissimiliter ex $3b$, in c, fit $3bc$; Siquidem vnitas, quæ intelligitur nunc præfigi ipsi c, ducta in 3, producit 3.

Exempla ad supradictorũ explicationẽ.

Si verò oporteat ducere $2ab$, in $3cd$, proueniet $6abcd$, præterea ex multiplicatione $\frac{2}{3}a^2$, in $\frac{1}{5}ab$; fiet productum $\frac{2}{15}a^3 b$. Hoc est ex duabus tertijs partibus ipsius a^2, in quintam partem ipsius ab, fiunt duæ decimæquintæ partes ipsius $a^3 b$.

EXEMPLA.

$$\begin{array}{ccccc} 2a & 3b & \frac{1}{2}a & 3ab & \frac{1}{2}a^2 \\ 4b & c & \frac{1}{2}b & 2cd & \frac{1}{3}ab \\ \hline 8ab & 3bc & \frac{1}{4}ab & 6abcd & \frac{1}{6}a^3 b \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a^3 & 6a^2 \\ 2b^3 & \frac{2}{3}a^3 \\ \hline 2a^3 b^3 & 4a^5 \end{array}$$

Demum hìc operæ pretium est aduertere, etsi ex multiplicatione producantur

tur quantitates plurium dimenſionum, earum tamen additionem, ſubtractionemque non aliter fieri, ac in præcedentibus.

Magnitudinem Magnitudini applicare, ſeu Magnitudinem per Magnitudinem diuidere.

OPERATIO QVARTA.

SVnto magnitudines a, & b, quarum vna debeat alteri applicari, & quidem applicanda magnitudo altior eſſe debet ea, cui applicanda eſt. Quoniam magnitudo eſt magnitudini applicanda, quantitas autem applicanda ei, cui fieri debet applicatio, heterogenea eſt, vt ſi longitudini applicetur planum, altiores autem applicantur depreſſioribus. Eſto itaque a longitudo; b verò ſit planum; commodè inſtituetur applicatio inter b planum, magnitudinem ſcilicet altiorem, quæ applicatur, & a longitudinem, cui fit applicatio.

Magnitudinū diuiſio, ſeu applicatio explicatur.

Fiet itaque quotiens $\frac{b\ pl.}{a}$. Si verò a ſ, per r, diuidi deberet, fieret $\frac{a\ \text{ſ}}{r}$. Si autem a^2 ſ, diuidatur per r, fiet $\frac{a^2\ \text{ſ}}{r}$. At ſi ſit opus diuidere a^2 ſ, per a, fiet quotiens a ſ.

Exemplis præcepta illuſtrātur.

Si verò magnitudines denominabuntur à ſuis, in quibus hæſerunt, vel ad quas in proportionalium ſcala, vel homogeneorum ſunt deuectæ gradibus, velut $\frac{b\ pl.}{a}$; hoc quidem ſymbolo ſignificatur latitudo, quam facit b plan. applicatum a longitudini.

Quod ſi b, dicatur cubus, & a, ſit planum, vt b^3, & a pl. emergit quotiens $\frac{b^3}{a\ pl.}$. Quo ſymbolo denotatur latitudo, quam facit b cubus applicatus a plano, ſeu ſignificatur latitudo, quæ oritur ex applicatione b cubi, ad a planum. Item ſi ſit opus diuidere b^3, per a, fiet quotiens $\frac{b^3}{a}$. Quo ſymbolo denotatur proueniens planum ex applicatione b cubi, ad a longitudinem.

Præter ſuperiora, adhuc alia afferuntur ad idem.

Denominationes ortorum ex applicatione à ſcandentibus proportionaliter magnitudinibus gradatim ex genere ad genus, hoc pacto ſe habent.

Denominationes ortorum explicantur.

Quadratum applicatum Lateri reſtituit Latus.
Cubus applicatus Lateri reſtituit Quadratum.
Quadrato-quadratum applicatum lateri reſtituit Cubum.
Quadrato-cubus applicatus Lateri reſtituit Quadrato-quadratum.
Cubo-cubus applicatus Lateri reſtituit Quadrato-cubum.
Et permutatim, ideſt.
Cubus Quadrato applicatus, reſtituit Latus; & ita deinceps.

RVRSVS.

Quadrato-quadratum applicatum Quadrato reſtituit Quadratum.
Quadrato-cubus applicatus Quadrato reſtituit Cubum.
Cubo-cubus applicatus Quadrato, reſtituit Quadrato-quadratum.
Et permutatim.

RVRSVS.

Cubo-cubus applicatus Cubo, reſtituit Cubum.
Quadrato-cubo-cubus applicatus Cubo, reſtituit Quadrato-cubum.
Cubo-cubo-cubus applicatus Cubo reſtituit Cubo-cubum.
Et permutatim; eoque ordine deinceps.

IN HOMOGENEIS.

Planum applicatum Latitudini, restituit Longitudinem.
Solidum applicatum Latitudini, restituit Planum.
Plano-planum applicatum Latitudini, restituit Solidum.
Plano-solidum applicatum Latitudini restituit Plano-planum.
Solido-solidum applicatum Latitudini, restituit Plano-solidum.
Et permutatim.
Plano-planum applicatum Plano, restituit Planum.
Plano-solidum applicatum Plano, restituit Solidum.
Solido-solidum applicatum Plano, restituit Plano-planum.
Et permutatim.
Solido-solidum applicatum Solido, restituit Solidum.
Plano-plano-solidum applicatum Solido, restituit Plano-planum.
Plano-solido-solidum applicatum Solido, restituit Plano-solidum.
Solido-solido-solidum applicatum Solido restituit Solido-solidum.
Et permutatim, deinceps.

Quomodo fiat diuisio in ijsdem litteris.

Itaque si fieri debet diuisio in ijsdem literis; subducto exponente diuisoris ab exponente diuidendi, quotiens indicatur à reliquo numero illius subtractionis. At si in diuidente, & diuidendo non sint omnino eædem literæ, sed quædam in diuidendo, quæ non sint in diuidente; fit subtractio ijsdem literis sublatis.

In diuersis literis instituitur diuisio per fractionem.

In diuersis autem cum nequit eadem litera auferri; fit fractio subijciendo diuisorem ipsi diuidendo.

Cùm litera habent numeros præfixos.

At verò si literæ numeros habeant præfixos diuisis quantitatibus, vt dictum est similiter diuisio fieri debet ipsorum numerorum quemadmodum in numeris absolutis.

Hæc illustrantur exemplis.

Hæc autem illustremus exemplis; Oporteat igitur diuidere a^3, per a, fiet quotiens a^2. Deinde diuidere oporteat a^3, per a^2, fiet quotiens a; Item a^4, per a^2, fiet quotiens a^2; præterea sit opus diuidere a b per a, proueniet b; & si diuidatur a b c, per a, proueniet b c, & rursus a b c, si diuidatur per a b, proueniet c &c.

Quando contingit vt diuisoris literæ auferri tolliq; nō possint, à quātitate diuidenda.

Quia verò non raro contingit, vt occurrant quantitates diuidendæ ex quibus diuisoris literæ modo iam explicato auferri, tollique non possunt; tunc subscribendus est diuisor ipsi diuidendo instar arithmeticæ fractionis; Quamobrem si sit opus diuidere b^2, per a, proueniet fractio $\frac{b^2}{a}$; ita, si oporteat diuidere a b, per c, proueniet fractio $\frac{ab}{c}$. Insuper si b c, per a; erit quotiens $\frac{bc}{a}$.

Præterea a b c, per d, si diuidatur; fit quotiens $\frac{abc}{d}$. Insuper a^3, per b^2, fit quotiens $\frac{a^3}{b^3}$. Ad extremum, quando idem diuidit se ipsum fit quotiens 1; vt si a^2, per a^2, fit quotiens 1; item si b^2, per b^2, fit quotiens 1; præterea si a^3 per a^3, & b^3 per b^3, & ita de reliquis.

Quando occurrunt quantitates diuidendæ, quibus præfixi sunt numeri.

At verò si quantitates diuidendæ occurrant, quibus præfixi sint numeri; si quantitatum diuisio fieri potest, vt dictum est, facta huiusmodi diuisione, oportet diuidere similiter prædictos numeros, vt in Arithmetica vulgari, & quod oritur quotienti præfigere. Sit iniunctum diuidere 8 a per 2, proueniet quotiens 4 a; Deinde si opus sit diuidere 10 a^3 per 2 a^2, fiet quotiens 5 a^3. Præterea si diuidere oporteat $\frac{1}{4}$ a^2b per $\frac{1}{2}$ab, proueniet quotiens $\frac{1}{2}$ a^2. Item si 3 a^2 b^2, diuidatur per 3 b^2, fiet quotiens a^2; si verò 6 a^2 b^2, diuidatur per 3 b^2, proueniet quotiens 2 a^2. Insuper si diuidatur 6 a^2 b^2 per 3 a^2, fiet quotiens 2 b^2; At si diuidatur 6 a^2 b^2 per 2 a^2, fiet quotiens 3 b^2, & sic de reliquis.

Quando præfixi sunt numeri vt sublatio literarum fieri non possit.

Quandoque præfixi sunt numeri, ita tamen, vt sublatio literarum fieri non possit, tunc subscribendus est diuisor ipsi diuidendo, vt fiat fractio. Itaq; si opus sit diuidere 4 a^2 per 2 b, fiet quotiens $\frac{4a^2}{2b}$, præterea si diuidere oporteat 4ab per 2 c, fiet quotiens $\frac{4ab}{2c}$.

Demon-

Demonstratio ea est, quia diuisio est sumptio quantitatis, ad quam diuisa eam habet rationem, quam diuidens ad positam; hæc autem comparatur, si quantitas diuidenda applicetur diuidenti &c.

[Demonstratio quomodo se habeat.]

S C H O L I O N.

HAEC Operatio si characteribus maiusculis perficienda foret sic instituenda esset. Sit A, longitudo, B, verò sit planum, & applicatio sit instituenda; id quidem perficietur intercedente virgula, seu lineola inter B, planam magnitudinem, & A longitudinem, ita vt hæc infra, illa verò supra scribatur; quamobrem ortiua magnitudo erit $\frac{B\ planum}{A}$. Si verò S, in A, diuidi debet per R, fiet $\frac{S,\ in\ A,}{R}$, at si sit opus diuidere S, in A quadratum per A, proueniet S, in A, quod si B, dicatur cubus, & A, sit planum per quod ille diuidendus sit, proueniet $\frac{B\ cubus}{A\ planum}$, quo symbolo denotatur latitudo quam facit B, cubus applicatus A plano; hoc enim modo significatur latitudo, quam facit B cubus, applicatus A plano; hoc enim pacto significatur latitudo ortiua ex applicatione B cubi, ad A planum, & sic de reliquis &c.

[Hi explicatur quomodo hæc operatio characteribus maiusculis perficienda sit.]

Illud insuper videtur operæ pretium aduertere, quod superiùs etiam innuimus; nempe plurimum conferre ad exquisitam notitiam harum operationum, ac vniuersæ pragmatiæ, quæ nimirum speciebus perficitur, si illis taxatis iuxta quosdam numeros, operationes exerceamus, hoc enim modo, secundum debitam æstimationem explicatis, facilè nos essequemur, quid ijs veritatis insit; Cùm, quis enim adnotauerit id in numeris fieri, quod operationis natura exigit, non erit cur quidem in dubium vertat, num operationem ritè perfecerit. Hac autem vt aliquo nunc illustremus exemplo. Supponamus a^2, ducendum esse in a^3. Præceptum enim docet prouenire a^5 (ommittimus exempla Additionis, Subtractionisque vtpote obuia). Itaque vt veritas deprehendatur. Supponamus a valere ?, eius igitur quadratum, puta a^2, erit 9, at verò eiusdem cubus, puta a^3, erit 27. Ductus autem 27, in 9, facit 243. Constat autem 243, esse quadrato-cubum numeri 3, in Geometrica progressione ducente initium ab 1. Præterea si 3 a^2, ducantur in 5 a^3. Præceptum docet fieri 15 a^5. Rem autem sic se habere hunc qui sequitur in modum deprehendemus, Si a, valet 3 vtiq; a^2, valebit 9, & 3 a^2, valebunt 27. At verò si 3, est pretium radicis a, ita vt a^2, valeat 9, sanè a^3, valebit 27. Itaque 5 a^3, valebunt 135; atqui si multiplicemus 135, per 7, fit productum 3645, & ita se res habet, in speciebus ipsis; Nam si a^5, valet 243, hic numerus multiplicandus est per 15, & proueniet 3645. Præterea si ducere deberemus 3 a^3 b, per 2 a^2, ex hypothesi quòd a valeat 3, vtique a^3, valebit 27, itaque cum b, valeat 10, (tantum enim eius valorem supponimus) a^3 b, valebit 270, cuius triplum est 810, atq; tantum erit pretium ipsius 3 a^3 b, at verò cùm a, valeat 3, & a^2, valeat 9; certè 2 a^2, valebunt 18, si autem 810, ducantur in 18, fit productum 14580. Idem est autem valor ipsius 6 a^5 b, etenim a^5, valet 243, ex hypothesi quod a valeat 3, & b, valeat 10, quo ducto in 243, fit 2430, hoc autem ducto in 6, fit 14580.

[Aduertenda quædam, circa cõmemoratas operationes.]

[Superiora exẽpla numeris explicantur quãtũ ad multiplicationem.]

Non dissimiliter id in diuisione dignoscetur, si enim opus sit diuidere a^3, per a^2. Præceptum docet oriri, a, si a, valet 3 vtiq; a^2, valebit 9, & a^3 valebit 27, hic diuidatur per 9. nempe a^2, prouenit 3, valor ipsius a. Item si b^3, diuidi debet per b, Præceptum docet oriri b^2, etenim si b, valet exempligratia 8, eius quadratum puta b^2, erit 64, eiusdemque cubus erit 512, at si 512, diuidatur per 8, nempe b^3, per b, fiet quotiens 64, nempe b^2. Præterea si opus sit diuidere 8 ab, per 2 a. Præceptum docet fieri 4 b. Supponamus a, valere 3, & b, 10, ergo a b, valebit 30, atque 8 a b, valorem habebit 240, at verò 2 a, valebunt 6, si autem diuidatur 240, per 6, fit quotiens 40, quantum sanè valet 4 b, nam b, valet 10, quo ducto in 4, fit 40.

[De diuisione disseritur, & eius exempla numeris illustrantur.]

Præterea sit opus diuidere a b c, per a. Præceptum docet prouenire b c, & ita se res habet, si enim a valet 3, & b, 10, insuper c, 4, vtique a b c, valebit 120, at si diuida-

[Explicationis continuatio.]

tur

tur 120, per 4, nempe a b c, per c, fiet quotiens 30, nempe a b. Insuper iniunctum sit diuidere $\frac{1}{6}$ $a^3 b$, *per* $\frac{1}{3}$ *a b, fiet quotiens* $\frac{1}{2}$ a^2, *vt præceptum docet, & ita res se habet; si a, valet 3 certè* a^3, *valebit 27, at si b valet 10 sanè* $a^3 b$, *valebit 270, itaq;* $\frac{1}{6}$ $a^3 b$, *valebit 45, at verò si a, valet 3, & b, valet 10, vtique a b, valebit 30, quare* $\frac{1}{3}$ *a b valebit 10, si verò diuidatur 45, nempe* $\frac{1}{6}$ $a^3 b$, *per* $\frac{1}{3}$ *a b, nempe per 10, fiet quotiens* $4\frac{1}{2}$, *nempe* $\frac{1}{2}$ a^2. *Si enim* a^2, *valet 9, cum a, valeat 3, certè* $\frac{1}{2}$ a^2, *valebit* $4\frac{1}{2}$ *Eodem pacto reliqua exempla explicari numeris possunt. Vt cùm diuidere opus sit 5* a^3, *per 2 b, fiet quotiens* $\frac{5\,a^3}{2\,b}$, *& insuper si 5* $a^3 b^3$, *diuidatur per 5* b^3, *proueniet 1* a^3, *hoc est* a^3. *Præterea si sit opus diuidere 7* $a^3 b^3$, *per* a^3, *fiet quotiens 7* b^3. *Hoc igitur modo se geret Artifex in suis perficiendis operationibus.*

Alia explicātur exempla

Verùm hæc vti dicebam facilè explicari possunt. Nam si 5 a^3, *per 2 b, diuidatur, prouenire* $\frac{5\,a^3}{2\,b}$, *facile constat; Quod si 5* a^3 *b, diuidatur per 5* b^3, *prouenire* a^3, *hunc in modum intelliges, etenim 5* a^3 *b, ex hypothesi, quòd a, valeat 3, & b, 10; vtiq; valebit 135000, & 5* b^3, *valebit 5000, ex hypothesi quod b, valeat 10, nam eius cubus est 1000, quo ducto in 5, fit 5000, pro pretio ipsius 5* b^3, *si autem 135000, diuidatur per 5000, fiet quotiens 27, nempe* a^3. *Ita pariter cum diuiditur 7* $a^3 b^3$, *per* a^3, *fieri 7* b^3, *hunc in modum addisces. Si enim a, valet 3, vt* a^3, *valeat 27, at verò b, valeat 10, &* b^3, *valebit 1000, quo ducto in 27, fit 27000, hoc autem valebit* $a^3 b^3$, *si igitur 27000, ducatur in 7, fiet 189000, nempe pretium ipsius 7* $a^3 b^3$. *At si* a^3, *valet 27, diuiso 189000, per 27, fiet quotiens 7000, pretium ipsius 7* b^3. *Rectè igitur Præceptum iubet &c.*

Noua hæc Ars iterum commendatur.

Hac itaq; ratione Speciosæ Logistices operationes tractari possunt, vt inde nobis lucidiùs constet, ritè institutam fuisse, etsi id etiam demonstrationibus nulla numerorum habita ratione planum, ac manifestum fiat; Imò quod specierum est proprium, ita operatio ipsa perficitur, vt luculenter omnia ab initio ad finem operationis conspiciantur, singulis nimirum eius membris ob oculos positis, quod in numeris omnino desideratur, propterea quod species ipsæ, quod etiam suprà innuimus, nulli sunt mutationi obnoxiæ, numeri autem maximè, impermixtæ siquidem illæ atque ab omni confusione immunes per se semper apparent, quales operatio ipsa requirit, numeri autem additione, subtractione, vel aliqua alia operationis specie confusi, nullo modo se se dant in conspectum, quales ad opus fuerunt assumpti, in quo plurimum elucet nouæ Logistices præstantia, vnde non mirum, si huius operæ liceat illa perficere, quæ alioquin antiqua illa, quamuis aliàs mirum in modum commendabilis absoluere minimè possit. Hoc aduertisse non piget iterum, quod superiùs non semel inculcauimus, vt cuique perspectum fiat, operæ pretium esse in hanc pene Diuinam Artem nouiter excogitatam incumbere; siquidem ob eam, quam attulimus causam, ipsius opitulatione datum est ad Geometriæ apicem pertingere. Vnde summis laudibus efferendus est ille celebris, nec vnquam satis pro dignitate commendatus, cui hæc accepta referri debet, etsi non multam gratiam apud quosdam inierit, breuiori, & conciso vtens conscribendi stilo; quamuis aliàs acri, solertique donatus ingenio, ditiorem Mathematicarum Thesaurum in communem studiosorum gratiam recluserit.

Proponitur interim id, de quo disserendum, facto superadictorum epilogismo.

Hucusq; de magnitudinibus simplicibus disseruimus, de quibus, & naturæ, & doctrinæ ordine primùm erat agendum, simplices enim cùm sint, compositas antecedunt; harum enim principia sunt; & earum itidem cognitio facilior est, sine qua compositas assequi non licet, propterea ducendum inde erat exordium; proximum autem est, vt de compositis sermonem instituamus, quod sequenti capite nostra contemplatione persequemur.

Algbo-

Algorithmus Magnitudinum Compositarum.

CAPVT IV.

SVPERIVS explicuimus, Logisticen simplicium magnitudinum scilicet additionem, subtractionem, multiplicationem, & applicationem, seu diuisionem. Quoniam autem ex illarum additione, subtractioneque proficiscuntur quantitates per signum † compositæ, vel per signum — disiunctæ, quæ tamen communi quadam nomenclatura compositæ dici consueuere, nunc præterea sequitur agendum de compositarum istarum magnitudinum operationibus.

Quibus de rebus hactenus disputatum fuerit.

Verum enim verò quia ex dictis hæ facilè constare possunt, habita præ oculis ratione signorum †, & —, proinde breuiter hæc omnia, quibusdam exemplis declarare tentauimus, animaduersis ijs, quæ nos in Numerosa tradidimus.

Quid præ oculis habendum.

Additio Magnitudinum Compositarum.

OPERATIO PRIMA.

AD additionem quod attinet, animaduertendum in signis affectionis eiusdem, siue in ijsdem signis affectionis, idem signum retineri; in diuersis autem additionem in subtractionem commutari, residuumque signo maioris afici. Hæc autem exemplis declarabimus, ad a † d, addatur a, fiet 2 a † b, item ad illud idem binomium addatur magnitudo b fiet a † 2 b.

Quomodo additio sit instituenda, cùm signa fuerint affectionis eiusdem.

Itaque quantitatum compositarum additio instituetur, consideratis signis †, & —, quibus afficiuntur; si igitur fuerint lineæ eædem, seu quantitates eiusdem denominationis, fit additio, vt in simplicibus, idemq; signum præfigitur summæ, quamobrem si oporteat addere a † b, ad a † b, fiet 2 a † 2 b, insuper si addi debeat a † b, ad 5 a † 3 b, fiet summa 6 a † 4 b, ita si addatur 3 a — b, ad 4 a — 2 b, fit summa 7 a — 3 b.

Quantitatum compositarum additio; cùm quantitates fuerint eiusdem denominationis.

Et hæc ex adiunctis exemplis colligere licebit, in quibus cernitur etiam modus instituendi additionem, cùm signa diuersa fuerint; sunt enim tunc subtrahendæ quantitates ijsdem literis denotatæ; quemadmodum in subtractione simplicium obseruatum fuit, subtractione autem facta, ei quod relinquitur præfigendum est signum, quo maior quantitas afficitur.

Quando sunt eadem.
Quando signa fuerint diuersa.

Itaque si addere oporteat 4 b † 5 a, ad 3 b — 2 a, additis 4 b, ad 3 b, & subtractis 2 a, ex 5 a, fiet summa 7 b † 3 a, prætereà si a † b, addatur ad a — 5 b, fiet summa 2 a — 4 b, vbi aduerte naturam signorum †, & —, insuper si 3 b † a, addatur ad 4 b — a, fiet summa 7 b, etenim † a, & — a, mutuò se tollunt.

Exempla.

Cùm autem addere oportet quantitates diuersis literis denotatas, sufficit illas suis connectere signis, quibus afficiuntur. Vt si oporteat addere a † b, ad c — d, proueniet summa a † b † c — d, propterea quod quantitas c, nullo signo affecta supponitur habere præfixum signum †.

Quando quantitates sunt diuersis literis denotatæ, siue sunt diuersæ appellationis, quid agendũ.

EXEM-

EXEMPLA.

$a + b$	$a + b$	$a + b$	$a + 3b$	$3a + 3b$
a	$+ b$	$a + b$	$a + 2b$	$2a + b$
$2a + b$	$a + 2b$	$2a + 2b$	$2a + 5b$	$5a + 4b$

$5a - 2b$	$a + b$	$a + b$	$a + b$	$a + b$
$3a - b$	$c + d$	$c - d$	$- d$	$- b$
$8a - 3b$	$a + b + c + d$	$a + b + c - d$	$a + b - d$	a

$a + b$	$a + b$	$b + 7a$	$b + 9a$	$b - 9a$
$c + b$	$a - b$	$- 9a$	$b - 7a$	$b + 7a$
$a + c + 2b$	$2a$	$b - 2a$	$2b + 2a$	$2b - 2a$

$a^2 + b^2$	$a^2 + bd$	$a^2 + cdf - d^2$	$a^2 - 3b^2$
$a^2 + b^2$	$a^2 + b^2$	$a^2 + bd^2 + d^2$	$a^2 - 2b^2$
$2a^2 + 2b^2$	$2a^2 + bd + b^2$	$2a^2 + cdf + bd^2$	$2a^2 - 5b^2$

$ab + b^2$	$a^2 + abc$	$a^2 - abc$	$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2$
$ab + b^2$	$a^2 + abc$	$a^2 - abc$	$\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}b^2$
$2ab + 2b^2$	$2a^2 + 2abc$	$2a^2 - 2abc$	$ab + b^2$

$4a^2 - \frac{2}{3}a^2b$	$a^2 - 6a + 8$	$6a^2 + 5ab - b^2$
$5a^2 + \frac{1}{12}a^2b$	$a^2 + a - 3$	$3a^2 - 2ab$
$9a^2 - \frac{11}{12}a^2b$	$2a^2 - 5a + 5$	$9a^2 + 3ab - b^2$

$2a^2 + 5ab - b^2$	$4abc$	$a^3 + 3a^2b + abc$
$3ab - 6a^2$	$a^3 - abc$	$a^3 + a^2b - 4ab^2 - b^3$
$8ab - 4a^2 - b^2$	$a^3 + 3abc$	$2a^3 + 4a^2b - 4ab^2 + abc - b^3$

$a^2 + 3b - 8$
$a^2 + 2b - 5$
$2a^2 + 5b - 13$

Numeris hæc omnia explicari possunt. Hæc autem numeris explicari, ac illustrari possunt; si igitur ad $a^2 + 2ab$, opus sit addere $a^2 - ab$; per a, intelligamus 10, per b, verò 4, itaque a^2, erit 100, & $2ab$, erit 80, & ab, erit 40; Stabitque exemplum in numeris, vt hìc vides.

100

$$\begin{array}{r} 100 + 80 \\ 100 - 40 \\ \hline 200 + 40 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 + 2\,a\,b \\ a^2 - \;\; a\,b \\ \hline 2\,a^2 + \;\; a\,b \end{array}$$

Si ad $100 + 80$, addatur $100 - 40$, fiet ſumma $200 + 40$, & rectè quidem fieri dicendum $2\,a^2 + a\,b$, ex additione $a^2 - a\,b$, ad $a^2 + 2\,a\,b$, nam $2\,a^2 + a\,b$, idem eſt ac $200 + 40$.

Si ad $b - d + a$, debeamus addere $d - a$, per b, intelligamus 10, per d, verò 5, per a, denique 2, in numeris ſic ſtabit exemplum.

Exemplum numeris illuſtratur.

$$\begin{array}{r} 10 - 5 + 2 \\ 5 - 2 \\ \hline 10 \end{array}$$

Conſtat autem fieri 10, ex additione præſcripta, nam $10 - 5 + 2$, idem eſt quod 7, & $5 - 2$, idem quod 3, ex 7, & 3, fiunt 10.

Ex additione præſcripta fieri quod dictũ eſt.

Non diſſimili modo poterunt alia exempla numeris explicari; quemadmodum cuique perſpicuum eſt.

Non diſſimiliter alia exẽpla poterunt numeris illuſtrari.

S C H O L I O N.

Facilè autem ex dictis ſuperiùs conſtare poteſt, quo pacto ſit operandum adhibitis characteribus maiuſculis.

Quomodo ſit operandum adhibitis characteribus maiuſculis.

Subtractio Magnitudinum Compoſitarum.

OPERATIO SECVNDA.

Ad ſubtractionem quod attinet. Vt ſubtrahantur compoſitæ quantitates iiſdem literis denotatæ; oportet aduertere num ſigna fuerint eadem, vel diuerſa, & quantitas, è qua ſubtractio fieri debet maior ſit, vel minor quantitate ſubducenda. Cùm ſigna eadem fuerint, & quantitas, è qua fieri debet ſubtractio maior fuerit quantitate ſubducenda; ſubtractio fieri debet, vt in ſimplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum eſt idem ſignum. Vt ſi oporteat ſubtrahere $a + 2\,b$, ex $2\,a + 5\,b$, ſubtractis a, ex 2 a, & 2 b, ex 5 b, fiet reſiduum $a + 3\,b$.

Qua arte ſit inſtituenda ſubtractio magnitudinum compoſitarum.

Quando ſigna eadem fuerint & quantitas ſubtrahenda minor.

Non diſſimiliter ſi oporteat ſubtrahere $2\,a - 2\,b$, ex $5\,a - 4\,b$, fiet reſiduum $3\,a - 2\,b$.

Exempla.

At verò ſi eadem fuerint ſigna, & quantitas, à qua ſubtractio facienda eſt minor ſit quantitate ſubducenda, ſubtracta minori ex maiori, præponendum eſt reſiduo contrarium ſignum. Vt ſi oporteat ſubtrahere $a + 3\,b$, ex $3\,a + 2\,b$, ſubtractis a, ex 3 a, & 2 b, ex 3 b, proueniet reſiduum $2\,a - b$, Ita pariter ſubtracto $a - 3\,b$, ex $2\,a - b$, remanebit $a + 2\,b$.

Quando ſigna fuerint eadẽ & quantitas ſubtrahenda maior &c.

Quòd ſi propoſitæ quantitates iiſdem literis deſignatæ diuerſis ſignis afficiantur, addendæ erunt non ſecus ac in ſimplicibus fieri ſolet, & ſummæ præfigendum eſt ſignum

Quando propoſitæ quantitates fuerint iiſdem literis deſignatæ.

ſignum quantitatis, à qua ſubtractio fieri debet. Vt ſi oporteat ſubtrahere a — b, ex 2 a † b, ſubtracto a, ex 2 a, atque addito b, ad b, reſiduum fiet a † 2 b, non diſſimiliter ſubtracto 2 a † 5 b, ex 5 a — 2 b, remanebit 3 a — 7 b.

Maximè obſeruandum in ſubtractione. Illud autem eſt obſeruandum, videlicet ad ſubtrahendas quantitates diuerſis literis denotatas oportere quantitates ſubducendas variatis ſignis connectere cum ijs, à quibus ſubtractio fieri debet. Quamobrem ſi oporteat ſubtrahere c — d, ex a † b, reſiduum fiet a † b — c † d.

EXEMPLA.

Varia exemplorũ genera.

a † b	a † b	a † b	a — b	a — b	a † b	a † b
a	b	a † b	a — b	a † b	a — b	a † d
b	a	o	o	— 2 b	2 b	b — d

a † b	a † b	a † b	b † d — a	b † d † a	a † b
— b	— d	c † b	b † a	b — d — a	c — d
a † 2 b	a † b † d	a — c	d — 2 a	2 d † 2 a	a † b — c † d

a — b	a^2 † a b	a^2 † a b	a^2 † b^2	a^2 † a b	a^2 — a b
a — d	a^2 — a b	a b	a^2 † b^2	a^2 † a b	a^2 † a b
d — b	2 a b	a^2	o o	o o	— 2 a b

a^2 † b^2 † a b	a^2 † b d	$\frac{1}{4}$ a^2 † $\frac{1}{4}$ b^2 † $\frac{1}{2}$ a b	$\frac{1}{2}$ a b † $\frac{1}{3}$ b^2
a^2 † b^2 — a b	a^2 † d^2	$\frac{1}{4}$ a^2 † $\frac{1}{4}$ b^2 — $\frac{1}{2}$ a b	$\frac{1}{4}$ a b † $\frac{1}{3}$ b^2
2 a b	b d — d^2	a b	$\frac{1}{4}$ a b † $\frac{1}{3}$ b^2

a^3 † c d f — d^3	a^3 — $\frac{1}{4}$ a b c † a b^2 — b^3	3 a^3 — $\frac{1}{3}$ a^2 b † $\frac{1}{3}$ a b^2 — b^3
a^3 † b d^2 † d^3	$\frac{1}{3}$ a^3 — $\frac{1}{4}$ a b c † a b^2 — b^3	— 2 a^3 † $\frac{1}{3}$ a^2 b
c d f — b d^2 — 2 d^3	$\frac{2}{3}$ a^3 — $\frac{1}{2}$ a b c	5 a^3 — a^2 b † $\frac{1}{3}$ a b^2 — b^3

2 a † 7 b	3 a † 7 b	5 a — 4 b	4 a ✣ 2 b	2 a — b
a † 4 b	2 a † 3 b	2 a — 2 b	a ✣ 5 b	a — 3 b
a † 3 b	a † 4 b	3 a — 2 b	3 a — 3 b	a ✣ 2 b

3 a ✣ b	3 a — 2 b	10 a b — a^2	3 a^2 ✣ 3 a — 10
a — b	2 a ✣ 5 b	2 a^2 — 4 a b	a^2 ✣ 2 a — 2
2 a ✣ 2 b	a — 7 b	14 a b — 3 a^2	2 a^2 ✣ a — 8

Non nulla aduertenda. Hic tamen iuuat aduertere ſubtractionem variari poſſe hunc in modum. Vt ſi ex 3 a ✣ 2 b, ſubtrahere oporteat a ✣ 3 b, ita pro reſiduo ſcribi poſſet 3 a ✣ 2 b — a — 3 b, elegantiùs tamen ſubtractis a, ex 3 a, & 2 b, ex 3 b, ſcriberetur 2 a — b, ex quo facilè intelliges, cùm quantitates ijſdem literis denotatæ fuerint, ijſdemq; ſignis fuerint affectæ, minorem ex maiori ſubducendam eſſe, eodem ſigno retento. At ſi ſubducenda quantitas maior fuerit ea, à qua ſubductio fieri debet, minor ex maiori ſubtrahenda eſt, præpoſito ſigno contrario.

Quando quãtitates ijſdem literis deſignatæ diuerſis ſignis affectæ fuerint. Cùm autem quantitates ijſdem literis deſignatæ diuerſis ſignis affectæ fuerint, ad-

dendæ

dendæ ſunt, ſummæque præfigendum eſt ſignum eius, à quo ſubtractio fieri debet, vt ſi ex 2 a + b, oporteat ſuabtrahere a — b, ſcribere poſſumus 2 a + b — a + b, & etiam ſcribere licet, imò elegantiùs a + 2 b. Cæterùm ex dictis patet, ſi ex a — b, ſubtrahatur b — c, remanſurum a — 2 b + c, & ſic de reliquis conſimilibus &c. *Nota.*

SCHOLION.

Non nulla aduertenda pro explicatione operationis facienda per numeros.

ADuertendum eſt autem, ſi quis voluerit exempla ſpeciebus tradita, numeris illuſtrare, numeros adbibendos eſſe idoneos, aliàs decipietur; quod vt meliùs intelligatur, vnum, vel alterum exemplum explieabimus.

Sit opus ex a + b, ſubtrahere c — d, dictum eſt autem prodire pro reſiduo a + b — c + d. Si quis igitur ſupponat 20, pro a, & 6, pro b, at verò 36, pro c, & 4, pro d, vtique ſubtractio non bene ſtabit, nec fiet reſiduum a + b — c + d, perinde enim eſſet, ac 20 + 6 — 36 + 4, hoc eſt 30 — 36, adhibendi ſunt igitur numeri idonei; Vnde ſi 20, ſupponatur pro a, & 6, pro b, at verò 30, pro c, & 4, pro d, fiet ſubtractio, vt nihil remaneat; quod ſi pro c, ſupponeretur 16, & 4, pro d, fiet reſiduum 20 + 6 — 16 + 4, hoc eſt 14. Ita ſi ex 10 a b — a^2, ſubtrahi debeat 2 a^2 — 4 a b, fiet reſiduum 14 a b — 3 a^2; Id tamen videbitur non remanere ſi ſupponamus 6, pro a, & 4, pro b, nam data hac hypotheſi, 10 a b, valebunt 240, at vero a^2, valebit 36, itaq; 10 a b — a^2, idem erit quod 240 — 36, inſuper 2 a^2, valebunt 72; & 4 a b, valebunt 96, itaque 2 a^2 — 4 a b, idem erit, quod 72 — 96, hoc autem eſſe non poteſt, ſiquidem terminus ſubtrahendus maior eſſet eo, à quo fieri debet ſubtractio. At ſi 12, ſupponamus pro a, & 4, pro b, vtique 10 a b, idem erit quod 480, quare cùm a valeat 12, & a^2, 144, & b, 4; idem erit 10 a b — a^2, ac 480 — 144, at verò 2 a^2, valebunt 288, inſuper 4 a b, valebunt 192, itaque 2 a^2 — 4 a b, idem erit ac 288 — 192, ſi autem ex 480 — 144, hoc eſt ex 336, auferamus 288 — 192, hoc eſt 96, fiet reſiduum 240, quantum eſt pretium illius reſidui 14 a b — 3 a^2, data illa hypotheſi, quod a valeat 12, & b, valeat 4, &c.

Multiplicatio Magnitudinum Compoſitarum.

OPERATIO TERTIA.

Qua arte ſit inſtituenda quantitatum multiplicatio.

COmpoſitarum quantitatum multiplicatio, vt inſtituatur, oportet earum partes inuicem multiplicare, vt de ſimplicibus dictum fuit, atque producta ſimul addere.

Diſſeritur de multiplicatione, quantum ad ſigna +, & —.

Quòd verò attinet ad ſigna +, & —, quæ ijs præfigenda ſunt; illud eſt in memoriam reuocandum, videlicet eadem ſigna hoc eſt + per +, vel — per —, facere ſignum +, diuerſa verò nempe +, per —, vel — per +, facere —, vt ſi multiplicare debeamus a + b, per c, multiplicatis + a, per + c, & + b, per + c, fiunt + a c, & + b c, quæ ſi inuicem connectantur, ſiue addantur, prouenict + a c + b c, ſiue a c + b c. Nec diſſimiliter ſi multiplicandum ſit a — b, per c, producetur a c — b c.

Alia traduntur exempla.

Ita pariter ſi ducere oporteat a + b, per c + d, multiplicatis etenim a + b, per c, & iterum a + b, per d, non enim a + b, duci tantùm debet in c, ſed etiam in d, cum multiplicari debeat per c + d, fiet autem productum a c + a d + b c + b d, non diſſimiliter ad multiplicandum a — b, per c — d, procedendum eſt; ductis enim a — b, per + c, & iterum a — b, per — d, fiet productum a c — ad — b c + b d; Si enim a — b, ducatur in + c, fiet + a c — b c, deinde ſi a — b, multiplicetur per — d, fiet productum — ad + b d, propterea quod + a ductum in — d, producit — a d, at verò — b in — d, producit + b d.

EXEM-

EXEMPLA.

$$\begin{array}{r} a + b \\ c \\ \hline ac + bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ c \\ \hline ac - bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ - c \\ \hline ac - bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ - c \\ \hline - ac + bc \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ab + b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline - ab + b^2 \\ a^2 - ab \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline - ab - b^2 \\ a^2 + ab \\ \hline a^2 - b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} bc \\ d \\ \hline bcd \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3a + 4b \\ 3b \\ \hline 9ab + 12b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4a + 3b \\ + 2c \\ \hline 8ac + 6bc \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4a + 2b \\ 2a + 3b \\ \hline 12ab + 6b^2 \\ 8a^2 + 4ab \\ \hline 8a^2 + 16ab + 6b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ c - d \\ \hline - ad - bd \\ ac + bc \\ \hline ac + bc - ad - bd \\ \text{seu } ac - ad + bc - bd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b \\ c - d \\ \hline - ad + bd \\ ac - bc \\ \hline ac - bc - ad + bd \\ \text{seu } ac - ad - bc + bd \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2b - ab^2 + b^3 \\ a^3 - a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 - b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - 2ab + b^2 \\ a - b \\ \hline - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^3 - 3a^2b + ab^2 \\ a - 2b \\ \hline - 2a^3b + 6a^2b^2 - 2ab^3 \\ a^4 - 3a^3b + a^2b^2 \\ \hline a^4 - 5a^3b + 7a^2b^2 - 2ab^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6a^2 + 8a - 9 \\ 5a^2 - 4 \\ \hline -24a^2 - 32a + 36 \\ 30a^4 + 40a^3 - 45a^2 \\ \hline 30a^4 + 40a^3 - 69a^2 - 32a + 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4d^2 + 6de + e^2 \\ 5de - e^2 \\ \hline -4d^2e^2 - 6de^3 - e^4 \\ 20d^3e + 30d^2e^2 + 5de^3 \\ \hline 20d^3e + 30d^2e^2 - 4d^2e^2 - 6de^3 + 5de^3 - e^4 \end{array}$$

seu $20d^3e + 26d^2e^2 - de^3 - e^4$

$$\begin{array}{r} 4a^3 + \frac{1}{3}a^2b + \frac{1}{5}ab^2 \\ \frac{3}{4}ab - \frac{1}{6}a^2 \\ \hline -\frac{2}{3}a^5 - \frac{1}{18}a^4b - \frac{1}{30}a^3b^2 \\ 3a^4b + \frac{1}{12}a^3b^2 + \frac{1}{20}a^2b^3 \\ \hline 2\frac{17}{18}a^4b + [illegible]\,a^3b^2 + \frac{1}{20}a^2b^3 - \frac{2}{3}a^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5a^3 + 7a^2 - 3a + 9 \\ a^2 - 8a + 5 \\ \hline 25a^3 + 35a^2 - 15a + 45 \\ -40a^4 - 56a^3 + 24a^2 - 72a \\ 5a^5 + 7a^4 - 3a^3 + 9a^2 \\ \hline 5a^5 - 33a^4 - 34a^3 + 68a^2 - 87a + 45 \end{array}$$

Plerumque expedit multiplicationem instituere interserendo particulam in, vel literam M; Vt si quis velit multiplicare $6a^3 + 5a^2 - 3a + 7$, per $2a^2 - 4a + 8$; Scribendum erit $6a^3 + 5a^2 - 3a + 7$, in $2a^2 - 4a + 8$, vel loco particulæ in, potest adhiberi litera M, vt $6a^3 + 5a^2 - 3a + 7$, M $2a^2 - 4a + 8$. *Notanda quædam.*

Applicatio, seu Diuisio Magnitudinum Compositarum.

OPERATIO QVARTA.

POstremo loco de magnitudinum compositarum applicatione, seu diuisione tractandum superest. Hæc Operatio non secus instituitur per species, ac Alphabeti elementa, quàm in vulgari Arithmetica per numeros. Iis igitur præceptis adhibitis huiusmodi Operatio perficietur. Recolendum tamen est in memoriam, quod suo loco de diuisione signorum †, & −, tradidimus. Si igitur † per †, vel − per −, diuidatur, oritur †, at verò si diuidatur † per −, vel − per †, oritur −. Illud autem obserua nihil interesse, num à dextra, an à sinistra incipias. *Applicatio magnitudinum compositarum, qua arte sit instituenda.*

Itaque ad diuidendum a c † b c, per c, diuidatur † a c per † c, & † b c per † c, prouenient † a, & † b; atque adeo fiet quotiens a † b. Non dissimiliter si diuidatur a c − c b, per c, orietur a − b; quandoquidem diuisis † a c per † c, fit † a, & − b c, per † c, fit − b. Deinde si sit iniunctum diuidere a c † a d † b c † b d, per c † d, fiet quotiens a † b. *Exemplis declaratur doctrina de Applicatione.*

Diuidatur

Diuidatur	a c + a d + b c + b d	+ a c	+ a	+ b c	+ b
per c † d	a c + a d + b c + b d	+ c		+ c	
	o o o o				
Quotiens	+ a + b				

Exempli explicatio. Diuidatur a c per c, & prouenit a, ſcribendum ſub linea in quotiente; multiplicato autem diuiſore c + d, per quotientem repertum a, productum a c + a d, ex ipſo diuidendo auferatur; ſcribendo partes eiuſdem denominationis locis debitis, & reliquum ſub linea infra ducta; itaque cum ſubtracto a c, ex a c, & a d, ex a d, nihil remaneat; propterea ſub ducta linea ſcribere oportebit o. Præterea diuiſo + b c, per + c, fit + b, adſcribendum priori quotienti; multiplicato autem diuiſore c + d, per quotientem hunc b, fit productum + b c + b d, ſcribendum, vt ante ſub diuidendo, factaque ſubtractione quod remanet, erit o, ſcribendum ſub linea.

Plura exempla in Applicationis explicationem. Vt verò cumulatiùs hæc à nobis tractentur, plura ſubijciemus exempla; oporteat diuidere a b + b d, per b, obſeruentur præcepta ſignorum +, & —, atque diuidatur + a b, per + b, & inſuper + b d, per + b; & fient + a, & + d; quamobrem quæſitus quotiens erit a + d. Ita ſi diuidatur a b — b d, per + b, orietur quotiens a — d, namque diuiſo + a b, per + b, fit quotiens + a, item diuiſo — b d, per + b, fit quotiens — d. Si diuidatur 7 a b — 5 a^2, per a, fiet quotiens 7 b — 5 a. Si a^2 r, diuidi debeat per a, fiet quotiens a r.

Exemplum. Ergo ſi oporteat diuidere a b + b d, per b, fiet quotiens a + d. Quod ſi diuidatur a b — b d, per b, proueniet a — d. Si diuidi debeat a b — a d, per a, fiet quotiens b — d. Quod ſi oporteat diuidere a^3 — a^2 b, per a, orietur a^2 — a b.

Exemplum. Rurſus ſi diuidere oporteat a^3 + a b^2 per a, proueniet quotiens a^2 + b^2.

Exemplum. Deinde ſi ſit iniunctum diuidere 20 a^2 + 12 a per 4 a, fiet quotiens 5 a + 3, ſi nimirum diuiſio per 4 a, inſtituatur.

Exemplum. Quoniam autem hæc Operatio magni momenti eſt, proinde non erit abs re, nec alienum ab inſtituto noſtro alia plurima exempla in medium afferre.

Diuidatur	b d + c d + b f + c f	+ b d	+ d	+ b f	+ f
per b † c	b d + c d + b f + c f	+ b		+ b	
	o o o o				

Exempli declaratio. Facta diuiſione ipſius b d per b, fit quotiens d; quemadmodum in ſimplicibus dicebamus; ſcribatur autem in quotiente; multiplicetur verò quotiens inuentus d, per b + c, diuiſorem, & producetur b d + c d, auferendum à diuidendo, ſcribatur autem infra ipſum, cùmque facta ſubtractione nihil remaneat; proinde ſub vtroque membro poni debet o. Nunc verò diuidatur † b f, per + b, & fiet quotiens † f, adſcribendus quotienti priori, multiplicato autem quotiente iſto inuento f, per b † c, producitur † b f † c f, ſcribendum ſub diuidendo, factaq; ſubtractione, cùm nihil remaneat, ſub reliquis duobus membris itidem . o . notari debet, atque diuiſio peracta erit: quemadmodum cernere licet in ſuperiori paradigmate, & erit quotiens d + f: idque opere multiplicationis comprobabitur.

Diuidatur	b d − c d − b f † c f	† b d	† d	− b f	− f
per b − c	b d − c d − b f † c f	† b		† b	
	o o o o				

Ad hanc diuiſionem perficiendam. Primò diuidatur † b d, per † b, vt fiat quotiens † d; deinde multiplicetur b — c, diuiſor per quotientem inuentum d, & fiet productum b d — c d, ſubtrahendum ex diuidendo; ob id ſub linea ſcribi debet o. Deinde diuidatur — b f, per † b, factaq; diuiſione quotiens orietur − f. Multiplicetur autem quotiens per diuiſorem b — c, & producetur — b f † c f, quo ſubtracto ex reliquo diuidendo, nihil remanet, atque adeo peracta diuiſione quotiens erit d — f.

Superioris operationis explicatio.

Diuidatur	a^2 — 2 a b † b^2	† a^2	† a.	− a b	− b
per a — b	a^2 — a b	† a		† a	
	o — a b				
	— a b † b^2				
	o o				

Vt autem hæc diuiſio perficiatur diuiui debet a^2, per a, vt fiat quotiens a, nunc multiplicetur a — b, per a, & producetur a^2 — a b, quo ſubtracto ex diuidendo fiet reliquum — a b, ſcribendum ſub linea ducta infrà — 2 a b. Mox autem diuidatur — a b, per † a, & proueniet — b, ſcribendum in quotiente; ducto deinde diuiſore a — b, in ipſum — b, producetur — a b † b^2, quo ſubtracto ex reliquo diuidendo nihil remanebit; atque adeo fiet quotiens a − b, id quod multiplicatione comprobari poteſt.

Ratio superioris diuiſionis tractatur.

Diuidatur	a^2 − b^2	− a b	a^2	a	— a b	— b
per a † b	a^2 − b^2	− a b	a		† a	
	o o	o				

Ad hanc abſoluendam diuiſionem, primò diuidatur a^2, per a, vt proueniat a, ſcribendum in quotiente; multiplicetur autem a † b, per quotientem inuentum a, & proueniet a^2 † a b, quo ſubtracto ex diuidendo remanebit − a b; hoc autem reſiduum poſt lineolam adſcribi debet; quoniam præter − b^2, hic terminus − a b, huc ad diuidendum acceſſit; mox autem diuidatur − a b; terminus iam dictus per † a, & fiet quotiens − b, modò ſi multiplicetur a † b, per quotientem inuentum — b, conſurget − a b — b^2, ſubtrahendum ex eo, quod relinquitur in diuidendo: cum autem poſt ſubtractionem nihil remaneat; ob id ſub linea ſcribi debet . o. & ideo ad finem perducta erit operatio. Hæc autem operatio multiplicatione comprobabitur, fiet autem quotiens a — b.

Declaratio ſuperioris diuiſionis.

Diuidatur	$a^2 - b^2 \mid + ab$	$+ a^2 \mid + a$	$+ ab \mid + b$
per $a - b$	$a^2 - b^2 \mid + ab$	$+ a \mid$	$+ a \mid$
	o o o		

Animaduerſis ijs, quæ ſuprà dicta fuerunt, facilè intelligentur, quæ circa hanc diuiſionem occurrunt. Ex hac autem oritur quotiens $a + b$.

Diuidatur	$a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3$	$+ a^3 \mid + a^2. - a b^2 \mid - b^2$	
per $a + b$	$a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3$	$+ a \mid + a \mid$	
	o o o o		

Hæc autem diuiſio facilè ex dictis intelligi poteſt, & opere multiplicationis citra difficultatem comprobatur. Quotiens autem ex hac diuiſione proficiſcitur $a^2 - b^2$.

Diuidatur	$a^4 + a^3 b - a b^3 - b^4$	$- b^4 \mid - b^3$
per $a + b$	$a^4 + a^3 b - a b^3 - b^4$	$+ b \mid$
	o o o o	$+ a^3 b \mid + a^3$
		$+ b \mid$

Hic diligenter Hæc diuiſio ſi ab vltimo termino incipiatur, facilè conſtabit ex ijs, quæ hactenus dicta ſunt habita præ oculis doctrina ſignorum †, & —. Cæterùm oritur quotiens $a^3 - b^3$. Euidenter autem diuiſio comprobata manet ex opere multiplicationis, quemadmodum cernere licet in adiuncto Paradigmate.

$$a^3 - b^3$$
$$a + b$$
$$+ a^3 b - b^4$$
$$a^4 - a b^3$$
$$a^4 - a b^3 + a^3 b - b^4$$
Seu $a^4 + a^3 b - a b^3 - b^4$

Diuidatur	$bf + cf + df - b^2 - bc - bd$	$+ bf \mid + b$
per $f - b$	$bf + cf + df - b^2 - bc - bd$	$+ f \mid$
	o o o o o o	
		$+ cf \mid + c$
		$+ f \mid$
		$+ df \mid$
		$+ f \mid + d$

Siue	$bf - b^2 + cf - bc + df - bd$	$b + c + d$
	$bf - b^2 + cf - bc + df - bd$	$f - b$
	o o o o o o	$- b^2 - bc - bd$
		$bf + cf + df$
		$bf + cf + df - b^2 - bc - bd$

Hæc

Hæc diuisio facilè etiam constat, & ex ea oritur quotiens $b + c + d$.

Diuidatur $a^3 c - a^3 d - b^3 c + b^3 d$ | $+ a^3 c$ | $+ a^3 . - b^3 c$ | $- b^3$
per $c - d$ $a^3 c - a^3 d - b^3 c + b^3 d$ | $+ c$ | $+ c$ |

$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$

$$a^3 - b^3$$
$$c - d$$
$$- a^3 d + b^3 d$$
$$a^3 c - b^3 c$$
$$a^3 c - a^3 d - b^3 c + b^3 d$$

Non est, vt in hac diuisione explicanda nos immoremur, cùm ex hactenus explicatis facilè constet, fit autem quotiens $a^3 - b^3$.

Diuidatur $a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3$ | $- b^3$ | $+ b^2 . + 2 a b^2$ | $- 2 a b$
per $a - b$ $+ a b^2 - b^3$ | $- b$ | $- b$ |

$+ 2 a b^2$
$- 2 a^2 b + 2 a b^2$ | $- a^2 b$ | $+ a^2$
| $- b$ |

$- a^2 b$
$a^3 - a^2 b$

$0 \quad 0$

$$a^2 - 2 a b + b^2$$
$$a - b$$
$$- a^2 b + a b^2 - b^3$$
$$a^3 - a^2 b + a b^2$$

Productum $a^3 - 3 a^2 b + 3 a b^2 - b^3$

Hæc diuisio parit quotientem $a^2 - 2 a b + b^2$.

Diuidatur $9 d^4 + 12 d^3 e - 4 d e^3 - e^4$ | $- 3 d^2 e^2 . -$ e^4 | $+ e^2$
per $3 d^2 - e^2$ $9 d^4 + 12 d^3 e - 4 d e^3 - e^4$ | $- 3 d^2 e^2 . -$ e^2 |
$- 4 d e^3$ | $+ 4 d e$
$- e^2$ |
$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ $+ 3 d^2 e^2$ | $+ 3 d^2$
$- e^2$ |

$$4 d e + 3 d^2 + e^2$$
$$3 d^2 - e^2$$
$$- 4 d e^3 - 3 d^2 e^2 - e^4$$
$$12 d^3 e + 9 d^4 + 3 d^2 e^2$$
$$9 d^4 + 12 d^3 e - 4 d e^3 - e^4$$

Diuidatur per $d + c$

$$d^4 - c^4 + 2\,b^2 d u + 2\,b^2 c u + b^2 d^2 - b^2 c^2$$
$$d^4 - c^4 + 2\,b^2 d u + 2\,b^2 c u + b^2 d^2 - b^2 c^2$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$
$$-c d^3 \;\Big|\; {+c^2 d^2 \atop +c^2 d^2} \;\Big|\; {-c^3 d \atop -c^3 d} \;\Big|\; {-b^2 c d \atop -b^2 c d} \;\Big|$$

$$\frac{d^4}{d} \;\Big|\; d^3 . \frac{-c d^3}{+d} \;\Big|\; -c d^2 . \frac{+c^2 d^2}{+d} \;\Big|\; +c^2 d . \frac{-c^3 d}{+d} \;\Big|\; -c^3$$
$$\frac{+2\,b^2 d u}{+d} \;\Big|\; +2\,b^2 u . \frac{+b^2 d^2}{+d} \;\Big|\; +b^2 d . \frac{-b^2 c d}{+d} \;\Big|\; -b^2 c$$

Fiet quotiens $+d^3 - c d^2 + c^2 d - c^3 + 2\,b^2 u + b^2 d - b^2 c$

Diuidatur per $u^2 - 16$

$$+u^6 - 8\,u^4 - 124\,u^2 - 64 \qquad \frac{-64}{-16} \;\Big|\; +4$$
$$+u^6 + 8\,u^4 + \quad 4\,u^2 - 64$$

$$0 \;-16\,u^4 - 128\,u^2 \quad 0 \qquad \frac{-128\,u^2}{-16} \;\Big|\; +8\,u^2$$
$$-16\,u^4 - 128\,u^2$$

$$0 \quad 0 \qquad \frac{-16\,u^4}{-16} \;\Big|\; +u^4$$

Fit quotiens $+u^4 + 8\,u^2 + 4$

$$u^4 + \quad 8\,u^2 + 4$$
$$u^2 - 16$$

$$-16\,u^4 - 128\,u^2 - 64$$
$$u^6 + 8\,u^4 - \quad 4\,u^2$$

$$u^6 - 8\,u^4 - 124\,u^2 - 64$$

Diuidatur per $u^2 - b^2 - c^2$

$$+u^6 + b^2 u^4 - 2\,c^2 u^4 - \;b^4 u^2 + c^4 u^2 - b^6 - 2\,b^4 c^2 - b^2 c^4 \;\Big|\; +2\,b^2 c^2 u^2$$
$$+u^6 - b^2 u^4 - \;c^2 u^4 - 2\,b^4 u^2 + c^4 u^2 - b^6 - \;b^4 c^2 - b^2 c^4 \;\Big|\; + \;b^2 c^2 u^2$$

$$0 \;+2\,b^2 u^4 - c^2 u^4 + b^4 u^2 \;0 \quad 0 \;-b^4 c^2 + \quad 0 \quad +b^2 c^2 u^2$$
$$+2\,b^2 u^4 - c^2 u^4 + b^4 u^2 \qquad -b^4 c^2 + \qquad +b^2 c^2 u^2$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Quotiens $+u^4 + 2\,b^2 u^2 - c^2 u^2 + b^4 + b^2 c^2$

$$\frac{+u^6}{+u^2} \;\Big|\; +u^4 . \frac{+2\,b^2 u^4}{+\;u^2} \;\Big|\; +2\,b^2 u^2 . \frac{-c^2 u^4}{+\;u^2} \;\Big|\; -c^2 u^2$$

$$\frac{+b^4 u^2}{u^2} \;\Big|\; +b^4 . \frac{+b^2 c^2 u^2}{+\;u^2} \;\Big|\; +b^2 c^2$$

SCHOLION

SCHOLION.

Quandoquidem ſuperiùs operationes nonnullas paulò breuiùs explicuimus; lubet hìc eaſdem explicare diligentiùs. Dicebamus, cum oportebat diuidere $a^2 - b^2$, *per* $a - b$, *operationem eſſe ſic inſtituendam, vt nimirum diuidatur* a^2, *per* a, *proueniet enim in quotiente* a, *quo ducto in* $a - b$, *fit* $a^2 - ab$, *hoc autem ſubtracto ex* $a^2 - b^2$, *remanet* $- b^2 + ab$, *ſiquidem ſubtrahendo* a^2 *ex* $a^2 - b^2$, *cum oporteret ſubducere* $a^2 - ab$; *plus ſubtrahimus, quàm oportet; ob id fieri debet additio ipſius* ab, *ad id, vnde fit ſubtractio, & remanebit* $- b^2 + ab$, *perinde enim eſt ſubducere* $a^2 - ab$, *ex* $a^2 - b^2$, *ac eſt ſubtrahere* a^2 *ex* $a^2 - b^2 + ab$; *ab ipſo autem* $- b^2 + ab$ *ſubducere oportet* $- b^2 + ab$, *id videlicet, quod fit ex multiplicatione ipſius* $a - b$, *diuiſoris, per* b, *ſecundum terminum quotientis.*

Diligẽtiùs explicantur, quæ ſuperiùs tradita ſunt.

Rurſus dictum fuit ſi $d^4 - c^4 + 2b^2du + 2b^2cu + b^2d^2 - b^2c^2$, *diuidatur per* $d + c$, *dictum eſt inquam oriri* $+ d^3 - cd^2 + c^2d - c^3 + 2d^2u + b^2d - b^2c$; *idque ex opere multiplicationis conſtat, vt in hoc cernitur Paradigmate.*

Rurſus ſuperiora explicãtur.

$$
\begin{array}{r}
d^3 - c\,d^2 + c^2 d - c^3 + 2\,b^2 u + b^2 d - b^2 c \\
d + c \\
\hline
c\,d^3 - c^2 d^2 + c^3 d - c^4 + 2\,b^2 c\,u + b^2 c\,d - b^2 c^2 \\
d^4 - c\,d^3 + c^2 d^2 - c^3 d + 2\,b^2 d\,u + b^2 d^2 - b^2 c\,d \qquad\qquad \\
\hline
d^4 - c^4 + 2\,b^2 d\,u + 2\,b^2 c\,u + b^2 d^2 - b^2 c^2
\end{array}
$$

Præterea iuuabit etiam explicare magis operationem ipſam, qua diuiſimus $d^4 - c^4 + 2\,b^2 d\,u + 2\,b^2 c\,u + b^2 d^2 - b^2 c^2$, per $d + c$, Primò diuidatur d^4, per d, & proueniet quotiens d^3, quo ducto in $d + c$, fiet $d^4 + c\,d^3$, hoc autem ſubtracto ex d^4, remanet $- c\,d^3$. Diuidatur hoc autem per d, & proueniet $- c\,d^2$, quo multiplicato per $d + c$, orietur $- c\,d^3 - c^2 d^2$; hoc autem ſubtracto ex $- c\,d^3$, remanebit $+ c^2 d^2$, diuidendum per d; factaque diuiſione proueniet $+ c^2 d$, quo multiplicato per $d + c$, orietur $+ c^2 d^2 + c^3 d$, ſubtrahendum ex $+ c^2 d^2$, vt remaneat $- c^3 d$, quo diuiſo per $+ d$, fit quotiens $- c^3$; hoc autem multiplicato per $d + c$, proueniet $- c^3 d - c^4$, & hoc ſubtracto ex $- c^3 d$, remanet .o. & ſi $- c^4$, ſubtrahatur ex $- c^4$, remanebit .o. Deinde diuidatur $+ 2\,b^2 d\,u$, per $+ d$, fit quotiens $2\,b^2 u$, quo ducto in $d + c$, orietur $2\,b^2 d\,u + 2\,b^2 c\,u$, hoc autem ſubtracto ex $2\,b^2 d\,u + 2\,c\,b^2 u$, remanebit .o. Mox verò diuidatur $+ b^2 d^2$, per $+ d$, proueniet quotiens $+ b^2 d$, quo multiplicato per $d + c$, fiet $+ b^2 d^2 + b^2 c\,d$, quo ſubtracto ex $+ b^2 d^2$, remanebit $- b^2 c\,d$, diuidendum per $+ d$, qua facta diuiſione, proſiliet quotiens $- b^2 c$; hoc autem multiplicato per $+ d + c$, orietur $- b^2 c\,d - b^2 c^2$, quo ſubtracto ex $- b^2 c\,d - b^2 c^2$, remanet .o.

Alterius operationis explicatio.

Diuidatur	$a^3 + b^3$	$- a\,b^2$	$+ a^2 b$	$+ b^3$	$+ b^2$
per $a + b$	$a^3 + b^3$	$- a\,b^2$	$+ a^2 b$	$+ b$	
	o o	o	o	$- a\,b^2$	$- a\,b$
				$+ b$	

Fiet

Fiet quotiens $a^2 - a b + b^2$

$$\begin{array}{r} a^2 - a b + b^2 \\ a + b \\ \hline a^2 b - a b^2 + b^3 \\ a^3 - a^2 b + a b^2 \\ \hline a^3 + b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} + a^2 b & + a^2 \\ + b & \end{array}$$

Hæc diuisio si ab vltimo termino incipiatur, facilè constabit ex ijs, quæ dicta sunt habita præ oculis doctrina signorum +, & —.

Diuidatur per $d - a$

$$\begin{array}{c} a d + d b + c d - a^2 - a b - a c \\ a d + d b + d - a^2 - a b - a c \\ \hline o \quad o \quad o \quad o \quad o \quad o \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} + a d & + a \\ + d & \\ + b d & + b \\ + d & \end{array}$$

Siue

$$\begin{array}{c} a d - a^2 + b d - a b + c d - a c \\ a d - a^2 + b d - a b + c d - a c \\ \hline o \quad o \quad o \quad o \quad o \quad o \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} + c d & + c \\ + d & \end{array}$$

Fiet quotiens $a + b + c$

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ d - a \\ \hline - a^2 - a b - a c \\ a d + b d + c d \\ \hline a d + b d + c d - a^2 - a b - a c \end{array}$$

Animaduersis ijs, quæ superiùs dicta sunt, sine difficultate hæc etiam diuisio intelligetur.

Diuidatur per $c - d$

$$\begin{array}{c} a^2 c - a^2 d - b^2 c + b^2 d \\ a^2 c - a^2 d - b^2 c + b^2 d \\ \hline o \quad o \quad o \quad o \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} + c a^2 & a^2 \\ + c & \\ + b^2 c & - b^2 \\ + c & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - b^2 \\ c - d \\ \hline - a^2 d + b^2 d \\ a^2 c - b^2 c \\ \hline a^2 c - a^2 d - b^2 c + b^2 d \end{array}$$

Non est cur in hac diuisione explicanda nos immoremur, cum ex hactenus traditis satis superque constet.

$- a^2 b$

— a^2 b, atque adeo – 3 a^2 b — b^3; à, reliquis vt ἀλλοιωσιν, parit in pragmatia, cum a^3 – 3 a^2 b ✱ 3 a b^2, vt hic cernere licet; inſtituta multiplicatione quotientis in diuiſorem.

Ita pariter hìc — a^2 d — b^2 c; cùm ſcilicet a^2 — b^2, per c — d, nempe quotiens per diuiſorem multiplicatur.

a^2 — 2 a b ✣ b^2
a — b
— a^2 b ✣ 2 a b^2 — b^3
a^3 — a^2 2 b ✣ a b^2
Productum a^3 — 3 a^2 b ✣ 3 a b^2 — b^3

Cæterum illud eſt perpetuò obſeruandum, quod etiam ſuperiùs innuimus, vt quotientes ſinguli, in diuiſorem ducantur, productorum, vt à diuidendo ſubtractio fiat; Ita planè, vt aliquo vtar exemplo, cum diuidebatur a^3 – 3 a^2 b ✣ 3 a b^2 – b^3, per a – b. Primò diuidebatur – b^3, per – b, quotiens erat ✣ b^2, duci debet in a – b, vt fiat ✣ a b^2 – b^3, quo ſubtracto ex 3 a b^2 — b^3, remanet ✱ 2 a b^2, quo diuiſo per – b, fit – 2 a b, hoc verò ducto in a — b, fit — 2 a^2 b ✣ 2 a b^2, quo ſubtracto ex — 3 a^2 b ✱ 3 a b^2, remanet – a^2 b, hoc diuiſo per – b, fit quotiens † a^2, hoc autem multiplicato per a – b, fit productum a^3 – a^2 b, quo ſubtracto ex a^3 – a^2 b, nihil remanet. *Quædam animaduerſione digna circa ſuperiora exempla.*

Non diſſimiliter, cum hìc diuiditur a^2 c – a^2 d — b^2 c ✣ b^2 d; per c – d; fit quotiens a^2 – b^2, vt etiam ſuperiùs vidimus, & multiplicatione comprobatur. Primò enim diuiditur ✣ a^2 c, per ✱ c, & fit quotiens a^2, quo ducto in c – d, fit a^2 c – a^2 d, quo ſubtracto ex a^2 c — a^2 d, remanet o. Deinde diuiditur b^2 c, per ✣ c, & fit quotiens – b^2, quo ducto in c – d, diuiſorem fit productum – b^2 c † b^2 d, quo ſubtracto ex – b^2 c ✣ b^2 d, remanet o, fit igitur quotiens a^2 – b^2, quod multiplicatione comprobatur. Placuit hæc iterum adnotare, vt ſuperiora exempla meliùs intelligantur. *Rurſus notanda circa pragmatiam ſuperiorum operationum.*

Diuidatur 9 d^4 † 12 d^3 e † 4 d e^3 † 6 d^2 e^2 † e^4 | † e^4 | ✣ e^2 *Vide Scholion, quod ſequitur.*
per 3 d^2 ✣ e^2 | † e^2 |

Peracta operatione fit

Quotiens 4 d e † 3 d^2 † e^2 | † 3 d^2 e^2 | ✣ 3 d^2
† 3 d^2 † e^2 | † e^2 |
✣ 4 d e^3 † 3 d^2 e^2 † e^4 | † 4 d e^3 | ✣ 4 d e
12 d^3 e ✣ 9 d^4 † 3 d^2 e^2 | † e^3 |
Productum 9 d^4 ✱ 12 d^3 e † 4 d e^3 6 d^2 e^2 † e^4

Diuidatur d^4 — b^4 † 2 a^2 d y † 2 a^2 b y † a^2 d^2 — a^2 b^2 | – b d^3 | † b^2 d^2 | – b^3 d | – a^2 b d |
per d † c d^4 — b^4 † 2 a^2 d y † 2 a^2 b y † a^2 d^2 — a^2 b^2 | – b d^3 | † b^2 d^2 | – b^3 d | – a^2 b d |
o o o o o o o o o o

Quotiens † d^3 — b d^2 † b^2 d — b^3 ✱ 2 a^2 y ✱ a^2 d — a^2 b

d^4 | d^3. — b d^3 | — b d^2. ✱ b^2 d^2 | ✣ b^2 d. — b^3 d | — b^3
d | ✣ d | ✱ d | ✣ d |.

✣ 2 a^2

$\frac{+2a^2dy}{+d}$ | $\frac{+2a^2y.+a^2d^2}{+d}$ | $\frac{+a^2d.-a^2bd}{+d}$ | a^2b

Diuidatur per y^2-16

$+y^6-8y^4-124y^2-64$ $\frac{-64}{-16}$ | $+4$

$+y^6+8y^4+\ \ 4y^2-64$

o   o

$-16y^4-128y^2-$ $\frac{128y^2}{16}$ | $+8y^2$

$-16y4-128y^2$

o   o $\frac{-16y^4}{-16}$ | $+1y^4$

Quotiens $+y^4+8y^2+4$

$$\begin{array}{r} y^4+8y^2+\ 4 \\ y^2-16 \\ \hline -16y^4-128y^2-64 \\ y^6+\ 8y^4-\ \ 4y^2 \\ \hline \end{array}$$

Productum $y^6-\ 8y^4-124y^2-64$

Diuidatur per $y^2-a^2-c^2$

$+y^6+a^2y^4-2c^2y^4-\ a^4y^2+c^4y^2-a^6\ 2a^4c^2-a^2c^4$ | $+2a^2c^2y^2$

$+y^6-a^2y^4-\ c^2y^4-2a^4y^2+c^4y^2-a^6\ a^4c^2-a^2c^4$ | $+\ a^2c^2y^2$

o   o   o   o

$+2a^2y^4-c^2y^4+a^4y^2$ a^4c^2 $+a^2c^2y^2$

$+2a^2y^4-c^2y^4+a^4y^2$ a^4c^2 $+a^2c^2y^2$

o   o   o   o   o

Quotiens $+y^4+2a^2y^2-c^2y^2+a^4+a^2c^2$

$\frac{+y^6}{+y^2}$ | $\frac{+y^4+2a^2y^4}{+\ \ y^2}$ | $\frac{+2a^2y^2\ c^2-y^4}{+\ \ y}$ | $-c^2y$

$\frac{+a^4y^2}{+\ y^2}$ | $\frac{+a^4+a^2c^2y^2}{+\ \ y^2}$ | $+a^2c^2$

Quia verò hæc inferuire poſſunt ad intelligentiam Carteſianæ Geometriæ; proinde non pigebit aliud exemplum afferre, id quidem compertum, illudque eſto.

Diuidatur per $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}f-f^2u^2+f^2u^2$

$+\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^2u^2q-fu^2q-4f^2u^4q+4f^2u^4q$ | $+fu^2q$

$+\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^2u^2q-fu^2q-4f^2u^4q+4f^2u^4q$ | $+fu^2q$

Quotiens $+q-4fu^2q$ $\frac{+\frac{1}{4}q}{+\frac{1}{4}}$ | $+q$ $\frac{-fu^2q}{+\frac{1}{4}}$ | $-4fu^2q$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4}-\ \frac{1}{4}f-f^2u^2+f^2u^2 \\ +q-4+u^2q \\ \hline -fu^2q+f^2u^2q+4f^2u^4q-4f^2u^2q \\ \frac{1}{4}q-\frac{1}{4}f\ \ \ q-f^2u^2q+\ \ f^2u^2q \\ \hline \end{array}$$

Productum $\frac{1}{4}q-\frac{1}{4}fq+f^2u^2q-fu^2q-4f^2u^4q+4f^2u^4q$

Diuidatur

Diuidatur $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ac - \frac{3}{8}ad + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{15}cf - \frac{3}{20}df$

per $\frac{1}{2}a + \frac{1}{5}f$ $\quad \frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ac - \frac{3}{8}ad + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{15}cf - \frac{3}{20}df$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Seu $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{6}ac + \frac{1}{15}cf - \frac{3}{8}ad - \frac{3}{20}df$

$\quad \frac{1}{4}ab + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{6}ac + \frac{1}{15}cf - \frac{3}{8}ad - \frac{3}{20}df$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

Quotiens $\frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c - \frac{3}{4}d$

$$\frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c - \frac{3}{4}d$$
$$+ \frac{1}{2}a + \frac{1}{5}f$$

$$\frac{1}{10}bf + \frac{1}{15}cf - \frac{3}{20}df$$
$$\frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ac - \frac{3}{8}ad$$

Productum $\frac{1}{4}ab + \frac{1}{6}ac - \frac{3}{8}ad + \frac{1}{10}bf + \frac{1}{15}cf - \frac{3}{20}df$

Diuidatur $af + bf + cf - df + ef + ag + bg + cg - dg + eg$

per $f + g$

Quotiens $a + b + c - d + e$

$$a + b + c - d + e$$
$$f + g$$

$$ag + bg + cg - dg + eg$$
$$af + bf + cf - df + ef$$

$$af + bf + cf - df + ef + ag + bg + cg - dg + eg$$

Diuidatur $a^5c - a^5d + a^3b^2c - a^3b^2d$

per $a^2 + b^2$ $\quad a^5c - a^5d + a^3b^2c - a^3b^2d$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Quotiens $a^3c - a^3d$

Diuidatur $a^5c - a^5d + a^3b^2c - a^3b^2d$

per $a^3c - a^3d$ $\quad a^5c - a^5d + a^3b^2c - a^3b^2d$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Quotiens $a^2 + b^2$

Diuidatur $a^3cd - a^3d^2$

per $a^3c - a^3d$ $\quad a^3cd - a^3d^2$

$$0 \quad 0$$

Quotiens d

Diuidatur $a^3cd - a^3d^2$

per $cd - d^2$ $\quad a^3cd - a^3d^2$

$$0 \quad 0$$

Quotiens a^3

S C H O L I O N.

Nonnulla notanda circa diuisione.

ADuertendum est circa diuisionem superiorem, cùm diuideremus $9\,d^4 \dagger 12\,d^3 e \dagger 4\,de^3 \dagger 6\,d^2 e^2 \dagger e^4$, per $3\,d^2 \dagger e^2$, sic instituendam esse. Primò diuidatur $\dagger e^4$, per $\dagger e^2$, fiet quotiens $\dagger e^2$, quo ducto in $3\,d^2 \dagger e^2$, producitur $3\,d^2 e^2 \dagger e^4$, subtrahendum ex diuidendo, remanet autem $9\,d^4 \dagger 12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3 \dagger 3\,d^2 e^2$. Mox verò diuidendum residuum $3\,d^2 e^2$, per e^2, proueniet verò $3\,d^2$, quo ducto in $3\,d^2 \dagger e^2$, fit productum $9\,d^4 \dagger 3\,d^2 e^2$, hoc autem subtracto ex residuo, remanet $12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3$. At verò si diuidatur $4\,d e^3$, per e^2, proueniet $4\,d\,e$, quo multiplicato per $3\,d^2 \dagger e^2$, proueniet $12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3$, quo subtracto ex $12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3$, nihil remanet; atque hunc in modum ad finem operatio perducta est.

Operationis autem conspectus sic se habet.

$9\,d^4 \dagger 12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3 \dagger 6\,d^2 e^2 \dagger e^4$	$\dagger\ e^4$	$\dagger\ e^2$
$\dagger 3\,d^2 e^2 \dagger e^4$	$\dagger\ e^2$	
$\dagger 9\,d^4 \dagger 12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3 \dagger 3\,d^2 e^2 \quad o$	$\dagger 3\,d^2 e^2$	$\dagger 3\,d^2$
$\dagger 3\,d^2 e^2$	$\dagger\ e^2$	
$\dagger 9\,d^4 \quad \dagger 3\,d^2 e^2$	$4\,d e^3$	$\dagger 4\,d\,e$
$o \quad \dagger 12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3 \quad o$	e^2	
$\dagger 12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3$		
$o \quad o$		

$$\begin{array}{r} 3\,d^2 \dagger e^2 \\ e^2 \\ \hline 3\,d^2 e^2 \dagger e^4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\,d^2 \dagger e^2 \\ 3\,d^2 \\ \hline 9\,d^4 \dagger 3\,d^2 e^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3\,d^2 \dagger e^2 \\ 4\,d\,e \\ \hline 12\,d^3 e \dagger 4\,d e^3 \end{array}$$

Quantitates sunt diuidenda, quæ modis prædictis diuisionem non patiuntur, quid agendum.

Itaque operatio absoluitur, vt hìc luculenter conspicitur.

Quod si diuidendæ quantitates proponantur, quæ modis iam explicatis diuisionem non patiantur, subscribendus est diuisor ipsi diuidendo, vt in fractionibus vulgaribus fieri consueuit.

Si igitur sit iniunctum diuidere b^2, per a, fiet quotiens $\frac{b^2}{a}$. Item $b\,c$, per a, proueniet quotiens $\frac{b\,c}{a}$. Item $b\,d$, per a, fiet quotiens $\frac{b\,d}{a}$. Insuper $b\,c\,d$, per a, proueniet quotiens $\frac{b\,c\,d}{a}$.

Si verò oporteat diuidere $b\,d$ ✠ $d\,g$, per a, fiet quotiens $\frac{bd ✠ dg}{a}$. Quod si oporteat diuidere a^2 b pl. per b ✠ d, fiet quotiens $\frac{a^2 ✠ b\,pl.}{b ✠ d}$. Præterea si diuidere oporteat $b^2 - d^2$, per g, fiet quotiens $\frac{b^2 - d^2}{g}$, & ita de reliquis; foret enim inanis labor alia exempla percurrere.

Radicum

RADICVM EXTRACTIO.

HVC etiam pertinet operatio illa, quæ Radicis extractio dici solet, quæ quidem operatio persimilis est admodum illi, qua in vulgari Arithmetica ex proposito numero radix erui solet. Quemadmodum a ductum in a, facit a^2, cuius latus dicitur esse a, ita ex a^2, si extrahatur radix proueniet a. Non dissimiliter, cùm a^3, ductum in a, producit a^4, ita ex a^4, extracta radix erit a; Huc vsque de quantitatibus simplicibus. Hac de re tamen in sequentibus redibit sermo. *Radicis extractio sequitur perpendenda, atq; tractanda.*

Quòd si quantitates compositæ fuerint, ex quibus radix extrahenda sit, non dissimili modo procedendum erit, se habet enim extractio radicis simplicis quantitatis quemadmodum extractio radicis ex numero, cuius radix vnius sit figuræ, seu characteris; Extractio verò radicis ex quantitate composita, se habet, vt extractio radicis ex numero, cuius radix plurium sit figurarum. Non igitur secus extrahenda est radix ex quantitate composita, quàm ex numero, cuius radix pluribus characteribus constet. Hæc tamen exemplis explicare iuuabit. *Primò, quantitas est simplex. Quando quãtitas est composita, quomodo procedendum.*

Iniunctum sit latus quadratum extrahere ex $a^2 + 2\,a\,b + b^2$. Primò extrahenda est radix ex a^2, quæ quidem est a, quæ in se ducta quadraticè facit a^2, quo subtracto ex a^2, remanet o, deinde multiplicato a, per 2, fit 2 a, per quod diuidatur 2 a b, & fiet quotiens b, adscribendus, priori radici inuentæ a, si verò ducatur 2 a, in b, fit 2 a b, quo subtracto ex $+ 2\,a\,b$, remanet o, multiplicetur verò b, in se, fiet $+ b^2$, quo subtracto ex $+ b^2$, remanet o, atque operatio ipsa ad finem perducta erit, ita vt radix quæsita sit $a + b$. *Exemplum affertur in declaratione extractionis radicis.*

EXEMPLVM.

Quadratum	$a^2 + 2\,a\,b + b^2$	$a + b$
	$a^2 + 2\,a\,b + b^2$	$a + b$
	o o o	$a\,b + b^2$
		$a^2 + a\,b$
	Radix $a + b$	$a^2 + 2\,a\,b + b^2$
	Diuisor 2 a	

Vides igitur qua arte ex composita quantitate quadrata radix extrahenda sit; quod si propositum fuerit radicem quadratam eruere ex quantitate composita $a^4 - 2\,a^2\,b^2 + b^4$, non dissimili artificio procedendum erit. Primò extraho radicem ex a^4, eaque est a^2, quæ in se ducta facit a^4, quo subtracto ex a^4, remanet o. Deinde multiplicato a^2, per 2, fit $2\,a^2$, per quod diuido $- 2\,a^2\,b^2$, & fit quotiens $- b^2$, subducendus priori radici inuentæ a^2, vt fiat $a^2 - b^2$. Hinc si ducatur $2\,a^2$, in b^2, fiet $2\,a^2\,b^2$, quo subtracto ex $2\,a^2\,b^2$, remanet o. At verò si b^2, in se quadraticè ducatur, fiet $+ b^4$, quo subtracto ex $+ b^4$, nihil remanet, eritque operatio ad finem perducta, vnde quæsita radix erit $a^2 - b^2$. *Animaduertitur artificiũ extractionis in alijs potestatibus.*

Propositum deinde sit quadratam radicem extrahere, ex $36\,a^2 - 48\,a + 16$. Extrahatur primò radix quadrata ex $36\,a^2$, eaque est 6 a, quæ in se ducta facit $36\,a^2$, quo subtracto ex $36\,a^2$, remanet o. Deinde multiplicetur 6 a, per 2, & prouenit 12 a, per quod diuidatur 48 a, & prouenit pro quotiente 4, subducendum ipsi *Exemplum cum potestates numerus afficiunt.*

 6 a.

6 a. Si verò ducatur 6 a, in — 4 a, fit — 48 a, quo subtracto ex — 48 a, remanet o. Si autem — 4, ducatur in se quadraticè fit ✠ 16, quo subtracto ex ✠ 16 remanet o.

Quadratum	$36\,a^2 - 48\,a \dagger 16$	$6\,a - 4$
	$36\,a^2 - 48\,a \dagger 16$	$6\,a - 4$
	o o o	$-\,24\,a \dagger 16$
		$36\,a^2 - 24\,a$
	Radix $6\,a - 4$	$36\,a^2 - 48\,a \dagger 16$
	Diuisor $12\,a$	

Exemplum eiusq; declaratio. Propositum sit ex $a^2 \dagger 2\,a\,b \dagger b^2 \dagger 2\,b\,c \dagger 2\,a\,c \dagger c^2$, radicem quadratam extrahere, extrahatur primò radix quadrata ex a^2, eaque est a, quæ in se ducta facit a^2, quo subtracto ex a^2, remanet o. Deinde ducatur a in 2, & fit 2 a, per quod diuidere oportet 2 a b, & fit quotiens b, quo addito ad a, radici prius inuentæ, fit a † b, mox verò ducatur 2 a, in b, & fit 2 a b, quo subtracto ex 2 a b, remanet o, at verò b, quadraticè in se ductum facit b^2, quo subtracto ex b^2, remanet o.

Deinde ducatur a ✠ b, in 2, & fit 2 a ✠ 2 b, per quod oportet diuidere 2 b c ✠ 2 a c, & fit quotiens c, adscribendus priori radici a ✠ b, & fiet a ✠ b ✠ c; Si verò ducatur 2 a ✠ 2 b, in c, fiet productum 2 a c ✠ 2 b c; seu quod idem est 2 b c † 2 a c, quo subtracto ex 2 b c ✠ 2 a c, nihil remanet; atque demum ducatur c, in se quadraticè, vt fiat c^2, quo subtracto ex c^2, remanet o, & ita ad finem erit operatio perducta, & radix erit a ✠ b ✠ c.

$a^2 \dagger 2\,a\,b \dagger b^2 \dagger 2\,b\,c \dagger 2\,a\,c \dagger c^2$	Quadratum a^2		a	
$a^2 \dagger 2\,a\,b \dagger b^2 \dagger 2\,b\,c \dagger 2\,a\,c \dagger c$	—		per 2	
	Radix a			
o o o o o o			2 a	primus diuisor
	a † b			
Radix a † b † c	2			
Diuisor primus 2 a	per			
Diuisor secundus 2 a † 2 b	2 a † 2 b			Secundus diuisor

Exemplum eiusq; declaratio. Et consimili quidem artificio procedendum erit in extractione cæterarum radicum, vnde si proponatur $a^2 \dagger 2\,a\,b \dagger b^2 - 2\,b\,c - 2\,a\,c \dagger c^2$, Radix eruetur a † b — c.

Quando radix extrahenda est cubica. Quod si radix extrahenda sit cubica suo modo etiam eruetur, obseruatis præceptis iuxta exigentiam huiusmodi potestatis.

Iniunctum igitur sit radicem extrahere cubicam ex $a^3 \dagger 3\,a^2\,b \dagger 3\,a\,b^2 \dagger b^3$. Primum oportet, cubicam radicem extrahere, ex a^3 cuius radix cubica est a, quæ ducta in se cubicè facit a^3, quo subtracto ex a^3, remanet o.

Deinde ducatur a^2, in 3, vt fiat † 3 a^2, per quod diuidere oportet † 3 a^2 b, vt fiat quotiens † b, mox verò ducatur 3 a^2, in b, vt fiat 3 a^2 b, quo subtracto ex 3 a^2 b, nihil remanet; deinde ducatur b^2, nempe quadratum ipsius b, in 3, vt fiat 3 b^2, quo multiplicato per a, radicem prius inuentam, fit 3 a b^2, quo subtracto ex 3 a b^2, remanet o. Deinde ducatur b, in se cubicè, vt fiat b^3, quo subtracto ex b^3, nihil remanet, & operatio ad finem perducta erit, ita vt quæsita radix sit a † b.

Cubus

Cubus	a^3	$+ 3a^2b$	$+ 3ab^2$	$+ b^3$	$+ 3a^2b$ } $+ b$ quotus.	
	a^3	$+ 3a^2b$	$+ 3ab^2$	$+ b^3$	$+ 3a^2$ }	
	o	o	o	o		
Radix	$a + b$					
Diuisor	$3a^2$					

Vides igitur qua industria procedendum sit in extractione, cubicæ radicis, ex composita quantitate proposita.

Propositum sit, radicem cubicam extrahere, ex $27a^3 + 54a^2 + 36a + 8$, primò eruatur radix cubica, ex $27a^3$, eaque erit $3a$, quæ cubicè ducta in se facit $27a^3$, quo subtracto, ex $27a^3$, nihil remanet. Sumatur autem $9a^2$, quadratum ex $3a$, cuius triplum est $27a^2$, per quod diuidatur $54a^2$, & proueniet quotiens 2, adscribendus priori radici $3a$; ducatur autem 2, in $27a^2$, vt fiat $54a^2$, quo subtracto ex $54a^2$, remanet o; mox verò ducatur 2, in se quadraticè; vt fiat 4, quo ducto in $3a$, fiet $12a$, cuius triplum est $36a$, hoc autem subtracto, ex $36a$, nihil remanet, denique ducatur 2, in se cubicè, & fiet 8, quo subtracto ex 8, nihil superest, & Operatio ad finem erit perducta, ita, vt radix quæsita sit $3a$ † 2. *Alterius cubicæ radicis extractio. Eius declaratio.*

Non absimili artificio, vtendum erit ad extrahendam radicem ex $8a^6 + 36a^4 + 54a^2 + 27$; primò enim oportet, radicem extrahere cubicam ex $8a^6$, quæ quidem est $2a^2$, quæ in se cubicè ducta facit $8a^6$, quo subtracto ex $8a^6$, remanet o. Quadratum verò ex $2a^2$, est $4a^4$, cuius triplum est $12a^4$, per quod si diuidatur $36a^4$, fit quotiens 3, mox verò multiplicetur $12a^4$, per 3, vt fiat $36a^4$, quo subtracto ex $36a^4$, nihil remanet. Deinde sumatur 9, quadratum ex 3, illius autem triplum est 27, quo ducto, in $2a^2$, fiet $54a^2$, quo subtracto, ex $54a^2$, nihil remanet. Denique ducatur 3, in se cubice, vt fiat 27, quo subtracto, ex 27, remanet o, & Operatio ad finem erit perducta, ita, vt radix sit quæsita $2a^2 + 3$. *Quando numeris affixæ sunt species quomodo sit radicis extractio tractanda, & primò quando radix extrahenda est quadratica.*

Propositum sit, ex $27a^6 - 54a^5 + 90a^4 - 80a^3 + 60a^2 - 24a + 8$, primò eruatur cubica radix ex $27a^6$, eaque est $3a^2$, quæ in se cubicè ducta facit $27a^6$, quo subtracto ex $27a^6$, nihil remanet. Deinde sumatur $9a^4$, quadratum ex $3a^2$, radix iam inuenta, & accipiatur eius triplum cuiusmodi est $27a^4$, eritque primus diuisor, per quem oportet diuidere $- 54a^5$, vt fiat quotiens $- 2a$, ascribendus priori radici; mox verò ducatur $27a^4$, in $- 2a$, & proueniet $- 54a^5$, quo subtracto ex $- 54a^5$, remanet o. *Quando radix est cubica extractionis declaratio quando radix est cubica.*

Deinde ducatur $- 2a$ in $- 2a$, quadraticè in se, vt fiat $+ 4a^2$, quo ducto in $+ 3a^2$, radicem priùs inuentam, fit $+ 12a^4$, cuius triplum est $36a^4$, quo subtracto ex $+ 90a^4$, remanet $+ 54a^4$. Postea ducatur $- 2a$, in se cubicè, vt fiat $- 8a^3$, quo subtracto, ex $- 80a^3$, remanet $- 72a^3$. Nunc verò ducatur in se quadratice $3a^2 - 2a$, vt fiat $9a^4 - 12a^3 + 4a^2$, cuius triplum est $27a^4 - 36a^3 + 12a^2$, eritqua secundus diuisor, per quem si diuidatur $+ 54a^4$ &c. fiet quotiens $+ 2$, adscribendus priori radici $3a^2 - 2a$. Ducatur autem $27a^4 - 36a^3 + 12a^2$, in 2, vt proueniat $54a^4 - 72a^3 + 24a^2$, quo subtracto ex $54a^4 - 72a^3 + 60a^2$, remanet $36a^2$. Deinde ducatur 2, quadraticè in se, vt fiat $+ 4$, quo multiplicato per $+ 3a^2 - 2a$, radicem prius inuentam, proueniet $+ 12a^2 - 8a$, cuius triplum est $+ 36a^2 - 24a$, quo subtracto ex $+ 36a^2 - 24a$, nihil remanet. Denique ducatur idem $+ 2$, in se cubicè, vt fiat $+ 8$, quo subtracto ex $+ 8$, remanet o. Ita vt ad finem perducta sit Operatio, & quæsita radix sit $3a^2 - 2a + 2$. *Sequitur operatio.*

Cubus

Cubus $27a^6 - 54a^5 + 90a^4 - 80a^3 + 60a^2 - 24a + 8$ Cubus $27a^6$
$27a^6 - 54a^5 + 36a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 24a + 8$ Radix $3a^2$

o o $+54a^4 - 72a^3 + 36a^2$ o o $3a^2$
$+54a^4 - 72a^3 + 36a^2$ $3a^2$

o o o $9a^4$
3

Radix $3a^2 - 2a + 2$ $27a^4$ primus diuisor

Primus diuisor $27a^4$
Secundus diuisor $27a^4 - 36a^3 + 12a^2$ | $-54a^5$ / $+27a^4$ | $-2a$ quotus primus

$+27a^4$ by $-2a$ gives $-54a^5$

$-2a$ by $-2a$ gives $+4a^2$; by $+3a^2$ gives $+12a^4$; per 3 gives $36a^4$

$-2a$ by $-2a$ gives $+4a^2$; by $-2a$ gives $-8a^3$

$3a^2 - 2a$ by $3a^2 - 2a$: $-6a^3 + 4a^2$, $9a^4 - 6a^3$, gives $9a^4 - 12a^3 + 4a^2$; by 3 gives diuisor secundus $27a^4 - 36a^3 + 12a^2$

$+94a^4$ / $+27a^4$ | $+2$ quotus secundus

$27a^4 - 36a^3 + 12a^2$ by 2 gives $54a^4 - 72a^3 + 24a^2$

$+2$ by $+2$ gives $+4$; by $+3$ gives $+12$ … $+2$ by $+2$ gives $+4$; by $+2$ gives $+8$

$+12$ times $3a^2 - 2a$ gives $+12a^2 - 8a$; by 3 gives $+36a^2 - 24a$

Insinuatur idem esse adhibendum artificium, cum cõposita quantitas fuerit cuiusq; alterius generis.

Ex hactenus explicatis cuique licebit aduertere modum extrahendi cubicam radicem, ex proposita quantitate, quæ cnmposita sit, & ex dictis exploratum itidem erit, qua arte eruenda sit radix cuiuscunque generis, ex proposita, quæ composita sit quantitate.

Quando composita quantitas huiusmodi fuerit, vt modo artificiora dix vni non possit.

At si quantitates ex quibus extrahenda est radix huiusmodi fuerint, vt radix modo prædicto inueniri non possit, designabitur ipsa præfigendo propositis quantitatibus signum, seu characterem ℞ adscribendo; illi notam potestatis iuxta naturam quæsitæ radicis. Vt ad extrahendam quadratam radicem, ex a b, scribitur ℞ Q a b, quo symbolo indicatur quadratam radicem ex a b, extractam esse, vel extrahendam adhuc; Ita pariter ℞ Q($a^2 + b^2$), vel ℞ Q $\overline{a^2 + b^2}$, significabit radicem quadratam, ex $a^2 + b^2$.

Exemplum ad idem declarandum.

Præterea ad extrahendam radicem cubicam ex $a^2 b$, scribo ℞ Q $a^2 b$. Item ℞ C ($a^3 - b^3 + a b^2$), seu ℞ C $\overline{a^3 - b^3 + a b^2}$, significabit radicem cubicam, ex $a^3 - b^3 + a b^2$.

✱ a b^3. Ita etiam ℞ C (a^3 ✱ a b^2 ✱ d^3), ſeu $\overline{\text{℞ C } a^3 \text{ ✤ } a\, b^2 \text{ ✤ } d^3}$, denotabit radicem cubicam ex a^3 ✤ a b^2 ✱ d^3.

Aduerte autem quotieſcunque ſigno ℞, non apponitur character alter per, illud ſignificari radicem quadratam, & quidem breuitatis cauſa ad de notandam huiuſmodi radicem ſolus hic adhibetur character neglecto Q. *Notandum.*

S C H O L I O N.

Redeuntes autem ad ſuperiora illud ſupereſt adnotandum non diſſimili artificio erui poſſe latus quadratum ex plurinomio a^2 † 2 a b † b^2 − 2 a c − 2 b c † c^2; eius enim latus erit a † b − c. Hoc autem ſuperiùs etiam innuimus.

a^2 † 2 a b † b^2 − 2 a c − 2 b c † c^2
a^2 † 2 a b † b^2 − 2 a c − 2 b c † c^2

0 0 0 0 0 0

Radix b † b − c
Primus diuiſor 2 a
Secundus diuiſor 2 a † 2 b

a † b − c
a † b − c

− a c − b c † c^2
a b † b^2 − b c
a^2 † a b − a c

a^2 † 2 a b † b^2 − 2 a c − 2 b c † c^2

Et animaduerſis ſignis †; & −, operando vt in ſuperioribus factum fuit; elicietur radix quadrata a † b − c.

Cæterùm ſi quiſpiam velit adhibere vt à nobis fieri ſolet pro vtroque ſingulari latere ſpecies a, & e; conſueuimus enim ad binomiam radicem conſtituendam è duobus ſingularibus lateribus ſiue radicibus, conſueuimus inquam, vti commemoratis ſpeciebus; itaque ſi propoſitum fuiſſet radicem eruere quadratam ex a^2 † 2 a e † e^2, non ſecus eſt procedendum ac ſuperiùs fecimus conantes radicem quadratam eruere ex a^2 † 2 a b † b^2; nihil enim refert vtra ſit ſpecies, eadem enim ſunt obſeruanda præcepta. *Poteſt quiſpiã ad libitum adhibere has, vel illas ſpecies vnde, vti poterit a, & e, pro ſingularibus lateribus.*

Sed hac de re iterum redibit ſermo in ſequentibus; vbi multa de radicis extractione dicemus. Præſertim cùm quantitates ſunt irrationales. *De his iterum in ſequentibus redibit ſermo.*

Algorithmus Fractarum Magnitudinum.

CAPVT V.

SATIS iam dictum fuit de Algorithmo integrarum, tam simplicium, quàm compositarum magnitudinum, nunc reliquum est, vt breuiter de fractionibus loquamur.

Fractarum magnitudinum Notatio, ac Valor.

Magnitudines fractæ, quæ dicantur.

MAgnitudines fractæ dicuntur illę, quæ vnitate sunt minores. Ipsius autem fractionis notatio, est recta eius scriptio, ac pronunciatio. Fit autem interposita virgula inter numeratorem, atque denominatorem. Numerator est magnitudo, supra virgulam existenr.

Numerator fractionis quid. Denominator item quid sit.

Denominator autem infra. Numerator est illa superior magnitudo ita dicta, quod significet, seu numeret acceptas partes in quas totum esse diuisum intelligitur.

Denominator est magnitudo quidem inferior denominans integrum diuisum in totidem æquales partes.

Tradita doctrina numeris explicatur.

Hæc autem numeris absolutis facilè possunt explicari. Supponamus igitur fractionem $\frac{2}{3}$, hæc planè significat duas tertias partes vnius integri; huius autem fractionis denominator est 3, significans integrum in tres æquales partes fuisse diuisum. Numerator autem est 2, significans ex illis partibus tribus duas acceptas fuisse.

Eadem speciebus quomodo tractada sint.

Sit fractio $\frac{af}{r}$, numerator est a f, denominator est r. Sit fractio $\frac{dr+bf}{r+f}$, cuius numerator est d r † b f, denominator autem r † f. Cæterùm animaduertendum est in fractionibus applicationis legem seruari, vt altiores nimirum depressioribus applicentur; atq; adeo si sit a, longitudo, eique applicetur planum, scilicet b pl. fiet fractio $\frac{b\,pl.}{a}$. Longitudo autem longitudini nequit applicari. Sed hac de re nos inferius agemus. Omnes autem demonstrationes, quæ de fractionibus confici solent, hìc in medium adducere superuacaneum duximus, cùm illæ, quæ sunt numeris explicatæ speciebus etiam accomodari possint. Fractionum istarum operationes persimiles sunt ijs, quæ in numeris fieri solent. Ipsas autem hìc breuiter cùm suis demonstrationibus afferemus, initium ducentes ab Additione.

Demonstrationes omittuntur, cum eædem, quæ in numeris adhibentur speciebus aptari queunt.

Quædam primò aduertuntur circa quantitatum fractiones.

Nonnulla adnotanda.

IN gratiam dicendorum illud oportet aduertere, nimirum quod superefficit multiplicatio, illud idem à diuisione, applicationeque resolui. Dum in applicatione magnitudo, tam altior, quàm depressior ducitur in eandem magnitudinem, eo magnitudinis opere ex applicatione ortiuæ, generi, vel valori nihil additur, vel detrahitur,

tur, quoniam quod superefficit multiplicatio illud idem diuisio resoluit, quamobrem $\frac{ab}{b}$, idem est quod a; & $\frac{aab}{b}$, idem est ac a pl. si enim b, ducatur in a, fiet a b, at verò si a b, diuidatur per b fiet $\frac{ab}{b}$; idem est autem $\frac{ab}{b}$, ac est a &c.

Animaduertendum est autem per fractionem quamcunque designari perpetuò diuisionem aliquam esse faciendam, nimirum quantitatum illarum, quæ numeratoris vice funguntur per quantitates videlicet, quæ tanquam denominatores se habent; quo fit, vt si numerator fuerit denominatori æqualis, tunc per fractionem illam vnitas designetur. Ita quidem sit $\frac{aa}{aa}$, per hanc fractionem vnitas designabitur, quemadmodum si foret $\frac{bb}{bb}$. Item $\frac{ab+bb}{ab+bb}$. Vel etiam $\frac{aa+ab}{aa+ab}$. Sæpe sæpius euenit, vt exempligratia a^2, vel a b, item $a^2 + b^2$, vel $a^2 - b^2$ &c. in formam fractionis designare debeamus. *Notanda quædam.*

Tunc non aliud agendum est, quàm symbolum vnitatis subscribere hunc in modum $\frac{aa}{1}$ $\frac{ab}{1}$ $\frac{aa+bb}{1}$ $\frac{aa-bb}{1}$ &c. Quoniam vero non raro contingit, vt quantitas aliqua, puta a, in fractionis formam designari debeat, cuius denominator sit præscripta quantitas, verbigratia b; tunc oportet multiplicare a, per b, vt producatur a b, cui subscribatur b, vt $\frac{ab}{b}$. Idem est enim $\frac{ab}{b}$, ac est a. Ita quoque si deberet a designari in fractionis formam, cuius denominator sit a + b; multiplicetur a + b, per a, vt fiat a^2 + a b; cui subscribatur a + b; idem enim erit $\frac{aa+ab}{a+b}$, ac est a. Non dissimili modo integra quantitas cum fractione ad vnius fractionis formam redigitur; Vt si sit a + $\frac{aa}{b}$; & oporteat huic æquiualentem fractionem vnam exhibere; multiplicetur a, per b, nempe integra quantitas per denaminatorem fractionis, & producetur a b, addatur per symbolum additionis +, ipsi numeratori vt fiat numerator integer a b + a^2, vnde fiat $\frac{ab+aa}{b}$, seu quod idem est $\frac{aa+ab}{b}$, & hæc fractio æquabitur a † $\frac{aa}{b}$. Ita quoq; sit fractio $\frac{aa}{b-c}$ — a. Hæc ad vnius fractionis formam redacta sic se habebit nimirum $\frac{aa-ab+ac}{b-c}$. Hæc autem a + d — $\frac{aa+bb}{g}$, ad hanc reuocabitur nempe $\frac{ag+dg-aa+bb}{g}$. Hæc verò a + b + $\frac{aa+bb}{a-b}$, ad hanc reuocabitur $\frac{2aa}{a-b}$. Et hæc a + b + $\frac{aa-bb}{a+b}$, ad hanc redigetur $\frac{aa+ab+ab+bb+aa-bb}{a+b}$, hoc est $\frac{2aa+2ab}{a+b}$. *Quando aliqua quantitas integra in fractionis formã proponi debeat.* *Quando est integra quantitas cum fractione, & ad formam fractionis reuocari debeat quid agendum,*

Illud autem non est silentio prætereundum, quòd si habeatur fractio $\frac{aa}{bb}$, productum esse a^2, si nimirum $\frac{aa}{bb}$, multiplicetur per b^2, de his tamen inferiùs tractantes de multiplicatione. Ex dictis autem facilè constat quod principaliter erat intentum. *Quod est inprimis aduertendum.*

Fractionum Reductio ad Simpliciores.

HÆc Operatio hunc in modum perficitur. Sit fractio $\frac{aab}{bd}$, quam ad simpliciorem formam oporteat reuocare. Elidatur communis littera b, tàm in numeratore, quàm in denominatore existens, & fiet $\frac{aa}{d}$. Ita etiam si abbreuiari debeat hæc fractio $\frac{abb}{abd}$, elidantur literæ a, b, hoc est de medio auferatur a b, diuidendo nimirum a b^2, & a b d, per a b, & fiet $\frac{bb}{d}$. Non dissimili modo, vt abbreuiemus $\frac{aab-aad}{bd-dd}$, procedendum est; diuidatur a^2 b, per b d, & orietur $\frac{aa}{d}$; ad hanc igitur superior est reuocata quod plane constat opere multiplicationis; si enim $\frac{aa}{d}$, multiplicemus per b d — d^2, producetur a^2 b — a^2 d. *Qua arte hæc operatio perficiatur.*

Si sit fractio $\frac{aab-aad-bff+dff}{bd-dd}$, reducetur ad hanc $\frac{aa-ff}{d}$. Si enim diuidatur a^2 b, per b d, proueniet $\frac{aa}{d}$, quo ducto in b d — d^2, orietur a^2 b — a^2 d. Deinde si diuidatur — b f^2, per b d, orietur $\frac{ff}{d}$, hoc enim si ducatur in b d — d^2, orietur — b f^2 + d f^2. *Exemplum ad id illustrãdum.*

Data sit fractio $\frac{aab-aad-abd+ad^2}{bd-dd}$, reuocanda ad simpliciorem, & ad hanc redigetur videlicet $\frac{aa}{d}$ — a; seu quod idem est ad hanc $\frac{aa-ad}{d}$. Etenim a^2 b — a^2 d, si diuidatur per b d — d^2, fit $\frac{aa}{d}$, & præterea si diuidatur — a b d + a d^2, per b d — d^2, fiet — a, quod multiplicatione comprobabitur; si enim b d — d^2, multiplicetur per $\frac{aa}{d}$, fiet a^2 b — a^2 d; si verò multiplicetur — a, per b d — d^2, fiet — a *Exemplum alterum.*

$bd - ad^2$. Rursus proposita sit fractio $\frac{a^2 f - a^2 b - b d f + b^2 d}{b f - b^2}$, ad simpliciorem reducenda, & quidem ad hanc reuocabitur $\frac{a^2}{b} - d$. Si enim diuidatur $a^2 f - a^2 b$, per $b f - b^2$, fiet quotiens $\frac{a^2}{b}$, si verò diuidatur $- b d f + b^2 d$, per eundem diuisorem fiet quotiens $- d$, quod opere multiplicationis planè confirmabitur. Si proponatur fractio $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, reducetur ad hanc $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$. Quandoquidem si diuidatur $a^3 - b^3$, per $a^2 - b^2$, prouenict $a b^2 - b^3$. Deinde ipse diuisor $a^2 - b^2$, diuidatur per $a b^2 - b^3$, quod nimirum ex diuisione supererat, & fiet quotiens $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$; ex qua diuisione nihil superest. Diuidatur igitur $a^3 - b^3$, & præterea $a^2 - b^2$, per $a b^2 - b^3$; & priori quidem illo diuiso, fiet primo $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$, pro numeratore; secundo fiet $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$; instituta porro multiplicatione per b^2, fractio illa $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, ad hanc reuocata erit $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$.

Comprobatio supradictorũ. Cæterùm si multiplicetur $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$, per b^2, tanquam numerator producetur quidem $a^2 + a b + b^2$. Et insuper si multiplicetur $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, per idem b^2, producetur $a + b$; quod facile constat; nam primo si $\frac{a^2}{b^2}$, ducatur in b^2, fit productum a^2; Deinde si per idem ducatur $\frac{a}{b}$, fiet $\frac{a b^2}{b}$. Hoc est $a b$, ex +, autem in +, fit +. Si demum multiplicetur + 1, per + b^2, fit b^2, quamobrem productum erit $a^2 + a b + b^2$, & quidem numerator.

Exemplum. Deinde si multiplicetur $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, per idem b^2 fiet $a + b$, pro denominatore.

Sit proposita fractio $\frac{a^3 - a b^2}{a^2 + 2 a b + b^2}$. Diuidatur $a^3 - a b^2$, per $a^2 + 2 a b + b^2$; & quidem si instituatur diuisio, fiet quotiens a; Sed hoc neglecto curandum est de reliquo, nimirum $- 2 a^2 b - 2 a b^2$, per quod diuidatur $a^2 + 2 a b + b^2$, & fiet quotiens $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$, quod facile constabit si nos multiplicemus $- 2 a^2 b - 2 a b^2$, per $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$; reperiemus enim produci $a^2 + 2 a b + b^2$. Nihil autem ex hac superest diuisione. Diuidatur numerator $a^3 - a b^2$; atque denominator $a^2 + 2 a b + b^2$, per $- 2 a^2 b - a b^2$, & fiet $- \frac{a}{2b} + \frac{1}{2}$, numerator; erit autem $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$, denominator; quod si vtrunque multiplicemus per $2 a b$, fiet $\frac{- a^2 + a b}{- a - b}$, seu $\frac{a^2 - a b}{a + b}$. Cæterum si diuidatur id quod supra dicebamus $a^2 + 2 a b + b^2$, per $- 2 a^2 b - a b^2$, constat fieri $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$, quandoquidem hoc, nimirum $- \frac{1}{2b} - \frac{1}{2a}$, eueniet, si membrum vtrunq; diuidatur iuxta Artis præcepta; namq; dum diuidimus $+ a^2$, per $- 2 a^2 b$, fiet quotiens $- \frac{1}{2b}$ vt infra. Ad aliam diuisionem quod attinet. Si nos diuidamus $+ a^2$, per $- 2 a^2 b$, fit quotiens $- \frac{1}{2b}$, si multiplicetur enim $- 2 a^2 b$, per $- \frac{1}{2b}$, fiet productum $+ a^2$. Deinde si diuidatur $- a b^2$, per $- 2 a b^2$, fit quotiens $+ \frac{1}{2}$; Si enim multiplicemus $\frac{1}{2}$ per $- 2 a b^2$, fiet $- a b^2$, & ita de alia diuisione silicet ipsius $a^2 + 2 a b + b^2$, per $- 2 a^2 b - a b^2$; Si enim diuidamus $+ a^2$, per $- 2 a^2 b$, fiet quotiens $\frac{1}{2b}$, ex horum enim multiplicatione, fit $+ a^2$, mox autem $+ b^2$, si diuidatur per $- 2 a b^2$, fiet $- \frac{1}{2a}$.

$a^3 - a b^2$
$a^2 + 2 a^2 b + b^2$
————————
$- 2 a^2 b - 2 a b^2$
————————
$a^2 + 2 a b + b^2$
a
————————
$a^3 + 2 a^2 b + a b^2$

Superiora explicantur. Ita etiam de superiori illo exemplo loquentes dum contenderemus abbreuiare $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, & dicebamus ad hanc reuocari $\frac{a^2 + a b + b^2}{a + b}$, idque facile declarabitur, & comprobabitur. Si enim $a^3 - b^3$, diuidatur per $a^2 - b^2$, remanebit ex diuisione, hoc nimirum $a b^2 - b^3$. Si hoc autem residuo, vtamur tanquam diuisore ad diuidendum $a^2 - b^2$, fiet quotiens $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, & diuisio nihil relinquiet. Diuidatur $a^3 - b^3$,

& insuper $a^3 - b^3$, per $a b^2 - b^3$, & quidem si $a^3 - b^3$, diuidatur per $a b^2 - b^3$, fiet $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$, idque plane constat ex opere multiplicationis; si enim multiplicemus $a b^2 - b^3$, per $\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$, comperiemus produci $a^3 - b^3$. Deinde si diuidatur $a^2 - b^2$, per idem $a b^2 - b^3$, reperiemus pro quotiente $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, id, quod constat ex eo, quia si multiplicemus $a b^2 - b^3$, per $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, reperiemus produci $a^2 - b^2$. Ita etiam si diuidatur $a^2 - b^2$, per $a b^2 - b^3$, comperiemus quotientem fieri $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$. Si enim multiplicemus $\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$, per $a b^2 - b^3$, producetur $a^2 - b^2$; id autem euidententer constabit ex adiuncto paradigmate.

Hæc autem magnopere sunt aduertenda.

$a^3 - b^3$
$a^2 - b^2$
a
———
$a^3 - a b^2$
$a^3 - b^3 + 0$
$a^3 - a b^2$
———
$0 \; a b^2 - b^3$
———
$a^3 - b^3$
$a b^2 - b^3$
———
$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} + 1$
$a b^2 - b^3$
———
$-\frac{a^2 b^3}{b^2} - \frac{a b^3}{b} - b^3$
$\frac{a^2 b^2}{b^2} + \frac{a^2 b^2}{b} + a b^2$
———
$a^3 - b^3$

$\frac{a}{b^2} + \frac{1}{b}$
$a b^2 - b^3$
———
$-\frac{a b^3}{b^2} - \frac{b^3}{b}$
$\frac{a^2 b^2}{b^2} + \frac{a b^2}{b}$
———
$a^2 - b^2$

Deinde quod attinet ad ea, quæ secundo loco circa fractiones adnotauimus $\frac{a^2}{a^2}$, significat 1; ita si sit $\frac{b^2}{b^2}$, idem erit quod 1; & ita de reliquis intelligendum est. Ad reductionem quod attinet, qua nimirum fractiones ad simpliciores reducuntur. Esto fractio $\frac{a^2 b}{b d}$, fiet reductio elidendo b; ac proinde reuocabitur ad hanc $\frac{a^2}{d}$; si verò sit $\frac{a^2 c}{c d}$, reducetur ad hanc $\frac{a^2}{d}$. Si verò sit $\frac{a b^3}{a b d}$, elidendo a, reuocabitur ad $\frac{b^3}{b d}$, & rursus ad $\frac{b^2}{d}$. Vel primò, & simul elidendo a b; diuidendo scilicet a b^3, & a b d, per a b, fiet $\frac{b^2}{d}$. Si proponatur $\frac{a^2 b + a^2 d}{b d + d^2}$, reuocabitur ad hanc $\frac{a^2}{d}$. Fit igitur diuidendo $a^2 b$, per b d; & ita de cæteris. Si namq; proponeretur $\frac{a^2 c + a^2 d}{c d + d^2}$, diuidatur $a^2 c$, per c d, orietur $\frac{a^2}{d}$. Quod si multiplicetur per $c d + d^2$, producetur $a^2 c + a^2 d$; quamobrem illa fractio $\frac{a^2 c + a^2 d}{c d + d^2}$, ad minores terminos reducta erit $\frac{a^2}{d}$. Præterea si proponeretur $\frac{a^2 c - a^2 d - b^2 c + b^2 d}{c d - d^2}$. Diuidatur $a^2 c$, per c d, & proueniet $\frac{a^2}{d}$. Hoc autem si multiplicetur per $c d - d^2$, fiet $a^2 c - a^2 d$; deinde diuidatur $- b^2 c$, per c d, & proueniet $\frac{-b^2}{d}$; hoc autem si multiplicetur per $c d - d^2$, proueniet $- b^2 c + b^2 d$; ac proinde illa fractio erit ad hanc reuocata $\frac{a^2 - b^2}{d}$. Et si proponeretur $\frac{a^2 c d^2 - a^2 d^3 - b^2 c d^2 + b^2 d^3}{c d^2 - d^3}$, reducetur artificio non dissimili ad hanc $a^2 - b^2$.* Insuper si foret proposita fractio $\frac{a^2 c d^2 - a^2 d^3 - b^2 c d^2 + b^2 d^3}{c d^3 - d^4}$, reduceretur ad hanc $\frac{a^2 - b^2}{d}$. Si verò esset $\frac{a^2 c - a^2 d - b^2 c + b^2 d}{c d - d^2}$. Si procedatur iuxta Artis præcepta reducetur ad hanc $\frac{a^2 - b^2}{d}$. Si proponatur $\frac{a^2 c + a^2 d + b^2 c + b^2 d}{c + d}$, reuocaretur ad istam $\frac{a^2 + b^2}{1}$; hoc est ad istud integrum $a^2 + b^2$. Quod si foret $\frac{a^2 c d^2 + a^2 d^3 + b^2 c d^2 + b^2 d^3}{c d^2 + d^3}$, reuocaretur ad istam $a^2 + b^2$; & si præterea esset $\frac{a^2 c^2 d + b^2 c^2 d f - a^2 f^3 - b^2 f^4}{c^2 d - f^3}$, reducaretur ad istam, hoc est $a^2 + b^2 f$.

Hic adnotanda sunt quædam circa superius dicta.

**Si numerator enim diuidatur per d^2, fit quotiens, & numerator noua fractionis $a^2 c - a^2 d - b^2 c + b^2 d$, si diuidatur denominator per idem d^2, fit quotiens & denominator noua fractionis $c - d$, rursus facta vtriusque diuisione per $c - d$, fit $a^2 - b^2$.*

Si proponeretur $\frac{a^3 c - a^3 d - a c d + a d^2}{c d - d^2}$, reduceretur ad hanc $\frac{a^3 - a d}{d}$; seu quod idem est $\frac{a^3}{d} - a$. Præterea si foret $\frac{a^3 - a b^2}{a^2 + 2 a b + b^2}$, reduceretur ad hanc $\frac{a^2 - a b}{a + b}$, idque patet ex dictis alibi. Insuper si foret $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$, reduceretur ad $\frac{a^2 + a b + b^2}{a + b}$. Nec dissimili modo fractio ista $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + a b}$, reuocatur ad hanc $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a}$, quod ex eo euidenter colligitur, quod fra-

Aliud proponitur exemplum.

ctiones

ctiones tunc æquales sunt, cum si fuerint per crucem multiplicatæ, hoc est numerator vnius in denominatorem alterius, & contra, æqualia producunt.

$$\frac{a^4 - b^4}{a^2 + ab} \bowtie \frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a}$$

$$\begin{array}{l} a^4 - b^4 \\ \quad + a \\ \hline a^5 - a b^4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3 \\ a^2 + a b \\ \hline a^4 b - a^3 b^2 + a^2 b^3 - a b^4 \\ a^5 - a^4 b - a^3 b^2 - a^2 b^3 \\ \hline a^5 - a b^4 \end{array}$$

Si foret

$$\frac{a^5 + a^2 b^3 + a^2 b d g + a^3 b^2 g + b^5 g + b^3 d g^2}{a^3 g + b^3 g + d b g^2 - a^3 f - b^3 f - b d f g}$$

Reducetur ad hanc $\frac{a^2 + b^2}{g - f}$, communis autem diuisor est $a^3 + b^3 + b d g$.

Exemplum ad idem ostendendum. Neque dissimili arte fractionem istam $\frac{a^3 - 36a}{a^2 + 12a + 36}$, ad simpliciorem reducemus, nimirum ad hanc $\frac{a^2 - 6a}{a + 6}$. Diuidatur primò $a^3 - 36a$, per $a^2 + 12a + 36$, & fiet quotiens a, vnde post diuisionem superest diuisor, nempe $-12a^2 - 72a$. Deinde diuidatur $a^2 + 12a + 36$, per $-12a^2 - 72a$, fiet quotiens $-\frac{1}{12} - \frac{1}{2a}$; modò cum nihil ex diuisione supersit, diuidatur $a^3 - 36a$, & etiam $a^2 + 12a + 36$, per $-12a^2 - 72a$, prioris autem diuisionis quotiens erit $\frac{-a}{12} + \frac{1}{2}$ pro numeratore; posterioris autem diuisionis quotiens erit $\frac{-1}{12} - \frac{1}{2a}$, pro denominatore;

Diuidatur $a^3 - 36a$
per $-12a^2 - 72a$
Orietur $\frac{-a}{12} + \frac{1}{2}$

Diuidatur $a^2 + 12a + 36$
per $-12a^2 - 72a$
Orietur $-\frac{1}{12} - \frac{1}{2a}$

vtrumque multiplicetur per 12 a, & fiet $\frac{-a^2 + 6a}{-a - 6}$, commutatisque signis fiet $\frac{a^2 - 6a}{a + 6}$.

$$\begin{array}{l} -12a^2 - 72a \\ -\frac{a}{12} + \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{12a^2}{2} - \frac{72a}{2} \\ \frac{12a^3}{12} + \frac{72a^2}{12} \\ \hline a^3 - 36a \text{ productum} \end{array} \qquad \begin{array}{l} -12a^2 - 72a \\ -\frac{1}{12} - \frac{1}{2a} \\ \hline -\frac{12a^2}{2a} + \frac{72a}{2a} \\ \frac{12a^2}{12} - \frac{72a}{12} \\ \hline a^2 + 12a + 36 \text{ productum} \end{array}$$

Exemplum alterum. Præterea si proponeretur fractio ad simpliciorem reuocanda $\frac{a^3 - 25a}{a^2 + 10a + 25}$, eodem artificio ad hanc reduceretur $\frac{a^2 - 5a}{a + 5}$.

Hæc eadem operatio optimè etiam perficitur, inuentis diuisoribus tam numeratoris, quàm denominatoris, quemadmodum fieri solet in minutijs vulgarium numerorum, quamobrem si proponeretur fractio $\frac{a^3 - a b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$, ad hanc facilè reduci poterit $\frac{a^2 - ab}{a + b}$, siquidem $a^3 - a b^2$, numerator scilicet fractionis diuidi potest per $a + b$, & quidem instituta diuisione prosilit in quotiente $a^2 - a b$; Si autem denominator $a^2 + 2 a b + b^2$, diuidatur quemadmodum diuidi potest per $a + b$, fiet quotiens $a + b$; quamobrem fractio illa ad hanc reuocata erit $\frac{a^2 - ab}{a + b}$.

Idem alio illustratur exemplo. Nec dissimili modo proposita hæc fractio $\frac{a^2 b - a^2 d}{b d - d^2}$, reuocabitur ad hanc, scilicet $\frac{a^2}{d}$; quandoquidem si tam $a^2 b - a^2 d$, numerator, quàm $b d - d^2$, denominator diuidatur per communem diuisorem $b - d$, ex diuisione numeratoris orietur quotiens a^2, ex diuisione verò denominatoris proueniet d, quo fit, vt fractio illa ad hanc sit reuocata $\frac{a^2}{d}$.

Proposita

Proposita sit fractio $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, ad hanc reducetur, nempe $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, quandoquidem si $a^3 - b^3$, diuideretur per a † b, fieret quotiens $a^2 - b^2$, eritque numerator fractionis quæsitæ. Si verò diuidatur denominator $a^2 - b^2$, per eundem diuisorem a † b, proueniet quotiens a † b; atque adeo fractio illa proposita reuocabitur ad hanc $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, etiam si eadem superiori methodo ad hanc $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$, reuocata fuerit, sunt autem hæ duæ fractiones $\frac{a^2-b^2}{a-b}$, & $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$, inter se æquales. *Exemplum alterum.*

S C H O L I O N.

QVoniam superiùs dictum fuit fractionem $\frac{a^2b+a^2d}{bd+d^2}$, ad minimos terminos reuocatam, fieri hanc $\frac{a^2}{d}$, non erit abs re si id demonstratione explicemus; quamobrem esto. *Declarantur superiora, & ad id Theorema instituitur.*

T H E O R E M A.

SI fuerit fracta magnitudo $\frac{a^2b+a^2d}{bd+d^2}$, & elidantur b, & d, tam ex numeratore, quàm ex denominatore, vt remaneat fractio $\frac{a^2}{d}$. Dico fractionem ipsam $\frac{a^2}{d}$, superiori fractioni $\frac{a^2b+a^2d}{bd+d^2}$, esse æqualem. *Theorema insigne.*

Quoniam enim elidendo b, & d, ex numeratore nos diuidimus illud per b † d. Idem est enim a^2 b † a^2 d, ac est productum ex b † d, in a^2. Dum itaque eliduntur b, & d, seu quod idem est b † d, diuidimus a^2 b † a^2 d, per b † d. Item elidendo b, & d, ex denominatore, nos diuidimus illud per b † d, idem est enim b d † d^2, ac est productum ex b † d, in d; Si itaque elidatur b † d, diuiditur b d † d^2, per b † d. At verò in quacumque fractione diuisis numeratore, & denominatore per communem diuisorem, fractio prouenienS est priori æqualis; per communem enim illam diuisionem non immutatur proportio numeratoris ad denominatorem, & fractiones æquales sunt, in quibus eadem est proportio numeratoris ad denominatorem. Quare si fuerit fracta magnitudo &c. Quod oportebat ostendere.

Præterea illud etiam oportet aduertere. Quando fuerit data fractio $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, ad hanc reducitur $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Si enim diuidatur $a^3 - b^3$, per $a^2 - b^2$, fiet quotiens a, quo ducto in $a^2 - b^2$, fiet a^3 − a b^2, quo subtracto ex $a^3 - b^3$, remanet † a $b^2 - b^3$, quo tanquam diuisore oportet diuidere $a^2 - b^2$, & fiet quotiens $\frac{a}{b^2}$ ✠ $\frac{1}{b}$. Si enim sit $\frac{a^2-b^2}{ab^2-b^3}$. Diuiso primo membro per a, fiet $\frac{a}{b^2}$; at verò si −, diuidatur per −, fit †; deinde diuiso secundo membro; scilicet $\frac{b^2}{b^3}$, per b^2, fit † $\frac{1}{b}$; quamobrem proueniet quantitas $\frac{a}{b^2}$ ✠ $\frac{1}{b}$, vt dicebamus. *Notandum.*

Præterea dictum superiùs fuit. Si diuidatur $a^3 - b^3$, per a $b^2 - b^3$, fieri quotientem $\frac{a^2}{b^2}$ † $\frac{a}{b}$ † 1; nec immeritò. In huius Veritatis gratiam esto. *Notandum.*

T H E O R E M A.

EAdem est proportio $a^3 - b^3$, ad a $b^2 - b^3$, quæ est $\frac{a^2}{b^2}$ ✠ $\frac{a}{b}$ ✠ 1, ad positam. *Theorema præclarum.*

Præstat autem hæc ad numeros transferre.

Datis

Datis duabus, pluribusue quantitatibus, siuè simplicibus, siue compositis; minimam quantitatem, quæ per ipsas sine reliquo diuidi posit, reperire.

Per multiplicationem decussatim factã, optimè fit reductio fractionum ad eandem denominationem. Breuiorem viam tamen calcare expedit. Exemplum.

ETiam si fractionum reductio ad eandem denominationem optimè perficiatur per multiplicationem in crucem; nihilominus cum plerumque producta quidem expurgatione indigeant; proinde expedit breuiorem viam calcare, qualis est illa, quam in præsentiarum aggredimur. Datæ igitur sint duæ quantitates $a^2 b$, $b d$, & oporteat minimam quantitatem reperire, quæ diuisibilis sit per prædictas sine reliquo; constituantur $a^2 b$, & $b d$, in formam fractionis hoc modo $\frac{a^2 b}{b d}$, hæc autem fractio ad simpliciorem redigatur, nimirum ad $\frac{a^2}{d}$. His autem ita dispositis $\frac{a^2 b}{b d} \times \frac{a^2}{d}$; nunc instituatur multiplicatio per crucem, & eadem quantitas proueniet ex multiplicatione $a^2 b$, per d, atque ex $b d$, per a^2, ex vtraque enim multiplicatione consurgit $a^2 b d$, & hæc erit minima quantitas quæsita, quæ nimirum sine reliquo diuidi potest per $a^2 b$, & $b d$.

Aliud exemplum ad idẽ.

Datæ sint duæ quantitates $a^2 b - a^2 d$, & $b d - d^2$; oporteat autem minimam quantitatem reperire, quæ per quantitates prædictas sine reliquo diuisibilis sit. Disponantur illæ duæ quantitates datæ, vt se habeant per modum fractionis hoc pacto $\frac{a^2 b - a^2 d}{b d - d^2}$, quæ quidem reuocari debet ad simpliciorem, cuiusmodi est $\frac{a^2}{d}$; His autem iuxta se positis hoc modo $\frac{a^2 b - a^2 d}{b d - d^2} \times \frac{a^2}{d}$; multiplicatis igitur decussatim, fiet quantitas quæsita $a^2 b d - a^2 d^2$, minima scilicet, quæ diuidi possit per $a^2 b - a^2 d$, & $b d - d^2$.

Aliud exemplum ad idẽ.

Datæ quoque sint duæ quantitates $a^4 - b^4$, & $a^2 + a b$; oporteat autem minimam quantitatem reperire per quantitates prædictas sine reliquo diuisibilem. Disponantur, vt fractionem constituant $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + a b}$, quæ ad simpliciorem reducetur talem $\frac{a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3}{a}$; facta multiplicatione per crucem proueniet $a^5 - a b^4$; eritq; $a^5 - a b^4$, quantitas quæsita.

Quando contingit alicui us litera variatio quid agendum.

Sic etiam variata aliqua litera procedetur; nihil enim refert, num vna, vel alia adhibeatur litera, dummodo gradus scalares ijdem retineantur. Si igitur foret $a^2 c + a^2 d$, quantitas vna, & alia $c d - d^2$, & indaganda esset quantitas minima diuisibilis procedatur non dissimili modo; forent enim quantitates illæ disponendæ ad modum fractionis hoc pacto $\frac{a^2 c + a^2 d}{c d + d^2}$, quæ ad simpliciorem reuocata erit $\frac{a^2}{d}$; institutaque multiplicatione per crucem proueniet minima quantitas quæsita $a^2 c d + a^2 d^2$. Ita si proponeretur inuestiganda minima quantitas diuisibilis per $a^4 - c^4$, illa siquidem esset $a^5 - a c^4$.

Aliud exemplum cum species numeros afficiunt.

Si verò quæratur minima quantitas diuisibilis per $a^3 - 36 a$, & $a^2 + 12 a + 36$, disponantur ad modum fractionis, vt vides $\frac{a^3 - 36 a}{a^2 + 12 a + 36}$, quæ quidem fractio reuocari debet ad primitiuam iuxta præcepta superiùs tradita, & proueniet $\frac{a^2 - 6 a}{a + 6}$. Deinde instituta multiplicatione per crucem fiet quantitas quæsita $a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a$.

$$\frac{a^3 - 36 a}{a^2 + 12 a + 36} \times \frac{a^2 - 6 a}{a + 6}$$

Ita quoque propositis duabus quantitatibus $a^3 - 25 a$, & $a^2 + 10 a + 25$, quantitas reperietur $a^4 + 5 a^3 - 25 a^2 - 125 a$.

Quando sunt plures duabus.

Quandoq; verò possunt esse plures duabus exempligratia tres; tunc oportet reperire minimam quantitatem diuisibilem per duas ex illis; deinde si hæc inuenta fuerit diuisibilis sine reliquo per tertiam, factum erit quod oportet. Si autem reperiatur minima diuisibilis sine reliquo per hanc inuentam, & illam tertiam. Quia verò non rarò accidit quantitates datas ad simpliciores reduci non posse. Tunc oportet vnam

in

in aliam ducere; productum enim quantitas erit quæsita. Vt si foret $a^2 - ab$, & $a + b$. Disponantur in modum fractionis $\frac{a^2 - ab}{a + b}$, hæc primitiua est, neque reducibilis, ad simpliciorem; multiplicentur inter se, & fiet $a^3 - ab^2$, quantitas quæsita.

Qua Arte fractiones ad eandem denominationem reuocentur.

Vtilissima hæc est operatio qua fractiones ad eandem denominationem reuocantur.

HÆc operatio vtilissima est, eaque facilè ex dictis hactenus constare poterit. Proposite fint fractiones $\frac{b^3 d}{a^2 f}$, & $\frac{a^3}{df}$. Primò quærenda est minima quantitas, quæ diuidi possit per denominatores $a^2 f$, & $d f$; hæc autem erit $a^2 d f$, quæ tamquam communis denominator inseruiet; ad inueniendos autem numeratores diuidatur inuentus denominator $a^2 d f$, per $a^2 f$, & per $d f$, singulos nimirum denominatores datos, & quotientes videlicet d, & a^2, multiplicentur per numeratores $b^3 d$, & a^3, propositarum fractionum vt quæsiti numeratores consurgant $b^3 d^2$, & a^5, erunt igitur fractiones à nobis quæsitæ $\frac{b^3 d^2}{a^2 d f}$, & $\frac{a^5}{a^2 d f}$. Sint fractiones datæ $\frac{b^4}{a^2 f - a^2 d}$, & $\frac{a^3 + b^3}{d f - d^2}$. Oporteat has fractiones ad eandem denominationem reuocare; inueniatur minima quantitas diuisibilis per $a^2 f - a^2 d$, & $d f - d^2$, quæ quidem quantitas erit $a^2 d f - a^2 d^2$, deinde diuidatur $a^2 d f - a^2 d^2$, per $a^2 f - a^2 d$, & $d f - d^2$; quotientes autem d, & a^2, multiplicentur per numeratores b^4, & $a^3 + b^3$, fient autem fractiones $\frac{b^4 d}{a^2 d f - a^2 d^2}$, & $\frac{a^5 + a^2 b^3}{a^2 d f - a^2 d^2}$. Quæ vt melius percipiantur adhibitis ijsdem præceptis aliqua mutata specie idem persequemur. Proponatur fractiones $\frac{b^3 d}{a^2 c}$, & $\frac{a^3}{c d}$, quas oporteat ad eandem denominationem reuocare. Inuenta quantitate minima diuisibili quidem per $a^2 c d$, & hæc eadem erit communis denominator. Deinde diuidatur hic denominator $a^2 c d$, per $a^2 c$, & $c d$, quotientes autem d, & a^2, ducantur in numeratores illarum fractionum, nempe $b^3 d$, & a^3, vt habeantur numeratores $b^3 d^2$, & a^5; eruntque fractiones quæsitæ $\frac{b^3 d^2}{a^2 c d}$, & $\frac{a^5}{a^2 c d}$. Præterea oporteat reducere $\frac{b^4}{a^2 c - a^2 d}$, & $\frac{a^3 + b^3}{c d - d^2}$, ad eandem denominationem. Reperiatur communis denominator iuxta regulas præscriptas, erit $a^2 c d - a^2 d^2$; quandoquidem si duæ quantitates $a^2 c - a^2 d$, & $c d - d^2$, disponantur in modum fractionis, fiet $\frac{a^2 c - a^2 d}{c d - d^2}$, quæ quidem fractio ad simpliciorem hanc $\frac{a^2}{d}$ redigetur, tum verò multiplicatione instituta per crucem comparabitur $a^2 c d - a^2 d^2$, tamquam minima quantitas diuisibilis per $a^2 c - a^2 d$, & $c d - d^2$, sine reliquo eritque communis denominator. Hæc igitur quantitas $a^2 c d - a^2 d^2$, diuidatur per $a^2 c - a^2 d$, & $c d - d^2$. Ex priori diuisione oritur quantitas d, ex posteriori verò a^2; modò multiplicetur b^4, numerator fractionis $\frac{b^4}{a^2 c - a^2 d}$, per d, & a^2, multiplicetur per $a^3 + b^3$, numeratorem fractionis illius $\frac{a^3 + b^3}{c d - d^2}$, & his multiplicationibus peractis eodem denominatore retento habebimus fractiones $\frac{b^4 d}{a^2 c d - a^2 d^2}$, & $\frac{a^5 + a^2 b^3}{a^2 c d - a^2 d^2}$, eiusdem denominationis, ad quas fractiones, illas redigere contendebamus.

Quando fractiones sunt plures duabus qua methodo procedendum.

Quod si fractiones fuerint plures duabus non dissimili modo procedetur.

Si propositæ forent fractiones $\frac{216}{a^3 - 36 a}$, & $\frac{a - 36}{a^2 + 12 a + 36}$, quas ad eandem denominationem redigere velimus. Disponantur $a^3 - 36 a$, & $a^2 + 12 a + 36$, ad modum fractionis; vt nimirum fractio ista $\frac{a^3 - 36 a}{a^2 + 12 a + 36}$, reuocetur ad simpliciorem ac primitiuam suam $\frac{a^2 - 6 a}{a + 6}$, institutaque multiplicatione per crucem, comperiemus minimam quantitatem diuisibilem per illas sine reliquo esse $a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a$; atque communis denominator, qui diuidatur per $a^3 - 36 a$, & $a^2 + 12 a + 36$, & quotientes ex diuisione orti, nempe $a - 6$, & $a^2 - 6 a$, multiplicentur per numeratores propositarum fractionum, & fient $216 a + 1296$, & $a^3 - 36 a^2 + 216 a$, eruntque numeratores, eodemque denominatore retento; nempe $a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a$, erunt fractiones istæ $\frac{216 a + 1296}{a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a}$, & $\frac{a^3 - 42 a^2 + 216 a}{a^4 + 6 a^3 - 36 a^2 - 216 a}$.

Nec dissimiliter fractiones istas $\frac{125}{a^3 - 25 a}$, & $\frac{a - 25}{a^2 + 10 a + 25}$, ad has eiusdem denominationis reuocabimus $\frac{125 a + 625}{a^4 + 5 a^3 - 25 a^2 - 125 a}$, & $\frac{a^3 - 30 a^2 + 125 a}{a^4 + 5 a^3 - 25 a^2 - 125 a}$.

Additio

Additio Fractarum Magnitudinum.

OPERATIO PRIMA.

Fractarum magnitudinum additio fit non secus ac in minutijs vulgaribus.

HÆc fractarum magnitudinum additio non secus fit, ac in minutijs vulgarium numerorum. Oportet igitur distinguere; vel enim sunt fractiones denominationis eiusdem, vel diuersæ;

Quando fractiones sunt eiusdem denominationis.

Quando fractiones eiusdem denominationis extiterint; oportet earum numeratores addere, summæque collectæ communem denominatorem subscribere. Oporteat $\frac{a^3}{d}$, addere ad $\frac{b^3}{d}$, summa fractionum istarum erit $\frac{a^3+b^3}{d}$, & ita de consimilibus. Quamobrem si fuerit $\frac{a^3 b}{b+d}$, addenda ad $\frac{a^3 d}{b+d}$, fiet summa $\frac{a^3 b + a^3 d}{b+d}$, seu quod idem est a^3, & ita in consimilibus. Vt si $\frac{a^3 d}{d+f}$, oporteret addere ad $\frac{a^3 f}{d+f}$, fieret summa $\frac{a^3 d + a^3 f}{d+f}$, seu quod idem est a^3. Oporteat $\frac{b^3 + d a^2}{d+f}$, addere ad $\frac{d^3+g^3}{d+f}$, fiet summa $\frac{b^3 + d a^2 + d^3 + g^3}{d+f}$.

Quando fractiones sunt denominationis diuersæ.

Si verò essent fractiones huiusmodi $\frac{bd}{b+d}$, d † $\frac{b^2}{b+d}$; g — $\frac{d^2}{b+d}$, fieret summa g ✠ $\frac{2bd+b^2}{b+d}$, cui si deberet addi a ✠ $\frac{a^2}{b+d}$, fieret summa a † g † $\frac{2bd+a^2}{b+d}$.

Si verò fractiones diuersæ denominationis fuerint oportet primò illas ex præceptis iam traditis ad eandem denominationem reducere, quo facto procedendum erit, vt paulò antea dictum fuit. Si igitur ad $\frac{a\,pl.}{b}$, addere deberemus $\frac{b^2}{d}$, fieret summa $\frac{a\,pl.\,d + b^3}{bd}$. Secundò si a d $\frac{a\,pl.}{b}$, addere oporteret $\frac{a^2}{g}$, fieret summa $\frac{a\,pl.\,g + a^2 b}{bg}$. Præterea si $\frac{b^2}{d}$, addere oporteret ad $\frac{a\,pl.}{b}$, fieret summa $\frac{a\,pl.\,d + b^3}{bd}$. Insuper si addere deberemus ad $\frac{a^5}{a^4}$; $\frac{a^5 - a^4 b}{a^4 + a^3 b}$; $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + a^3 b^2}$; ac demum $\frac{a^3 + a b + b^3}{a + b}$, fiet summa $\frac{4a - 3ab + 2b^5 b^2 - 3a^2 b^5 + a^5 b^4 - 2a^3 b^5 + b^7}{a^6 + a^3 b^4}$.

Ad maiorem intelligentiam, quædam hic asseruntur.

Quæ vt melius intelligantur. Supponamus fractionem $\frac{a^2}{2}$, addendum alteri $\frac{b^2}{2}$, fiet summa $\frac{a^2+b^2}{2}$. Et si sit $\frac{a^2}{b}$, & addi debeat ad $\frac{c^2}{b}$, fiet summa $\frac{a^2+c^2}{b}$. Si verò fuerit $\frac{2ab}{b+c}$, addenda quidem huic $\frac{2ac}{b+c}$, fiet 2 a b † 2 a c, seu 2 a, & ita de consimilibps.

Quando fractiones denominationis diuersæ.

Quod si fractiones fuerint denominationis diuersæ procedendum vt supra dictum fuit. Quamobrem si forent fractiones addendæ $\frac{b^3 d}{a^2 c}$, & $\frac{a^2}{cd}$. Primò quærenda est quantitas diuisibilis per denominatores a^2 c, & c d, ea verò esset a^2 c d, tamquam communis denominator; deinde indagentur numeratores vt supra docuimus, & euadent illæ fractiones addendæ $\frac{b^3 d^2}{a^2 cd}$, & $\frac{a^5}{a^2 cd}$, harum autem fractionum summa erit $\frac{b^3 d^2 + a^5}{a^2 cd}$. Ita quoque si forent fractiones addendæ $\frac{b^4}{a^2 c}$ — a^2 d, & $\frac{a^3 + b^3}{cd - d^2}$, fieret summa $\frac{b^4 d + a c + a^2 b^3}{a^2 cd}$ — a^2 d^2. Item ad addendum $\frac{a^5}{a^4 - b^4}$; $\frac{a^5 - a^4 b}{a^3 + a^4 b}$; $\frac{a^5 - b^5}{a^4 + a^3 b^3}$; & $\frac{a^3 + 2b + d^3}{b + b}$, proueniet summa quidem $\frac{4a^7 - 2a^6 b + 2a^4 b^3 - 3a^4 b^5 + a^3 b^4 - 2a^3 b^5 + b^7}{a^6 + a^3 b^4}$. Præterea si addere oporteat $\frac{125}{a^3 - 25a}$, ad $\frac{a - 25}{a^3 + 10a + 25}$, proueniet $\frac{a^3 - 10a^3 + 21a + 625}{a^4 + 5a^3 - 25a^2 - 125a^4}$.

Demonstratio additionis.

Demonstratio sic se habet.

Sunto fractiones A B, C D, ducatur autem B, quidem in C, vt fiat E. Deinde multiplicetur D, per A, vt fiat F, mox autem in vnam summam colligantur G, & multiplicetur B, per D, vt fiat H; ita vt eueniat summa G H. Quoniam ergo B, multiplicans singulas quantitates C, D, facit singulas E, H; erit vt C, ad D; ita E, ad H, &c.

Rursus quoniam D, multiplicans singulas quantitates A, B, facit singulas F, H; erit

A	a pl.		C	z^2
B	b		D	g
E	b z^2		F	a pl. g
H	b g		H	b g
	G	a pl. g † b z^2		
	H	b g		

sicut

ſicut A, ad B, ita F, ad H, quare quantitas E H, æqualis erit quantitati C D, & F H, æqualis erit ipſi A B. At verò vt E, ad H, ſic eſt E H, ad poſitam quantitatem, & vt F, ad H, ita F H, ad poſitam, erit igitur vt aggregatum ex E, & F, ad H, hoc eſt G, ad H, ita aggregatum ex ipſis F H, E H, hoc eſt ex A B, C D, ad poſitam; ergo G H, fractionum A B, C D, aggregatum ſignificabit; atque adeo ſamma erit quæſita. Hoc idem aliter demonſtrabimus infrà.

Subtractio Fractarum Magnitudinum.

OPERATIO SECVNDA.

Fractiones sũt in duplici differentia. Quædam ſunt eiuſdem quædam diuerſæ denominationis. Quando ſunt eiuſdem denominationis, qua arte ſit inſtituenda ſubtractio. Exempla.

FRactiones ſunt in duplici differentia, quemadmodum de earum additione tractantes dicebamus; Vel enim ſunt denominationis eiuſdem, vel diuerſæ. Si primo modo ſe habeant numeratorum inſtituatur ſunbtractio, atque reliquo communis denominator ſubſcribatur. Vt ſit iniunctum a b $\frac{a^2}{d}$, ſubtrahere $\frac{b^2}{d}$, fiet reſiduum $\frac{a^2-b^2}{d}$. Ita quoque ſi ab $\frac{a^2 b}{d-b}$, oporteat ſubtrahere $\frac{a^2 b}{b-d}$, fiet reliquum $\frac{a^2 b - a^2 d}{b-d}$, ſeu quod idem eſt a^2. Nec diſſimili modo ſi abs $\frac{b^2}{b+d}$, ſubtrahere deberemus $\frac{bd}{b+d}$, reliquum fieret $\frac{b^2-bd}{b+d}$. Quod ſi eſſet ex $d + \frac{b^2}{b+d}$, ſubtrahendum $\frac{bd}{b+d}$, remaneret $\frac{d^2+b^2}{b+d}$. Si enim multiplicemus d, per $b + d$, fiet $bd + d^2$; ob id euadet fractio $\frac{bd+d^2+b^2}{b+d}$, à qua ſi ſubtraxeris $\frac{bd}{b+d}$, remanebit $\frac{d^2+b^2}{b+d}$. Ita etiam ſi ex $\frac{3ab}{b-c}$, oporteat ſubtrahere $\frac{3ac}{b-c}$, fiet reſiduum $\frac{3ab-3ac}{b-c}$; Si verò eſſet ex $\frac{2ab}{b-c}$, ſubtrahenda fractio $\frac{2ac}{b-c}$, fiet reſiduum 2 a. Ità pariter ſi ſubducere debeamus $\frac{ce}{b+d}$, ex $b + \frac{d^2}{b+d}$, fiet reſiduum $\frac{b^2+bd+d^2-ce}{b+d}$. Et ſi foret $c + \frac{d^2}{c+d}$, & ex hac ſubtrahere oporteat $\frac{cd}{c+d} - a$ remanebit $\frac{c^2+d^2+ac+ad}{c+d}$, Oportet enim fractionem illam integro adiuncto, nempe $c + \frac{d^2}{c+d}$, reuocare ad hanc $\frac{c^2+cd+d^2}{c+d}$, & illam $\frac{cd}{c+d} - a$, ad hanc $\frac{cd-ac-ad}{c+d}$, ſubtractoque numeratore $cd - ac - ad$, ex numeratore $e^2 + cd + d^2$, & remanebit $c^2 + d^2 + ac + ad$, cui ſubſcripto denominatore $c + d$, fiet fractio, vt ſupra.

Quando ſunt denominationis diuerſæ.

Si verò fuerint denominatiouis diuerſæ. Oportet illas ad eandem denominationem reuocare, vt ſuperiùs agentes de fractionum additione dicebamus. Si fuerint fractiones propoſitæ $\frac{a^2}{b}$, & $\frac{a^2}{g}$, & hanc ex illa ſit iniunctum ſubducere, fiet reſiduum $\frac{a^2 g - b a^2}{bg}$; Præterea ſi ex $\frac{a^2}{b}$, oporteat ſubtrahere z, remanebit $\frac{a^2-bz}{b}$. Sit ſubtrahendum $\frac{a^2+ab}{a+b}$, ex a, reuocetur a, ad eandem denominationem, vt fiat $\frac{a^2+ab}{a+b}$, & ex hac ſubtrahatur $\frac{a^2+ab}{a+b}$, & remanebit nihil. Si verò illa fractio, quæ ſubtrahi deberet ex a fuiſſet $\frac{a^2-ab}{a+b}$, iterum reuocato a, ad illam denominationem, ita vt denominator ſit $a + b$, ſubtractione inſtituta fiet reſidua fractio $\frac{2ab}{a+b}$. Quod ſi foret $\frac{bd}{a^2 c - a^2 d}$, quam oporteat ſubtrahere ex $\frac{a^2+b^2}{cd-d^2}$, reuocabimus illas ad eandem denominationem iuxta præcepta ſuperius tradita, ex quibus conſtat denominatorem eſſe $a^2 cd - a^2 d^2$; adeo vt fractiones illæ ad iſtas redactæ ſint $\frac{bd^2}{a^2 cd - a^2 d^2}$, & $\frac{a^4 + a^2 b^2}{a^2 cd - a^2 d^2}$, inſtituatur verò ſubtractio, & fiet reſiduum $\frac{a^4 + a^2 b^2 - bd^2}{a^2 cd - a^2 d^2}$ &c.

Exempla.

Deinde ſi propoſitæ eſſent fractiones $\frac{125}{a^3 - 25a}$, & $\frac{a-25}{a^2+10a+25}$, fiet reſiduum $\frac{a^3 - 30a^2 - 625}{a^4 + 5a^3 - 25a^2 - 125a}$, id autem hunc in modum perficitur. Reperiatur communis denominator, puta minima quantitas, quæ per $a^2 + 10a + 25$; & $a^3 - 25a$, diuidi poſſit; ea verò eſt $a^4 + 5a^3 - 125a$, quæ ſi diuidatur per $a^3 - 25a$, fit quotiens $a + 5$, at ſi diuidatur per $a^2 + 10a + 25$, fiet quotiens $a^2 - 5a$, ductis his in numeratores, nempe $a + 5$, in 125, fit $125a + 625$, & $a - 25$, in $a^2 - 5a$, fiet $a^3 - 30a^2 + 125a$, vnde fractiones huiuſmodi prouenient $\frac{125a - 625}{a^4 + 5a^3 - 25a^2 - 125a}$, & $\frac{a^3 - 30a^2 + 125a}{a^4 + 5a^3 - 25a^2 - 125a}$, atque hunc in modum fractiones illæ redactæ ſunt ad eandem denominationem; prædictarum autem fractionum differentia eſt $\frac{a^3 - 30a^2 - 625}{a^4 + 5a^3 - 25a^2 - 125a}$.

Cùm ex integro ſubtrahi debet fractio, quid agendũ.

Quando ex integro ſubtrahi debet fractio, vel contra integrum reuocetur ad fractionem eiuſdem denominationis, & abſoluitur operatio, vt ſupra; quare ex a ſubtracto $\frac{a^2-2ab}{a+b}$, remanet $\frac{3ab}{a+b}$, vt infra quoque dicetur.

Demonſtra-

Demonstratio subtractionis fractionum, diuersæ denominationis.

Demonstratio subtractionis fractionum diuersæ denominationis, cum fiat per multiplicationem in crucem sic se habet.

Sunto fractiones A B, C D, hæc quidem subtrahenda, & illa sit à qua fieri debet subtractio. Ducatur A, in D, vt fiat E, deinde multiplicetur E, per C, vt fiat F, subtrahatur F, ex E, vt remaneat G, multiplicetur deinde B, per D, vt fiat H. Dico G H, fractionem esse reliquam subtracta C D, ex A B.

A $\frac{\text{a pl.}}{\text{b}}$ B — C $\frac{\text{z quad}}{\text{g}}$ D

E $\frac{\text{a pl. g}}{\text{b g}}$ H — F $\frac{\text{b z quad}}{\text{b g}}$ H

G $\frac{\text{a pl. g} - \text{b z quad}}{\text{b g}}$ H

Quoniam B, multiplicans singulas C, D, facit singulas F, H, erit vt C, ad D, ita F, ad H; Insuper quoniam D, multiplicans singulas A, B, facit singulas E, H, erit vt A, ad B, ita E, ad H; Quamobrem E H, æqualis erit ipsi A B, & F H, ipsi C D, & quoniam fractiones E H, F H, eundum habent denominatorem H, proinde erunt inter se, vt numeratores E, F. Quoniam igitur E H, F H, eundem habent denominatorem H, erit vt E, ad F, ita E H, ad F H; ergo diuidendo erit, vt E, minus F, ad F, ita E H, minus F H, ad F H, & quia fractiones F H, sunt eiusdem denominationis, erit vt F, ad G, ita F H, ad G H, quare ex æquo erit vt E, minus F, ad G, ita E H, minus F H, ad G H; At verò E, minus F, ad G, habet proportionem æqualitatis, subtracto enim F, ex E, remanet G, ergo E H, minus F H, ad G H, æqualitatis proportionem habebit; est autem E H, minus F H, differentia inter E H, & F H, proinde G H, erit differentia supradictarum fractionum E H, F H, sed hæ sunt ostensæ æquales A B, C D, ergo G H, erit differentia prædictarum fractionum A B, C D. Quod oportebat ostendere.

Alia instituitur demõstratio, & primò cùm fractiones sunt eiusdem denominationis.

Vel sic, & primò fractiones eiusdem sint denominationis,

A $\frac{}{}$ B — C $\frac{}{}$ B — D $\frac{}{}$ B

Sint fractiones A B, C B, & ex A B, subtrahenda sit C B. Detracto prius C, numeratore minoris fractionis, ex A, numeratore maioris, fiat reliquum D, cui idem denominator B, supponatur. Dico facta subtractione iam dicta residuum esse C D. Quoniam enim C, subtracto ex A, remanet D, componetur A, ex C, & D. Fractio igitur A B, cuius numerator A, ex numeratoribus C D, colectus est summa quidem est duarum fractionum C B, D B, vt constat ex elementis. Detracta igitur fractione C B, ex A B, remanet fractio D B.

Quando fuerint denominationis diuersæ. Problema primum.

Quod si fuerint denominationis diuersæ, ita procedendum.

A $\frac{}{}$ B — C $\frac{}{}$ D — G $\frac{}{}$ H — E $\frac{}{}$ F

Sint fractiones A B, C D, quarum denominatores B D, sint diuersi, & minor fractio C D, subtrahenda sit ex maiori A B, ex C, numeratore minoris in B, denominatorem maioris proueniat E, & ex A, denominatore maioris in D, denominatorem minoris proueniat F; subtracto E, ex F, remanet G, cui supponatur denominator H, factus ex mutua multiplicatione denominatorum E, D. Dico fractionem G H, esse residuum proueniens facta subtractione fractionis C D, ex fractione A B. Quandoquidem D, multiplicans A, B, facit F H, erit vt A, ad B, ita F, ad H, vt autem A, ad B, ita est fractio A B, ad integrum, vt constat.

Erit igitur etiam vt F, ad H, ita fractio A B, ad integrum. Deinde quoniam B, multiplicans C D, facit E H, erit vt C, ad D, ita E ad H, vt autem C, ad D, ita est fractio C D, ad integrum ergo erit quoque, vt E, ad H, ita fractio C D, ad integrum. Quoniam igitur est vt E, prima quantitas ad H, secundum, ita fractio C D, tertia ad integrum quartem, & vt G, quinta ad eandem H, secundam, ita fractio G H, sexta ad idem integrum quartam, propterea vt E, G, prima, & quinta simul ad H, secundam, ita fractiones C D, G H, tertia, & sexta, simul ad integrum quartam.

Vt

Vt autem E G, ſimul ad H; ita eſt F, ipſis E G, æqualis (remanet enim G, ſi E, ſubtrahatur ex F), ad eandem quantitatem H, proinde erit etiam, vt F, ad H, ita fractiones C D, G H, ſimul ad integrum.

Cum igitur demonſtratum fuerit, vt eſt F, ad H, ita eſſe fractionem A B, ad integrum erit pariter, vt fractio A B, ad integrum, ita fractiones C D, G H, ſimul ad idem integrum, quamobrem fractiones C D, G H, ſimul æquales erunt fractioni A B, ſubtracta igitur fractione C D, ex fractione A B, remanet fractio G H, quod erat operæ pretium oſtendere. *Demonſtrationis concluſio.*

Multiplicatio Fractarum Magnitudinum.

OPERATIO TERTIA.

AD hanc Operationem perficiendam procedendum eſt, quemadmodum in fractionibus vulgaribus]. Ducantur igitur inter ſe magnitudines ſuperiores nimirum, & inferiores, hoc eſt numerator in numeratorem, & denominator in denominatorem. Iniunctum ſit multiplicare $\frac{a\ pl.}{b}$, per b, producetur quidem $\frac{a\ pl.\ b}{b}$, hoc eſt a pl. Ita ſi opus ſit multiplicare $\frac{a\ pl.}{b}$ per z, producetur $\frac{a\ pl.\ z}{b}$. Præterea ſit iniunctum multiplicare $\frac{a\ pl.}{b}$, per $\frac{a^2}{g}$, producetur $\frac{a\ pl.\ a^2}{b\ g}$, eodem modo ſi $\frac{a^2}{b}$, oporteat ducere in b, producetur $\frac{a^2\ b}{b}$, hoc eſt a^2. Inſuper ſi $\frac{b^2}{d}$, ducatur in $\frac{z\ pl.}{g}$, producetur $\frac{b^2\ z\ pl.}{d\ g}$. Deinde multiplicandum ſit $\frac{a\ b}{g}$, per $\frac{d\ k}{f}$, multiplicetur a b, per d k, & producetur a b d k; deinde multiplicetur g, per f, & fiet f g; quamobrem productum erit $\frac{a\ b\ d\ k}{f\ g}$. Debeat inſumer multiplicari $\frac{a^2 + b^2}{d}$, per $\frac{2\ a\ b}{b + d}$, & producetur $\frac{2\ a^3\ b + 2\ a\ b^3}{b\ d + d^2}$, Præterea oporteat multiplicare $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$, per $\frac{a^2 - a\ b}{d}$, & producetur $\frac{a^4 - a^3\ b - a^2\ b^2 + a\ b^3}{a\ d + b\ d}$. Cum autem propoſitæ eſſent fractiones $\frac{a^2\ c - a^2\ d - b^2\ c + b^2\ d}{a^2 + 2\ a\ b + b^2}$, & $\frac{a^3 - a\ b^2}{c\ d - d^2}$, ita vt illa per hanc duci debeat. Quoniam $a^2\ c - a^2\ d - b^2\ c + b^2\ d$, & $c\ d - d^2$, reduci poſſunt ad ſimpliciores $a^2 - b^2$, & d, quemadmodum, & $a^3 - a\ b^2$, & $a^2 + 2\ a\ b + b^2$ ad $a^2 - a\ b$, & $a + b$; propterea loco multiplicandi $a^2\ c - a^2\ d - b^2\ c + b^2\ d$, per $a^3 - a\ b^2$, multiplicare oporteat $a^2 - b^2$, per $a^2 - a\ b$, & loco multiplicandi $a^2 + 2\ a\ b + b^2$, per $c\ d - d^2$, multiplicare oporteat $a + b$, per d, fiet enim productum $\frac{a^4 - a^3\ b - a^2\ b^2 + a\ b^3}{a\ d + b\ d}$. Hic autem aduerte huiuſmodi artificium. *Ad perficiendam multiplicationem in ſpecierum fractionibus, non ſecus procedendum, ac in minutijs vulgarium numerorum. Explicatur operatio præceptis, ac exemplis illuſtratur. Praſtat reductionem inſtituere ad ſimpliciores.*

Ad has igitur illæ fractiones reuocatæ ſunt, ad has inquam $\frac{a^2 - b^2}{a + b}$, & $\frac{a^2 - a\ b}{d}$, quæ, vt melius percipiantur aduertendum eſt pragmatiam in eo conſiſtere, quod ſi fuerint duæ fractiones verbigratia $\frac{36}{8}$, & $\frac{60}{9}$, diuidatur 36, numerator, & 9, denominator per communem diuiſorem, iſque ſit 3; proueniet autem 12, & 3. *Res diligentius explicatur.*

$$\frac{a^2\ c - a^2\ d - b^2\ c + b^2\ d}{a^2 + 2\ a\ b + b^2} \times \frac{a^3 - a\ b^2}{c\ d - d^2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} \qquad \frac{a^2 - a\ b}{d}$$

Deinde diuidatur 60, numerator, & 8 denominator per communem diuiſorem, iſque ſit 4, & fient 2, & 15, vnde erunt fractiones $\frac{12}{2}$, & $\frac{15}{3}$, quæ inter ſe ductæ hoc eſt multiplicatis numeratoribus, & denominatoribus tantum producetur, quantum fit ex multiplicatione fractionum initio propoſitarum, qua de re alibi fuſius.

Quod ſi fractio multiplicari debet per integrum; diſponatur integrum ad modum fractionis ſubſcripta vnitate pro denominatore; quamobrem ſi multiplicare debeamus $a^2 - b^2$, per $\frac{a^2 - a\ b}{a + b}$, ipſi $a^2 - b^2$, ſubſcribi debet vnitas, vt fiat $\frac{a^2 - b^2}{1}$, numerator autem $a^2 - b^2$, & denominator $a + b$, reduci debent ad $a - b$, & 1; multiplica- *Quando fractio per integrum multiplicari debeat.*

Aduerte reductionem illam; cum scilicet reducimus $a^2 - b^2$, ad $a - b$, & $a + b$, ad 1.

tis verò numeratoribus inter se, vt etiam denominatoribus fiet productum $\frac{a^4 - 2a^3b + a^2b^2}{a}$, seu quod idem est $a^3 - 2a^2b + ab^2$. Ita pariter si multiplicare deberemus b per $\frac{a^2 + bc}{f + d}$, intelligatur integro b, subscripta vnitas, vt fiat $\frac{b}{1}$, instituta multiplicatione inter numeratores ad inuicem, vt & inter denominatores fiet productum $\frac{a^2b + b^2c}{f + d}$.

Exemplum.

At verò si multiplicare oporteat $a + \frac{b^2}{a - b}$, per $a - 2b + \frac{b^2}{a}$. Integrum illud a reuocetur ad fractionis naturam, & proueniet $\frac{a^2 - ab + b^2}{a - b}$, multiplicandum per $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a}$, ad hanc enim fractionem reuocatur illud $a - 2b + \frac{b^2}{a}$, quoniam igitur $a^2 - 2ab + b^2$, & $a - b$, reduci possunt ad $a - b$, & 1; Propterea multiplicatis $a^2 - ab + b^2$, per $a - b$, & a per 1, proueniet fractio sequens, nempe $\frac{a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3}{a}$, seu quod idem est $a^2 - 2ab + 2b^2 - \frac{b^3}{a}$; Si enim diuidamus $a^3 - 2a^2b + 2ab^2$, per a, fiet quotiens $a^2 - 2ab + 2b^2$, solaque particula $- b^3$, diuisionem non patitur, quam proinde eo symbolo significamus.

Nota reductionem.

Exemplum alterum.

Insuper iniunctum sit multiplicare $a + \frac{b^2}{a - b}$, per $a - b$, quoniam igitur a per $a - b$, facit $a^2 - ab$, & $\frac{b^2}{a - b}$, per $a - b$, facit b^2, proinde quæsitum productum erit $a^2 - ab + b^2$.

Exemplum ad idem.

Nec dissimiliter si multiplicare oporteat $\frac{a^2 - ab}{a + b}$, per $a^2 - b^2$. Quoniam igitur $a^2 - b^2$, fit ex $a + b$, in $a - b$, & $\frac{a^2 - ab}{a + b}$, ductum in $a + b$, producit $a^2 - ab$, oportebit multiplicare $a^2 - ab$ per $a - b$, ita enim proueniet $a^3 - 2a^2b + ab^2$; hæc autem cernere licet à latere.

Qua arte euitetur ascensus ad altiores gradus.

Hoc igitur modo euitari potest ascensus ad altiores gradus parodicos, ad quos deueniendum foret vulgari methodo.

$$\frac{a^2 - ab}{a + b} \qquad \frac{a^2 - b^2}{1} \qquad \frac{a^2 - ab}{1} \qquad \frac{a - b}{1}$$

$$\begin{array}{r} a^2 - ab \\ a - b \\ \hline - a^2b + ab^2 \\ a^3 - a^2b \\ \hline a^3 - 2a^2b + ab^2 \end{array}$$

Exemplum idem quod supra.

Denique sit iniunctum multiplicare $\frac{a^3 - ab^2}{cd - d^2}$, per $c - d$. Diuisis $cd - d^2$, per $c - d$, proueniet $\frac{a^3 - ab^2}{d}$; Cùm enim multiplicatio restituat, quod diuisione deperditur; proptereaquod diuidatur $a^3 - ab^2$, per $cd - d^2$, si minuatur diuisor, siue denominator quantum importat illud, in quod ductio facienda est, proueniet quæsitum, atq; illud erit $\frac{a^3 - ab^2}{d}$, tantum igitur ex hac proueniet multiplicatione.

Exemplum pro supradictorum maiori explicatione.

Deinde si multiplicari debeat $\frac{ab}{c}$, per $\frac{df}{g}$, fiet productum $\frac{abdf}{cg}$. Item si multiplicetur $a^2 + b^2$ per $\frac{ab}{d + c}$, fiet productum $\frac{a^3b + ab^3}{d + c}$. Præterea sit iniunctum multiplicare $\frac{5a^2 - 3bd^2}{c^2 - fg}$, per $\frac{b^2 + cf}{d^2 + bc}$, fiet productum $\frac{5a^2b^2 - 3b^3d^2 + 5a^2cf - 3bcd^2f}{c^2d^2 + bc^3 - d^2fg - bcfg}$. Sit insuper $\frac{a^2 + b^2}{ad + d^2}$, multiplicandum per $a^2 - 2ab$, fiet productum $\frac{a^4 + a^2b^2 - 2a^3b - 2ab^3}{ad + d^2}$.

Quando datæ fractiones ad simpliciores reuocari possunt quid agendu.

Quando verò datæ fractiones ad simpliciores reuocari possunt, expedit id quidem efficere, quandoquidem hoc pacto ipsæ fractiones elegantiùs tractantur, vt vnicuiq; perspicuum esse potest.

Exemplum.

** Intellige facilior ductione ad simpliciores vt supra,*

Si proponeretur multiplicandum $a + \frac{b^2}{a - b}$, per $a - 2b + \frac{b^2}{a}$, ducatur + a, in $a - b$, fiet productum $a^2 - ab$, cui subscripto eodem denominatore fiet fractio $\frac{a^2 - ab + b^2}{a - b}$, mox autem $a - 2b$, repertum silicet in illa fractione $a - 2b + \frac{b^2}{a}$, ducatur in a, fiet * productum hoc silicet $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a}$, multiplicentur autem numeratores, atque denominatores inter se, fiet productum $\frac{a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3}{a}$, seu quod idem est, vt superiùs dicebamus, fiet $a^2 - 2ab + 2b^2 - \frac{b^3}{a}$.

Exemplum.

Rursus si fuerit multiplicandum $\frac{a^3 - 3a^2b}{d^2}$, per a^2, fiet productum $\frac{a^5 - 3a^4b}{d^2}$, Deinde si multiplicandum foret $\frac{a^3 - 3a^2b + ab^2}{a - b}$, per $a - b$, fieret productum $\frac{a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2 - ab^3}{a - b}$. Insuper si sit opus multiplicare $\frac{4a^2 - 3b + 2}{13a + d}$, per $3a^2 - 3$, fiet $\frac{12a^4 - 9a^2b - 6a^2 + 9b - 6}{13a + d}$. Quod si deinde nos ducere deberemus $\frac{ab^2}{abc}$, in $\frac{a^2c - a^2d}{cf - d^2}$, præstabit ad simpliciores, propositas fractiones reuocare; & quidem $\frac{ab^2}{abc}$,

$$\begin{array}{r} a^3 - 3a^2b + ab^2 \\ a - b \\ \hline - a^3b + 3a^2b^2 - ab^3 \\ a^4 - 3a^3b + a^2b^2 \\ \hline a^4 - 4a^3b + 4a^2b^2 - ab^3 \end{array}$$

ad

ad hanc $\frac{b^3}{c}$, & aliam puta $\frac{a^3c - a^2d}{cd - d^2}$, ad hanc $\frac{a^2}{d}$, si itaque instituatur multiplicatio tam inter numeratores, quàm inter denominatores, fiet productum $\frac{a^2b^3}{cd}$. At si neglecta reuocatione ad simpliciores, productum extitisset huiusmodi $\frac{a^3b^3c - a^2b^3d}{abc^2d - abcd^2}$.

$$\begin{array}{r} 4a^2 - ab ✠ 2 \\ 3a^2 - 3 \\ \hline -12a^2 ✠ 3ab - 6 \\ 12a^4 - 3a^3b ✠ 6a^2 \\ \hline 12a^4 - 3a^3b - 6a^2 † 3ab - 6 \end{array}$$

Exemplum.

Propositum sit multiplicare d † $\frac{b^2}{d-b}$, per d — b. Cum itaque si multiplicetur d, per d — b, producatur d^2 — b d, & $\frac{b^2}{d-b}$, per d — b, faciat b^2, proinde quæsitum productum erit d^2 - b d † b^2. In hoc exemplo supponimus magnitudinem d, maiorem esse quam b, quod si b, foret maior quàm d, non dissimili modo procederetur. Sit igitur multiplicandum d ✠ $\frac{b^2}{b-d}$, per b - d, fiet productum b d - d^2 † b^2. Quod si deberemus multiplicare $\frac{a^2 - ab}{a + b}$, per $a^2 - b^2$, multiplicetur a^2 - a b, per a - b, vt proueniat a^3 - 2 a^2 b † a b^2. Huius autem compendij ratio iam superius explicata fuit, hoc eodem exemplo adhibito.

Demonstratio sic se habet. Sunto fractiones A B, C D, ducantur numeratores inter se, sicut, & denominatores, vt fiat fractio E F. Quoniam igitur ractio fractionis E F, ad C D, componitur ex rationibus ipsius E, ad C, & D, ad F; ratio verò quantitatis A B, ad positam componitur ex ratione ipsius A, ad vnitatem, & vnitatis ad B, vt autem est A, ad vnitatem, sic est E, ad C, & vt vnitas ad B, sic D, ad F, ergo per æqualem proportionem erit quantitas E F, ad quantitatem C D, vt quantitas A B, multiplicans ad positam; ergo, & E F, erit proueniens quantitas ex ductu A B, multiplicantis in C D, multiplicatam; Quod erat operæ prætium ostendere.

Demonstratio explicatę pragmatia.

A a pl. / B b   C z quad / D g

E a pl. z quad / F b g

Aliter etiam sic.

Sit fractio A B, per fractionem C D, multiplicanda. Ducantur numeratores A, C, inter se, vt proueniat E, cui subscribatur F, genitus ex multiplicatione denominatorum B, D. Dico fractionem E F, procreari, ex multiplicatione fractionum A B, C D, inter se. Ex E, in D, fiat G, & ex C, in F, fiat H; erit propterea, vt fractio E F, ad fractionem C D, ita G, ad H. (Si numerator enim vnius fractionis in denominatorem alterius, & contra insuper ducatur, prior fractio, ad posteriorem est, vt primum productum, ad secundum quod facile potest ostendi). Quoniam autem C, multiplicans A, F, facit E, H, erit vt A, ad F, ita E, ad H, & permutando, vt A, ad E, ita F, ad H.

Demonstratio alia ad idem instituitur.

A a pl. / B b   C z quad / D g

E a pl. z quad / F b g   G a pl. z quad g / H b g z quad

Deinde quandoquidem D, multiplicans E, & B, facit G, & F, erit vt E, ad B, ita G, ad F, ex æqualitate igitur perturbata erit, vt A, ad E, ita G, ad H; sed vt G, ad H, ostensum est fractionem E F, esse ad fractionem C D, & vt A, ad B, ita est fractio A B, ad integrum (numerator enim cuiuslibet fractionis ad denominatorem eiusdem eandem habet rationem, quam fractio ad integrum, quod facilè etiam constat) ergo erit quoque, vt fractio E F, ad fractionem C D, ita fractio A B, ad integrum. Propterea, vt constat. ex definitione multiplicationis, fractio E F, producetur ex multiplicatione fractionis A B, in fractionem C D. Quod erat operæ pretium ostendere.

Demonstrationis continuatio.

Applicatio,

Applicatio, seu Diuisio fractarum Magnitudinum.

OPERATIO QVARTA.

Fractiones aut sunt eiusdem, vel diuersæ appellationis.

FRactiones, aut sunt appellationis eiusdem, vel diuersæ. Si fuerint eiusdem appellationis Applicatio, seu Diuisio hunc in modum instituetur. Sit iniunctum diuidere $\frac{ab^3}{d}$, per $\frac{b^2}{d}$. Diuidatur ab^3, per b^2, neglecto denominatore d, fiet quotiens a b. Præterea si sit opus diuidere $\frac{a^3-ab^2}{c-d}$, per hanc fractionem $\frac{a^2+2ab+b^2}{c-d}$, fiet quotiens $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2}$, vel quod idem est $\frac{a^2-ab}{a+b}$. Cum enim negligendus sit denominator, quia communis est vtrique fractioni; ob id perinde erit diuidere quotientes, hoc est numeratores, diuisos per denominatorem, ac est diuidere numeraratorem vnum per alium. Vt si $\frac{40}{5}$, diuidi debeat per $\frac{10}{5}$, perinde est diuidere 8, æquipollentem ipsi $\frac{40}{5}$, per 2, æquipollentem ipsi $\frac{10}{5}$, ac est diuidere 40, numeratorem per 10, itidem numeratorem; ex vtraque enim diuisione prouenit 4. Cæterum fractionem illam, id est $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2}$, reduci ad hanc $\frac{a^2-ab}{a+b}$, facilè constat; nam si diuidatur $a^3 - ab^2$, per $a + b$, fit quotiens $a^2 - ab$. Si per idem $a + b$, diuidatur hoc trinomium $a^2 + 2ab + b^2$, fiet quotiebs $a + b$; quamobrem illa fractio $\frac{a^3-ab^2}{a^2+2ab+b^2}$, reuocatur ad hanc $\frac{a^2-ab}{a+b}$.

Quando fractiones diuersæ appellationis extiterint.

At verò si diuersæ appellationis, siue denominationis extiterint, ad eundem denominatorem per multiplicationem in crucem reduci debent, quemadmodum fieri solet in fractionibus numerorum vulgarium. Sit igitur iniunctum diuidere $\frac{a^3+b^3}{a+b}$, per $\frac{a^2+ab+b^2}{d}$, instituta multiplicatione per crucem fiet quotiens $\frac{a^3d+b^3d}{a^3+2a^2b+2ab^2+b^3}$. Si verò diuidi deberet $\frac{a^3-b^3}{a+b}$, per $\frac{a^2-ab+b^2}{d}$, non dissimili modo procedentes, comperiemus quotientem esse $\frac{a^3d-b^3d}{a^3+b^3}$. Præterea sit iniunctum diuidere $\frac{a^3}{b}$, per d, fiet quotiens $\frac{a^3}{bd}$. Rursus oporteat applicare b d, a d $\frac{a^3}{f}$, ducta vtraque magnitudinum in f, & facta applicatione ad a^3, numeratorem, fiet quotiens $\frac{bdf}{a^3}$.

$$\begin{array}{ccc} a^3 + b^3 & a^2 + ab + b^2 & \\ d & a + b & a^3d + b^3d \\ \hline a^3d + b^3d & a^3b + ab^3 + b^3 & a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a^3 + a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3 \end{array}$$

Quod si proponatur $\frac{b^3}{d}$, & diuidi debeat per $\frac{a^3}{f}$, orietur $\frac{b^3f}{a^3d}$. Ita si applicetur b c ad $\frac{af^2}{d}$, facta eadem multiplicatione per crucem, proueniet quantitas $\frac{bcd}{af^2}$, Denique oporteat applicare $\frac{bc}{e}$ ad $\frac{a^2}{dfg}$, erit magnitudo ortiua $\frac{bcdfg}{a^2e}$.

Quando fractiones ad simpliciores reduci possunt.

Si verò proponatur fractiones, quarum vna per aliam diuidi debeat, & vna vel altera, aut etiam vtraque ad simpliciores reduci possit. Tunc debet prius reductio fieri, postea procedendum, vt prius; redactis enim fractionum numeratoribus, atque denominatoribus ad simpliciores terminos, Operatio ipsa faciliùs exercetur, ac longe elegantiùs perficitur.

Exemplis res explicatur.

Quamobrem si darentur fractiones $\frac{a^5-b^5}{a^2+2ab+b^2}$, & $\frac{a^2+ab}{a-b}$, adeo vt illa per hanc diuidi debeat. Reducantur numeratores, qua reductione facta, erunt numeratores $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, & a; denominatores verò erunt $a - b$, & 1; adeo vu fractiones illæ redactæ sint ad has $\frac{a^3-a^2b+ab^2-b^3}{a-b}$, & $\frac{a}{1}$. Constabit autem ex infrappo sito paradigmate, ducto $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, in $a + b$, fieri $a^4 - b^4$; ac proinde diuiso $a^4 - b^4$, per $a + b$ quotientem fieri $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$. Cum igitur $a + b$,

diuidens

diuidens $a^2 \dagger a\,b$, reddat a, diuidens autem $a^4 - b^4$, reddat $a^3 - a^2 b \divideontimes a\,b^2 - b^3$, erunt numeratores, vt diximus, at verò $a - b$, diuidens se ipsum reddit 1, diuidens autem denominatorem alterius fractionis, nempe $a^2 - 2\,a\,b \divideontimes b^2$, reddit $a - b$; proinde erunt denominatores, vt dictum fuit; at verò si fractiones illæ reuocatæ fuerint ad has, nempe $\frac{a^3 - a^2 b \dagger a b^2 - b^3}{a - b}$, & $\frac{a}{1}$, erit illa per hanc diuidenda, quod perficiemus multiplicando $a^3 - a^2 b \divideontimes a\,b^2 - b^3$, per 1, ex quo nulla sequitur immutatio; deinde multiplicando $a - b$, per a, & producetur $a^2 - a\,b$, ille erit numerator hic autem denominator, adeo vt fiat quotiens $\frac{a^3 - a^2 b \dagger a b^2 - b^3}{a^2 - a b}$.

$$\begin{array}{r} a^3 - a^2 b \dagger a\,b^2 - b^3 \\ a \dagger b \\ \hline \dagger a^3 b - a^2 b^2 \dagger a\,b^3 - b^4 \\ a^4 - a^3 b \dagger a^2 b^2 - a\,b^3 \\ \hline a^4 - b^4 \end{array}$$

Demonstratio sic se habet. Quoniam ratio quantitatis A B, ad quantitatem E F, componitur ex ratione ipsius A, ad E, & ratione ipsius F, ad B; & vt A, ad E, ita vnitas ad D, & sicuti F, ad B, ita C, ad vbitatem, & ratio quantitatis C D, ad positam componitur ex ratione ipsius C, ad vnitatem, & ex ratione vnitatis ad D, ergo per æquam proportionem ratio quantitatis A E, diuisæ ad quantitatem E F, prouenientem, erit vt quantitas C D, diuidens ad positam; ergo ex diuisione quantitatis A B, per quantitatem C D, prouenit F F. Quod erat ostendendum. Aliter etiam hæc eadem operatio demonstrari potest hæc tamen attulisse sufficiat. *Demonstratio superioris pragmatia.*

$$\frac{A}{B} \qquad \frac{C}{D} \qquad \frac{E}{F}$$

Subijciam autem hic nonnulla, quæ valde prosunt Analystæ.

PROPOSITIO I.

Dvorum laterum aggregato, differentiam eorundem addere. *Propositio prima.*
Latus vnum esto a, aliud verò b, horum aggregatum est $a \divideontimes b$, differentia verò $a - b$, qua addita ad aggregatum prædictum fit $2\,a$. Hinc.

THEOREMA.

Aggregatum duorum laterum additum differentiæ eorundem æquale est duplo lateris maioris. *Theorema primum.*

PROPOSITIO II.

Dvorum laterum aggregato eorundem differentiam subducere. *Propositio secunda.*
Ijsdem positis lateribus aggregatum erit $a \dagger b$, differentia verò $a - b$, qua subtracta ex aggregato iam dicto, fit residuum $2\,b$. Hinc.

THEO-

THEOREMA.

Theorema secundum.

AGgregatum duorum laterum multatum differentia eorundem, æquale est duplo lateris minoris.

PROPOSITIO III.

Propositio tertia.

CVm idem latus contrahitur inæquali decremento, alterum ex altero subducere.

Ex a, supponamus esse subtractum b, & ex eodem subtractum esse c, & oporteat ex a – b, subducere a – c; subtractione facta remanet c – b. Hinc.

THEOREMA.

Theorema tertium.

SI latus inæquali minuatur decremento, differentia contractionum, æqualis est differentiæ contractorum.

PROPOSITIO IV.

Propositio quarta.

CVm idem latus protrahitur inæquali cremento, alterum ex altero subducere.

Sit lateri a, additum b, vt fiat a † b, itemque eidem a, additum sit d, vt fiat a † d. Oporteat verò ex a † b, subducere a † d, residunm fiet b – d. Hinc.

THEOREMA.

Theorema quartum.

SI idem latus inæquali augeatnr cremento, differentia protractionum æqualis est differentiæ protractorum.

PROPOSITIO V.

Propositio quinta.

CVm idem latus protrahitur, & contrahitur inæquali cremento, & decremento, alterum ex alterò subducere.

Sit latus vnum a, cui additum sit b, vt fiat a † b, & ex eodem a, subtractum sit d, vt remaneat a – d, quod subtrahendum sit ex a † b, fiet residuum b ✱ d. Hinc.

THEOREMA.

Theorema quintum.

SI idem latus potrahatur, & contrahatur inæquali cremento, & decremento, differentia potractæ, & contractæ æqualis est aggregato protractionis, & contractionis.

De

De Poteſtatum Geneſi.

CAPVT SEXTVM.

GENESIS vniuſcuiuſque poteſtatis opere multiplicationis comparatur. Quoniam verò duplex eſt poteſtas, alia nimirum pura, & alia affecta; propterea dictante naturæ ordine primùm de geneſi puræ poteſtatis ſermonem inſtituemus, & quidem à binomia radice. *Cuiuſcunque poteſtatis genesis opere multiplicationis comprobatur.*

PROPOSITIO I.

POteſtatem puram à binomia radice componere. *Propoſitio prima.*

Sit binomia radix a † e, conſtans ex duobus nominibus a, & e, oporteat verò puram poteſtate componere.

Sit autem primò componendum quadratum. Quoniam igitur latus ductum in ſe facit quadratum; ducatur proinde a † e, in a † e, & colligantur effecta ſingularia plana, eaque ſunt a^2, 2 a e, e^2. Quæquidem propterea ſimul iuncta æquabuntur quadrato ex a † e. Erit autem,

	a † e
	a † e
	a e † e^2
a^2 †	a e
a^2 † 2 a e † e^2	

Theorema Geneſeos Quadrati.

SI fuerint duo latera: Quadratum lateris primi, plus duplo plano à latere primo in latus ſecundum, plus quadrato lateris ſecundi æquatur quadrato aggregati laterum. *Theorema primum.*

Latus vnum eſto a, alterum autem e. Dico a^2, plus 2 a e, plus e^2, æquari quadrato ex a † e. Huius Theoremati veritas ex opere multiplicationis innoteſcit.

PROPOSITIO II.

COmponendus ſit cubus. *Propoſitio ſecunda.*

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadratum producit cubum. Ducatur a † e, in expoſitum quadratum ex a † e; & colligantur effecta ſingularia ſolida. Ea verò ſunt a^3, 3 a^2 e, 3 a e^2, e^3; quæ propterea ſimul iuncta æquabuntur cubo ex a † e. Erit autem,

Theorema Geneſeos Cubi.

Theorema ſecundum.

SI fuerint duo latera, cubus lateris primi, plus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus triplo ſolido à latere primo in quadratum lateris ſecundi, plus cubo eiuſdem ſecundi lateris, æquatur cubo aggregati laterum.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Dico $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3$, æquari cubo ex $a \dagger e$. Huius autem Theorematis veritas depræhenditur ex opere multiplicationis; Ducta enim $a \dagger e$, binomia radix in $a^2 \dagger 2ae \dagger e^2$, quadratum ſui facit $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3$.

PROPOSITIO III.

Propoſitio tertia.

COmponendum ſit quadrato-quadratum.

Quoniam latus ductum in ſui cubum facit quadrato-quadratum. Ducatur $a \dagger e$, in cubum iam expoſitum ex $a \dagger e$, & colligantur effecta ſingularia plano-plana. Eruntque illa a^4, $4a^3e$, $6a^2e^2$, $4ae^3$, e^4, quæ propterea ſimul iuncta æquabuntur quadrato-quadrato, ex $a \dagger e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Quadrato-quadrati.

Theorema tertium.

SI fuerint duo latera. Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano abs quadrato lateris primi in quadratum ſecundi, plus quadruplo plano-plano à latere primo in cubum ſecundi, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, æquatur quadrato-quadrato aggregati laterum.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Dico $a^4 \dagger 4a^3e \dagger 6a^2e^2 \dagger 4ae^3 \dagger e^4$, æquari quadrato-quadrato ex $a \dagger e$. Huius autem Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis. Ducta enim $a \dagger e$, binomia radix in ſui cubum $a^3 \dagger 3a^2e \dagger 3ae^2 \dagger e^3$, facit &c.

PROPOSITIO IV.

Propoſitio quarta.

COmponendus ſit quadrato-cubus.

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadrato-quadratum facit quadrato-cubum. Ducatur $a \dagger e$, in quadrato-quadratum iam expoſitum ex $a \dagger e$, & colligantur effecta ſingularia plano-ſolida. Erunt autem illa a^5, $5a^4e$, $10a^3e^2$, $10a^2e^3$, $5ae^4$, e^5; quæ quidem ſimul ſumpta æquabuntur quadrato-cubo ex $a \dagger e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Quadrato-cubi.

Theorema quartum.

SI fuerint duo latera. Quadrato-cubus lateris primi plus quintuplo plano ſolido à quadrato-quadrato lateris primi, in latus ſecundum, plus decuplo plano-ſolido à cubo lateris primi in quadratum lateris ſecundi, plus decuplo plano-ſolido à quadrato lateris primi, in cubum ſecundi, plus quintuplo plano ſolido à latere primo in quadrato-quadratum lateris ſecundi, plus quadrato-cubo lateris ſecundi æquatur quadrato-cubo aggregati laterum.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Dico $a^5 + 5 a^4 e + 10 a^3 e^2 + 10 a^2 e^3 + 5 a e^4 + e^5$, æquari quadrato-cubo ex $a + e$. Huius Theorematis veritas deprehenditur ex opere multiplicationis $a^4 + 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4$, per $a + e$.

PROPOSITIO V.

Propoſitio quinta.

COmponendus ſit cubo-cubus.

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadrato-cubum, facit cubo-cubum. Propterea ducatur $a + e$, in quadrato cubum, iam expoſitum abs $a + e$, & colligantur facta ſingularia ſolido-ſolida, erunt autem illa a^6, $6 a^5 e$, $15 a^4 e^2$, $20 a^3 e^3$, $15 a^2 e^4$, $6 a e^5$, e^6, quæ quidem æquabuntur cubo-cubo ex $a + e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos cubo-cubi.

Theorema quintum.

SI fuerint duo latera. Cubo-cubus lateris primi plus ſextuplo ſolido-ſolido à quadrato-cubo lateris primi in latus ſecundum, plus decuquintuplo ſolido-ſolido à quadrato-quadrato lateris primi in quadratum ſecundi, plus vigecuplo ſolido-ſolido à cubo lateris primi in cubum lateris ſecundi, plus decuquintuplo ſolido-ſolido, à quadrato lateris primi in quadrato-quadratum lateris ſecundi, plus ſextuplo ſolido-ſolido à latere primo in quadrato-cubum lateris ſecundi, plus cubo-cubo eiuſdem ſecundi lateris, æquabitur cubo-cubo aggregati laterum.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Dico $a^6 + 6 a^5 e + 15 a^4 e^2 + 20 a^3 e^3 + 15 a^2 e^4 + 6 a e^5 + e^6$, æquari cubo-cubo ex $a + e$. Huius Theorematis demonſtratio conſtat ex opere multiplicationis $a^5 + 5 a^4 e + 10 a^3 e^2 + 10 a^2 e^3 + 5 a e^4 + e^5$, per $a + e$.

Sic etiam reliquarum poteſtatum Geneſis comprobabitur.

Quod ſi in animo eſt poteſtates componere à differentia laterum eadem omninò efficientur ſingularia compoſitionis homogenea affirmabuntur tamen, & negabuntur alterne, initio facto à poteſtate maioris lateris; cum par fuerit ſingulorum homogeneorum numerus, vt in cubo quadrato-cubo, & ex inde alternis: In reliquis verò ſiue à maioris, ſiue à minoris lateris poteſtate ducatur initium nihil refert.

Si tamen placet poteſtatem puram è laterum differentia componere. Differentia laterum eſto $a - e$, & ex hac ſit componenda pura poteſtas.

Poteſtas pura à laterum differentia componitur.

PROPOSITIO I.

Propoſitio prima.

COmponendum ſit quadratum.

Quoniam igitur latus ductum in ſe facit quadratum; propterea ducatur $a - e$, in

 ſe, &

ſe, & colligantur ſingularia effecta plana, eruntque illa $a^2 - 2\ ac + e^2$; quæ æquabuntur quadrato ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Quadrati.

Theorema primum.

SI fuerint duo latera. Quadratum lateris maioris, minus duplo plano à latere maiori in latus minus, plus quadrato lateris minoris; æquatur quadrato differentiæ laterum.

Sit latus maius a, minus autem e. Dico $a^2 - 2\ ae + e^2$, æquari quadrato ex $a - e$. Huius Theorematis veritas conſtat ex opere multiplicationis $a - e$, in $a - e$.

PROPOSITIO II.

Propoſitio ſecunda.

COmponendus ſit cubus.

Quoniam igitur latus ductum in ſui quadratum facit cubum; ducatur $a - e$, in quadratum iam expoſitum ex $a - e$, & colligantur effecta ſingularia ſolida, illa que erunt a^3; $3\ a^2 e$; $3\ a e^2$; e^3, quæ ſimul iuncta æquabuntur cubo ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Cubi.

Theorema ſecundum.

SI fuerint duo latera. Cubus lateris maioris, minus triplo ſolido à quadrato lateris maioris in latus minus, plus triplo ſolido à latere maiori in quadratum lateris minoris, minus cubo minoris lateris; æquatur cubo à differentia laterum.

Sit latus maius a, at verò minus ſit e. Dico $a^3 - 3\ a^2 e + 3\ a e^2 - e^3$, æquari cubo ex $a - e$. Theorematis autem veritas conſtat ex opere multiplicationis $a^2 - 2\ a e + e^2$, per $a - e$.

PROPOSITIO III.

Propoſitio tertia.

COmponendum ſit quadrato-quadratum.

Quoniam igitur latus ductum in ſui cubum facit quadrato-quadratum. Ducatur $a - e$, in cubum iam expoſitum ab $a - e$; & colligantur effecta ſingularia plano-plana. Eruntque illa a^4; $4\ a^3 e$; $6\ a^2 e^2$; $4\ a e^3$; e^4, quæ ſimul iuncta æquabuntur quadrato-quadrato ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneſeos Quadrato-quadrati.

Theorema tertium.

SI fuerint duo latera. Quadrato-quadratum lateris maioris, minus quadruplo plano-plano à cubo lateris maioris in latus minus, plus ſextuplo plano-plano abs quadrato lateris maioris, in quadratum lateris minoris, minus quadruplo plano-plano à latere maiori, in cubum lateris minoris, plus quadrato-quadrato

lateris

lateris minoris; æquatur quadrato-quadrato differentiæ laterum.

Maius latus esto a, at verò minus sit e, Dico $a^4 - 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 + e^4$, æquari quadrato-quadrato ex $a - e$. Huius Theorematis veritas constat ex opere multiplicationis $a^3 - 3 a^2 e + 3 a e^2 - e^3$, per $a - e$.

PROPOSITIO IV.

Componendus sit quadrato-cubus. *Propositio quarta.*

Quoniam igitur latus ductum in sui quadrato-quadratum facit quadrato-cubum, ducatur $a - e$, in quadrato-quadratum iam expositam ab $a - e$, & colligantur effecta singularia plano-solida; eruntque illa a^5; $5 a^4 e$; $10 a^3 e^2$; $10 a^2 e^3$; $5 a e^4$ — e^5, quæ simul iuncta æquabuntur quadrato-cubo ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneseos Quadrato-Cubi.

SI fuerint duo latera; Quadrato-cubus lateris maioris, minus quintuplo plano solido à quadrato-quadrato lateris maioris, in latus minus, plus decuplo plano solido à cubo lateris maioris, in quadratum lateris minoris, minus decuplo plano solido à quadrato lateris maioris, in cubum lateris minoris, plus quintuplo plano solido à latere maiori in quadrato-quadratum lateris minoris, minus quadrato cubo minoris lateris; æquatur quadrato-cubo differentiæ laterum. *Theorema quartum.*

Sit latus maius a, at verò e, sit minus. Dico $a^5 - 5 a^4 e + 10 a^3 e^2 - 10 a^2 e^3 + 5 a e^4 - e^5$, æquari quadrato-cubo ex $a - e$. Theorematis autem veritas deprehenditur ex multiplicatione $a^4 - 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 - 4 a e^3 + e^4$, per $a - e$.

PROPOSITIO V.

Componendus sit cubo-cubus. *Propositio quinta.*

Quoniam igitur latus ductum in sui quadrato-cubum facit cubo-cubum. Ducatur $a - e$, in quadrato-cubum iam expositum ab $a - e$, & colligantur effecta singularia solido-solida, eruntque illa a^6; $6 a^5 e$; $15 a^4 e^2$; $20 a^3 e^3$; $15 a^2 e^4$; $6 a e^5$, e^6, quæ propterea simul iuncta æquabuntur cubo-cubo ex $a - e$. Erit autem.

Theorema Geneseos Cubo-cubi.

SI fuerint duo latera; Cubo-cubus lateris maioris, minus sextuplo solido-solido à quadrato-cubo lateris maioris in latus minus, plus decuquintuplo solido-solido à quadrato-quadrato lateris maioris, in quadratum lateris minoris, minus vigecuplo solido-solido à cubo lateris maioris, in cubum lateris minoris, plus decuquintuplo solido-solido à quadrato lateris maioris in quadrato-quadratum lateris minoris, minus sextuplo solido-solido à latere maiori in quadrato-cubum lateris minoris, plus cubo-cubo lateris minoris æquatur cubo-cubo differentiæ laterum. *Theorema quintum.*

Sit

Sit latus maius quidem a, at verò e, sit minus. Dico $a^6 - 6a^5e + 15a^4e^2 - 20a^3e^3 + 15a^2e^4 - 6ae^5 + e^6$, æquari cubo-cubo ex $a - e$. Theorematis autem veritas constat ex multiplicatione $a^5 - 5a^4e + 10a^3e^2 - 19a^2e^3 + 5ae^4 - e^5$, per $a - e$.

Corollarium ex hactenus traditis. Hæc autem subijciemus, quæ maximè ad sequentia conducunt.

PROPOSITIO I.

Propositio prima. QVadrato aggregati laterum, quadratum differentiæ eorundem addere.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Sitque iniunctum quadrato ex $a + e$, addere quadratum ex $a \sim e$. Quadratum ex $a + e$, est $a^2 + 2ae + e^2$, quadratum ex $a - e$, est $a^2 - 2ae + e^2$. Facta autem vnius ad alterum additione fit $2a^2 + 2e^2$; Hinc infertur.

THEOREMA.

Theorema primum. QVadratum aggregati laterum, plus quadrato differentiæ eorundem æquatur duplo aggregato quadratorum eorundem laterum.

PROPOSITIO II.

Propositio secunda. QVadrato aggregati duorum laterum, quadratum differentiæ eorundem subducere.

Latus vnum esto a, alterum autem e; Sit autem iniunctum a quadrato, ex $a + e$, subtrahere quadratum ex $a \sim e$, planis singularibus, quibus constat quadratum ab $a + e$, auferantur plana singularia, quibus constat quadratum ex $a \sim e$, & fit differentia $4ae$. Hinc infertur.

THEOREMA.

Theorema secundum. QVadratum aggregati duorum laterum, minus quadrato differentiæ eorundem, æquatur quadruplo plano sub lateribus.

Praeponuntur nonnulla, quæ præcipuè ad sequentia conducunt. Ex hoc infertur, quod etiam in Geometria ostenditur, nempe planum sub duobus lateribus, minus esse quadrato à dimidio aggregati laterum, quod euidenter colligitur ex præcedenti; Siquidem quadratum aggregati duorum laterum, minus quadrato differentiæ eorundem æquabatur quadruplo plano, sub lateribus; consequens propterea est, vt æqualitas etiam seruetur inter subquadrupla extrema; qua propter quadratum aggregati dimidij laterum, maius erit plano sub lateribus, illique præstabit, vel quadrato dimidiæ differentiæ, aut non erunt quadrata diuersa, sed æqualia.

PROPO-

PROPOSITIO III.

DIfferentiam duorum laterum in eorundem aggregatum ducere. *Propositio tertia.*

Latus vnum, nempe maius ſit a, at verò minus ſit e. Ducatur $a - e$, in $a + e$, nempe differentia laterum in aggregatum eorundem, ſingularia plana colligantur, eruntque illa $a^2; e^2$, quæ ſimul iuncta æquabuntur producto ex $a - e$, in $a + e$. Hinc.

THEOREMA.

FActum ex differentia duorum laterum, in eorundem aggregatum æquale eſt differentiæ quadratorum. Itaque factum ex $a - e$, in $a + e$, eſt $a^2 - e^2$. *Theorema tertium.*

Ex quo illud intelliges, quod nos in prima Parte etiam oſtendimus Differentia quadratorum, ſi applicetur differentiæ laterum, oritur laterum aggregatum, & contra. Differentia quadratorum ſi applicetur aggregato laterum oritur laterum differentia.

PROPOSITIO IV.

CVbo aggregati duorum laterum, cubum differentiæ eorundem addere. *Propoſitio quarta.*

Latus vnum eſto a, alterum autem e. Oporteat cubo ex $a + e$, addere cubum ex $a \sim e$. Cubus ex $a + e$, eſt $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, at verò cubus ex $a \sim e$, eſt $a^3 - 3a^2e + 3ae^2 - e^3$. His autem additis fit ſumma $2a^3 + 6ae^2$. Hinc.

THEOREMA.

CVbus aggregati laterum plus cubo differentiæ eorundem, æqualis eſt duplo cubo lateris maioris, plus ſextuplo ſolido à latere maiori, in lateris minoris quadratum. *Theorema quartum.*

PROPOSITIO V.

CVbo aggregati duorum laterum, cubum differentiæ eorundem ſubducere. *Propoſitio quinta.*

Latus vnum eſto a, alterum autem e. Oporteat cubo ex $a + e$, ſubducere cubum ex $a \sim e$. A ſolidis ſingularibus quibus componitur cubus ex $a + e$, auferantur ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus ex $a \sim e$; fiet enim reſiduum $6a^2e + 2e^3$. Hinc.

THEOREMA.

CVbus aggregati duorum laterum, minus cubo differentiæ eorundem æqualis eſt ſextuplo ſolido à lateris maioris quadrato in latus minus, plus duplo cubo lateris minoris. *Theorema quintum.*

PROPO-

PROPOSITIO VI.

Propositio sexta.

QVadrato-quadrato aggregati duorum laterum; quadrato-quadratum differentiæ eorundem addere.

Latus vnum esto a, alterum autem e; Oporteat quadrato-quadrato ex $a \dagger e$, addere quadratum ex $a \backsim e$. Quadrato-quadratum effectum ab $a \dagger e$, constat $a^4 \dagger 4a^3e \dagger 6a^2e^2 \dagger 4ae^3 \dagger e^4$; at verò quadrato-quadratum effectum ab $a \backsim e$, constat $a^4 - 4a^3e \dagger 6a^2e^2 - 4ae^3 \dagger e^4$. Horum additione facta proueniet summa $2a^4 \dagger 12a^2e^2 \dagger 2e^4$. Hinc,

THEOREMA.

Theorema sextum.

QVadrato-quadratum aggregati duorum laterum, plus quadrato-quadrato differentiæ eorundem, æquatur duplo aggregato quadrato-quadratorum laterum plus duodecuplo plano-plano à quadrato lateris maioris, in quadratum lateris minoris.

PROPOSITIO VII.

Propositio septima.

QVadrato-quadrato aggregati duorum laterum, quadrato-quadratum differentiæ eorundem subducere.

Latus vnum esto a, alterum autem e. Oporteat quadrato-quadrato ex $a \dagger e$, subducere quadrato-quadratum ex $a \backsim e$; Colligantur singularia plano-plana, quibus constat, quadrato-quadratum effigendum ab $a \dagger e$; & ab ijs auferantur singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum ab $a \backsim e$; proueniet enim differentia $8a^3e - 8ae^3$. Hinc,

THEOREMA.

Theorema septimum.

QVadrato-quadratum aggregati duorum laterum, minus quadrato-quadrato differentiæ eorundem æquatur octuplo plano-plano à cubo lateris maioris in latus minus minus octuplo plano-plano à latere maiori in cubum lateris minoris.

PROPOSITIO VIII.

Propositio octaua.

QVadrato cubo aggregati duorum laterum, quadrato cubum differentiæ eorundem addere.

Sit latus vnum a, alterum e. Oporteat quadrato cubo ex $a \dagger e$, addere quadrato cubum ex $a \backsim e$.

Quadrato cubus ex $a \dagger e$, constat $a^5 \dagger 5a^4e \dagger 10a^3e^2 \dagger 10a^2e^3 \dagger 5ae^4 \dagger e^5$; at verò quadrato-cubus ex $a \backsim e$, constat $a^5 - 5a^4e \dagger 10a^3e^2 - 10a^2e^3 \dagger 5ae^4 - e^5$, Facta autem additione, fiet summa $2a^5 \dagger 20a^3e^2 \dagger 10ae^4$. Hinc.

THEO-

THEOREMA.

QVadrato-cubus aggregati duorum laterum, plus quadrato-cubo differentiæ eorundem æquatur duplo quadrato-cubo lateris maioris, plus vigecuplo plano-solido à cubo lateris maioris, in quadratum lateris minoris, plus decuplo plano solido à latere maiori in quadrato-quadratum lateris minoris. *Theorema octauum.*

PROPOSITIO IX.

QVadrato-cubo aggregati duorum laterum, quadrato-cubum differentiæ eorundem demere. *Propositio nona.*

Sit latus vnum a, alterum autem e. Oporteat ex quadrato-cubo abs $a + e$, subtrahere quadrato-cubum ab $a \sim e$.

A plano-solidis, quibus constat effingendus quadrato-cubus ab $a + e$, auferantur singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus, ab $a \sim e$; proueniet enim differentia $10 a^4 e + 20 a^2 e^3 + e^5$. Hinc.

THEOREMA.

QVadrato-cubus aggregati duorum laterum, minus quadrato-cubo differentiæ eorundem, æquatur decuplo plano-solido à quadrato-quadrato lateris maioris in latus minus, plus vigecuplo plano-solido à quadrato lateris maioris, in cubum lateris minoris, plus duplo quadrato-cubo lateris minoris. *Theorema nonum.*

PROPOSITIO X.

CVbo-cubo aggregati duorum laterum, cubo-cubum differentiæ eorundem addere. *Propositio decima.*

Latus vnum sit a, alterum autem e. Oporteat cubo-cubo ex $a + e$, addere cubo-cubum ex $a \sim e$.

Cubo-cubus autem effectus ab $a + e$, constat $a^6 + 6 a^5 e + 15 a^4 e^2 + 20 a^3 e^3 + 15 a^2 e^4 + 6 a e^5 + e^6$. Cubo-cubus autem effectus ab $a \sim e$, constat $a^6 - 6 a^5 e + 15 a^4 e^2 - 20 a^3 e^3 + 15 a^2 e^4 - 6 a e^5 + e^6$. Facta autem additione prouenit summa $2 a^6 + 30 a^4 e^2 + 30 a^2 e^4 + 2 e^6$. Hinc.

THEOREMA.

CVbo-cubus aggregati duorum laterum plus cubo-cubo differentiæ, eorundem, æquatur duplo cubo-cubo ipsorum laterum, plus trigecuplo solido-solido à quadrato-quadrato lateris maioris in quadratum lateris minoris, plus trigecuplo solido-solido à quadrato lateris maioris in quadrato-quadratum lateris minoris, plus duplo cubo-cubo lateris minoris. *Theorema decimum.*

PROPOSITIO XI.

Propositio decimaprima.

CVbo-cubo aggregati duorum laterum, cubo-cubum differentiæ eorundem demere.

Oporteat cubo-cubo ex a † c, demere cubo-cubum ex a ∾ c.

A solido-solidis singularibus, quibus constat effingendus cubo-cubus ab a † c, auferantur singularia solido-solida, quibus constat cubo-cubus ab a ∾ c; fiet autem differentia $12\ a^5\ c$ † $40\ a^3\ c^3$ † $12\ a\ c^5$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema decimumprimũ.

CVbo-cubus aggregati duorum laterum, minus cubo-cubo differentiæ eorundem æquatur duodecuplo solido-solido à quadrato-cubo lateris maioris, in latus minus, plus quadragecuplo solido-solido à cubo lateris maioris, in cubum lateris minoris, plus duodecuplo solido-solido à latere maiori in quadrato-cubum lateris minoris.

PROPOSITIO XII.

Propositio decimasecunda.

DIfferentiam duorum laterum in tria singularia plana, quibus constat quadratum aggregati ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Latus maius sit a, at verò minus sit c. Oporteat a − c, ducere in a^2 † a c † c^2. Fiat ductio particularis, simulque colligantur singularia solida; eruntq; illa $a^3 - c^3$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema decimumsecundum.

QVod fit ex differentia duorum laterum in tria singularia plana quibus constat quadratum aggregati ipsorum laterum semel sumpta æquale est differentiæ cuborum. Vnde.

Differentia cuborum, si applicetur ad laterum differentiam, orientur tria singularia plana, quibus constat quadratum aggregati laterum semel sumpta.

Et permutatim.

Differentia cubornm si applicetur ad tria singularia plana quibus constat quadratum aggregati laterum semel sumpta orietur differentia laterum.

PROPOSITIO XIII.

Propositio decimatertia.

AGgregatum duorum laterum in triâ singularia plana quibus constat quadratum differentiæ eorundem laterum semel sumpta, ducere.

Sit latus vnum a, alterum verò c. Oporteat a † c, ducere in a^2 − a c † c^2, fiat particularis ductio, simulque colligantur singularia solida, & illa quidem erunt a^3 † c^3. Hinc.

THEO-

THEOREMA.

QVod ſit ex aggregato duorum laterum in tria ſingularia plana, quibus conſtat quadratum differentiæ ipſorum laterum æquale eſt aggregato cuborum. Vnde ſit, vt. *Theorema decimumtertium.*

Aggregatum cuborum ſi applicetur ad aggregatum laterum oriantur tria ſingularia plana, quibus conſtat quadratum differentiæ ipſorum laterum, ſemel ſumpta.

Et permutatim.

PROPOSITIO XIV.

DIfferentiam duorum laterum in quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere. *Propoſitio decimaquarta.*

Latus maius ſit a, minus autem e. Oporteat $a - e$, ducere in $a^3 + a^2 e + a e^2 + e^3$. Particulari ductione colligantur ſingularia plano-plana, eruntque illa $a^4 - e^4$. Hinc.

THEOREMA.

QVod ſit ex differentia duorum laterum in quatur ſingularia ſolida; quibus conſtat cubus aggregati ipſorum laterum ſemel ſumpta, æquale eſt differentiæ quadrato-quadratorum. Vnde. *Theorema decimumquartum.*

Differentia duorum quadrato-quadratorum. Si applicetur ad diffentiam laterum oriuntur quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus aggregati laterum ſemel ſumpta; Et permutatim.

PROPOSITIO XV.

AGgregatum duorum laterum in quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, ducere. *Propoſitio decimaquinta.*

Oporteat ducere $a + e$, aggregatum laterum in $a^3 - a^2 e + a e^2 - e^3$. Palticulari ductione facta colligantur ſingularia plano-plana, eruntque illa $a^4 - e^4$. Hinc.

THEOREMA.

QVod ſit ex aggregato duorum laterum, in quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta æquale eſt differentia quadrato-quadratorum. Vnde. *Theorema decimumquintum.*

Differentia quadrato-quadratorum ſi applicetur ad aggregatum laterum oriuntur quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus differentiæ laterum ſemel ſumpta. Præterea.

Vt differentia laterum ad aggregatum, ita quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, ad quatuor ſingularia ſolida, quibus conſtat cubus aggregati eorundem laterum, ſemel quoque ſumpta.

PROPOSITIO XVI.

Propositio decimasexta.

DIfferentiam duorum laterum in singularia quinque plano-plana ; quibus constat quadrato-quadratum aggregati ipsorum laterum simul sumpta, ducere.

Latus maius sit a, minus autem e; Oporteat $a - e$, ducere in $a^4 \dagger a^3 e \dagger a^2 e^2 \dagger a e^3 \dagger e^4$. Fiat particularis ductio, & singularia plano-solida colligantur, ea autem erunt $a^5 - e^5$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema decimumsextū.

QVod fit ex differentia duorum laterum in quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum aggregati ipsorum laterum, semel sumpta æquale est differentiæ quadrato-cuborum. Vnde.

Differentia quadrato-cuborum si applicetur ad differentiam laterum, oriuntur quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum aggregati ipsorum laterum, semel sumpta. Et contra.

PROPOSITIO XVII.

Propositio decimaseptima.

AGgregatum duorum laterum in quinque singularia plano-plana ; quibus constat quadrato-quadratum differentiæ ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Sit latus vnum a, alterum autem e. Oporteat $a \dagger e$, ducere in $a^4 - a^3 e \dagger a^2 e^2 - a e^3 \dagger e^4$. Fiat particularis ductio, & singularia plano-solida colligantur; Erunt autem illa $a^5 \dagger e^5$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema decimūseptimū.

QVod fit ex aggregato duorum laterum in quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum differentiæ ipsorum laterum semel sumpta æquale est aggregato quadrato-cuborum. Vnde.

Aggregatum quadrato-cuborum ; si applicetur ad aggregatum laterum, orientur quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum differentiæ ipsorum laterum semel sumpta, & permutatim.

PROPOSITIO XVIII.

Propositio decimaoctaua.

DIfferentiam duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus aggregati ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Sit latus maius a, at verò minus sit e. Oporteat $a - e$, ducere in $a^5 \dagger a^4 e \dagger a^3 e^2 \dagger a^2 e^3 \dagger a e^4 \dagger e^5$. Fiat ductio particularis, & colligantur singularia solido-solida. Erunt autem illa $a^6 - e^6$. Hinc.

THEO-

THEOREMA.

QVod fit ex differentia duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus aggregati ipsorum laterum semel sumpta, est æquale differentiæ cubo-cuborum. Vnde.] *Theorema decimumoctauū*

Differentia cubo-cuborum si applicetur ad differentiam laterum orientur, sex singularia plano-solida quibus constat quadrato-cubus aggregati ipsorum semel sumpta.

PROPOSITIO XIX.

AGgregatum duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiæ ipsorum laterum semel sumpta, ducere. *Propositio decimanona.*

Latus vnum sit a, alterum autem e. Oporteat a † e, ducere in $a^5 - a^4 e \dagger a^3 e^2 - a^2 e^3 \dagger a e^4 - e^5$. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia solido-solida; Eruntque illa $a^6 - e^6$. Hinc.

THEOREMA.

QVod fit ex aggregato duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiæ ipsorum laterum semel sumpta est æquale differentiæ cubo-cuborum. Vnde. *Theorema decimumnonū.*

Differentia cubo-cuborum si applicetur ad aggregatum duorum laterum, orientur sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiæ ipsorum laterum semel sumpta. Et.

Vt differentia laterum ad aggregatum, ita sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiæ ipsorum laterum, semel sumpta, ad sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus aggregati ipsorum laterum, semel quoq; sumpta.

Hinc etiam, hæc vniuersalia Theoremata colligere, cum Vieta licet nimirum.

THEOREMA I.

QVod fit ex differentia duorum laterum in singularia homogenea, quibus constat potestas aggregati ipsorum laterum semel sumpta, est æquale differentiæ potestatum gradus proximè superioris. Vnde colligitur illud. *Theorema primum ex collectis.*

THEOREMA II.

DIfferentia potestatum si applicetur ad differentiam laterum orientur singularia homogenea, quibus constat potestas gradus proximè inferioris aggregati ipsorum laterum semel sumpta, & contra. *Theorema secundum.*

THEO-

THEOREMA III.

Theorema tertium.

DIfferentia potestatum si applicetur ad singularia homogenea, quibus constat potestas gradus proximè inferioris aggregati ipsorum laterum semel sumpta orietur differentia laterum.

THEOREMA IV.

QVod fit ex aggregato duorum laterum in singularia homogenea quibus constat potestas differentiæ ipsorum laterum, semel sumpta est æquale aggregato, vel differentiæ potestatum ordinis proximè superioris aggregato quidem si impar fuerit singularium homogeneorum numerus, differentiæ verò si par fuerit singularium homogeneorum numerus. Vnde colligitur illud,

THEOREMA V.

Theorema quartum.

AGgregatum, vel differentia potestatum, si applicetur ad aggregatum laterum orientur singularia homogenea, quibus constat potestas ordinis proximè inferioris differentiæ ipsorum laterum semel sumpta. Insuper.

THEOREMA VI.

Theorema quintum.

SI par fuerit numerus singulorum homogeneorum quibus constat potestas aggregati vel differentiæ laterum, erit vt differentia laterum ad aggregatum, ita singularia homogenea quibus constat potestas differentiæ ipsorum laterum semel sumpta ad singularia homogenea, quibus constat potestas aggregati ipsorum laterum, semel sumpta.

PROPOSITIO XX.

Theorema sextum.

DIfferentiam duorum laterum in septem singularia solido-solida, quibus constat cubo-cubus aggregati ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Latus maius sit a, at verò minus sit e. Oporteat $a - e$, ducere in $a^6 + a^5 e + a^4 e^2 + a^3 e^3 + a^2 e^4 + a e^5 + e^6$. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia plano-solida; eruntque illa $a^7 - e^7$. Hinc.

THEOREMA.

Theorema.

QVod fit ex differentia duorum laterum in septem singularia solido-solida, quibus constat cubo-cubus aggregati ipsorum laterum semel sumpta, æquale est differentiæ quadrato-quadrato-cuborum. Vnde.

PROPOSITIO XXI.

Theorema septimum.

DIfferentia quadrato-quadrato-cuborum, si applicetur ad differentiam laterum, orientur septem singularia solido-solida, quibus constat cubo-cubus aggregati ipsorum laterum, semel sumpta, & permutatim.

THEO-

PROPOSITIO XXI.

AGgregatum duorum laterum in ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus differentiæ ipſorum laterum, ſemel ſumpta ducere. *Propoſitio vigeſimaprima.*

Latus vnum ſi a, alterum autem e. Oporteat $a + b$, ducere in $a^6 + a^5 e + a^4 e^2 + a^3 e^3 + a^2 e^4 + a e^5 + e^6$.

Fiat particularis ductio, & colligantur ſingularia plano-plano-ſolida, erunt illa $a^7 - e^7$. Hinc.

THEOREMA.

QVod fit ex aggregato duorum laterum in ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta æquale eſt differentiæ quadrato-quadrato-cuborum. Vnde illud infertur. *Theorema vigeſimumprimum.*

Differentia quadrato-quadrato-cuborum, ſi applicetur ad aggregatum laterum, orientur ſeptem ſingularia ſolido-ſolida, quibus conſtat cubo-cubus differentiæ ipſorum laterum ſemel ſumpta, & permutatim.

Geneſis Poteſtatum affectarum, & primò affirmatè.

PROPOSITIO I.

QVadratum affectum adiunctione plani ſub latere adſcita congruenter ſublaterali coefficiente longitudine, componere. *Poteſtatum affectarum geneſis. Propoſitio prima.*

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens ſublateralis b, longitudo. Oporteat quadratum abs $a + e$, affectum adiunctione plani ſub b, & $a + e$, componere. Ducatur $a + e$, in $a + e + b$, & colligantur effecta ſingularia plana, eruntq; illa $a^2 + 2\,a\,e + e^2 + a\,b + e\,b$, quæ quidem æquabuntur eidem quadrato ex $a + e$, affecto adiunctione plani ex $a + e$, in b, longitudinem. Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens ſublateralis longitudo. Quadratum lateris primi, plus duplo-plano à latere primo in latus ſecundum, plus quadrato lateris ſecundi, plus plabo à latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano à latere ſecundo in eandem coefficientem longitudinem, æquatur quadrato aggregati laterum affecto adiunctione plani ſub dicto aggregato, & coefficiente longitudine. *Theorema primum.*

Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis $a + e + b$, per $a + e$.

Hinc

Plana singularia quæ compositio affecta puræ compositioni addit.

Hinc facilè colliguntur plana singularia, quæ compositio affecta puræ compositioni addit, cùm scilicet ab eadem binomia radice duo componuntur quadrata, vnum quidem purum, alterum verò affirmatè affectum sub eadem binomia radice, & adscita coefficiente longitudine. Plana verò sunt.

Planum à latere primo in coefficientem longitudinem.

Planum à latere secundo in eandem coefficientem longitudinem.

PROPOSITIO II.

Propositio secunda.

CVbum affectum adiunctione solidi sub latere à binomia radice adscito congruenter sublaterali plano coefficiente, componere.

Sit binomia radix a † e, coefficiens autem sublaterale b pl. Oporteat cubum abs a † e, affectum adiunctione solidi sub b plano, & ipsa binomia radice a † e, componere. Effingatur quadratum ex a † e, & in illud superaddito b pl. ducatur a † e. Et colligantur effecta singularia solida, eruntque illa a^3 † 3 $a^2 e$ † 3 $a e^2$ † e^3 † a b pl. † e b pl. quæ æquabuntur cubo abs a † e, affecto adiunctione solidi sub a † e, & b pl. Hinc ordinatur.

THEOREMA.

Theorema secundum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens sublaterale planum. Cubus lateris primi, plus triplo solido à quadrato lateris primi in latus secundum, plus cubo lateris secundi, plus solido à letere primo in consficiens planum, plus solido à latere secundo in idem planum coefficiens æquatur cubo aggregati laterum affecto adiunctione solidi sub aggregato prædicto, & coefficiente plano. Huius Theorematis veritas innotescit ex opere multiplicationis a^2 † 2 a e † e^2 † b pl. per a † e. Hinc.

Solida singularia, quæ compositio affecta, pura compositioni addit.

Facilè colliguntur singularia solida, quæ compositio affecta iam dicta puræ compositioni addit, cum scilicet ab eadem binomia radice duo componuntur cubi, vnus quidem purus, alter autem affectus sub eadem binomia radice, & adscito coefficiente plano-solida verò singularia sunt.

Solidum à latere primo in coefficiens planum.

Solidum in idem planum coefficiens.

PROPOSITIO III.

Propositio tertia.

CVbum affectum adiunctione solidi sub quadrato à radice binomia adscita congruenter sub quadratica longitudine, componere.

Sit binomia radix a † e, coefficiens subquadratica b, longitudo. Oporteat cubum abs a † e, affectum adiunctione solidi sub b, & quadrato abs a † e, componere. Effingatur quadratum ex a † e, illudque ducatur in a † e † b, & collihantur effecta singularia sclida, eruntque illa a^3 † 3 $a^2 e$ † 3 $a e^2$ † e^3 † $a^2 b$ † 2 a e b † $e^2 b$, quæ propterea erunt æqualia cubo ex a † e, affecto adiunctione solidi sub quadrato ipsius a † e, & longitudine b. Hinc autem.

THEO-

THEOREMA.

Geneſeos cubi affecti affirmatè ſub quadrato.

SI fuerint duo latera, ac inſuper coefficiens ſubquadratica longitudo: Cubus lateris primi, plus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, plus triplo ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratum, plus cubo lateris ſecundi, plus ſolido à lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem, plus ſolido duplo à plano ſub lateribus in coefficientem longitudinem, plus ſolido à lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem, æqualis eſt cubo ab aggregato laterum affecto adiunctione ſolidi ſub iam dicti aggregati laterum quadrato, & coefficiente longitudine. *Theorema tertium.*

Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis $a^2 + 2\,a\,e + e^2$, per $a + e + b$.

Ex his facilè conſtat quæ nam ſint ſingularia ſolida, quæ compoſitio affecta, vt dictum eſt, addit compoſitioni puræ. Sunt autem.

Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.

Solidum duplum à plano, ſublateribus in coefficientem longitudinem.

Solidum à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.

PROPOSITIO IV.

QVadrato-quadratum affectum adiunctione plano-plani ſub latere à binomia radice adſcito congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, componere. *Propoſitio quarta.*

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens ſublaterale b, ſolidum. Oporteat quadrato-quadratum ab $a + e$, affectum adiunctione plano-plani ſub $a + e$, & ipſo b, ſolido, componere. Effingatur cubus ex $a + e$, & ita in illum ſuperaddito b, ſolido ducatur $a + e$, & colligantur effecta ſingularia plano-plana. Eruntq; illa $a^4 + 4\,a^3\,e + 6\,a^2\,e^2 + 4\,a\,e^3 + e^4 + a\,b$ ſol. $+ e\,b$ ſol. Et hæc æquabuntur propterea quadrato-quadrato ipſius $a + e$, affecto adiunctione plano-plani ſub $a + e$, & ipſo b ſol. Hinc.

THEOREMA.

Geneſeos quadrato-quadrati affecti affirmatè ſub latere.

SI fuerint duo latera, & inſuper coefficiens ſolidum; Quadrato-quadratum lateris primi, plus plano-plano quadruplo à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, plus plano-plano à latere primo in coefficiens ſolidum, plus plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum, æquale eſt quadrato-quadrato aggregati laterum affecto adiunctione plano plani ſub dicto aggregato, & coefficiente ſolido. *Theorema quartum.*

Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis $a^3 + 3\,a^2\,e + 3\,a\,e^2 + e^3 + b$ ſol. per $a + e$.

 PROPO-

PROPOSITIO V.

Propositio quinta.

QVadratum affectum adiunctione plano-plani ſub cubo à radice binomia adſcito congruenter ſub cubica coefficiente longitudine, componere.

Sit binomia radix $a \dagger e$, coefficiens autem b, longitudo. Oporteat quadrato-quadratum ab $a \dagger e$, affectum adiunctione plano-plani ſub cubo ex $a \dagger e$, in b, longitudinem, componere. Effingatur cubus ex $a \dagger e$, & in illum ducatur $a \dagger e \dagger b$, & colligantur effecta ſingularia plano-plana. Eruntque illa $a^4 \dagger 4 a^3 e \dagger 6 a^2 e^2 \dagger 4 a e^3 \dagger e^4 \dagger a^3 b \dagger 3 a^2 e b \dagger 3 a e^2 b \dagger e^3 b$, quæ proinde æqualia erunt quadrato-quadrato ipſius $a \dagger e$, affecto adiunctione plano-plani ſub cubo ipſius $a \dagger e$, & ipſa b, longitudine. Hinc infertur.

THEOREMA.

Geneſeos quadrato-quadrati affecti ſub cubo, affirmatè.

Theorema quintum.

SI fuerint duo latera, & coefficiens longitudo: Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in quadratum lateris ſecundi, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, plus plano-plano à cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus triplo plano-plano à ſolido ſub quadrato lateris primi, & latere ſecundo in coefficientem longitudinem, plus plano-plano triplo à ſolido ſub latere primo, & lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem, plus plano-plano à cubo lateris ſecundi in coefficientem lungitudinem, æquatur quadrato-quadrato aggregati laterum affecto adiunctione plano-plani ſub cubo aggregati prædicti, & coefficiente longitudine.

Huius Theorematis veritas innoteſcit ex opere multiplicationis $a^3 + 3 a^2 e + 3 a e^2 + e^3$, per $a + e + b$.

Ex his manifeſtum eſt quid compoſitio affecta, vt dictum eſt, addat compoſitioni puræ, ſunt autem hæc ſingularia plano-plana.

Plano-planum à lateris primi cubo.

Plano-planum triplum factum à quadrato lateris primi in planum à latere ſecundo in coefficientem longitudinem.

Plano-planum triplum factum à latere primo in ſolidum à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.

Plano-planum à cubo lateris ſecundi in coefficientem longitudinem.

PROPOSITIO VI.

Propoſitio ſexta.

QVadrato-quadratum affectum adiunctione duplicis plano-plani, vnius ſub latere, & alterius ſub quadrato, à radice binomia adſcitis congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, & ſubquadratico coefficiente plano, componere.

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens ſublaterale b ſolidum coefficiens ſubquadraticum d planum. Oporteat quadrato-quadratum abs $a + e$, affectum adiunctione duplicis plano-plani, vnius ſub $a + e$, & b ſol. alterius ſub $a \dagger e$, quadrato, & d plano componere. Efformetur quadratum ex $a + e$, & in illud ſuperaddito

d pl.

d pl. ducatur a + e, & in effecta solida superaddito b sol. rursus ducatur a + e, colliganturque effecta singularia plano-plana, quæ quidem erunt sequentia $a^4 + 4 a^3 e + 6 a^2 e^2 + 4 a e^3 + e^4 + a^2$ d pl. $+ 2 a e$ d pl. $+ e^2$ d pl. $+$ a b sol. $+$ e b sol. Hæc igitur sunt plano-plana, quæ æquantur quadrato-quadrato ipsius a + e, affecto adiunctione plano-plani sub quadrato ipsius a + e, & d plano, & plano-plani sub a + e, & b sol. Hinc autem elicitur.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens duplex, vnum quidem planum subquadraticum, alterùm verò sublaterale solidum. Erit propterea. *Theorema sextum.*

Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus secundum, plus sextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris secundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus plano-plano à quadrato lateris primi in coefficiens planum, plus duplo plano-plano à plano sub lateribus in planum coefficiens, plus plano-plano à quadrato lateris secundi in coefficiens planum, plus plano-plano à latere primo in coefficiens solidum, plus plano-plano à latere secundo in coefficiens solidum; æquale est quadrato-quadrato aggregati laterum affecto adiunctione duplicis plano plani vnius sub quadrato aggregati laterum, & coefficiente plano, alterius sub aggregato laterum, & coefficiente solido. Huius Theorematis veritas ex opere multiplicationis innotescit. Hinc,

Patet quid prædicta compositio affecta addat puræ &c.

PROPOSITIO VII.

QVadrato-cubum affectum adiunctione plano-solidi sub latere à radice binomia adscito congruenter sublaterali plano-plano, componere. *Propositio septima.*

Sit binomia radix a + e, coefficiens subtaterale b plano-planum. Oporteat componere quadrato-cubum ab a + e, affectum adiunctione plano-solidi sub a + e, & b plano-plano. Componatur quadrato-quadratum ab a + e, & in illud superaddito b plano-plano ducatur a + e, colliganturque effecta singularia plano-solida. Eruntque illa $a^5 + 5 a^4 e + 10 a^3 e^2 + 10 a^2 e^3 + 5 a e^4 + e^5 +$ a b pl. pl. $+$ e b pl. pl. quæ æquabuntur quadrato-cubo ipsius a + e, affecto adiunctione plano solidi sub a + e, & b pl. pl. hinc autem colligitur.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & insuper coefficiens sublaterale plano-planum; Quadrato-cubus lateris primi, plus quintuplo plano-solido à quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum, plus decuplo plano-solido à cubo lateris primi in lateris secundi quadratum, plus decuplo plano-solido à quadrato lateris primi in lateris secundi cubum, plus quitupio plano-solido à latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum, plus quadrato-cubo lateris secundi, plus plano-solido à latere primo in coefficiens plano-planum, plus plano-solido à latere secundo in coefficiens plano-planum æqualis est quadrato-cubo aggregati laterum affecto adiunctione plano-solidi sub aggregato laterum, & coefficiente plano-plano. Huius Theorematis veritas ex opere multiplicationis innotescit. *Theorema septimum.*

PROPOSITIO VIII.

Propositio octaua.

QVadrato-cubum affectum adiunctione plano-solidi sub cubo à radice binomia adscito congruenter subcubico coefficiente plano, componere.

Sit binomia radix a ✠ e, subcubicum verò coefficiens b planum. Oporteat quadrato-cubum ex a ✠ e, affectum adiunctione plano-solidi sub a ✠ e, cubo, & b plano, componere. Sumatur quadratum ex a ✠ e, & in illud superaddito b plano, ducatur cubus ex a ✠ e, & colligantur effecta singularia plano-solida, eruntq; illa a^5 ✠ 5 a^4 e ✠ 10 a^3 e^2 ✠ 10 a^2 e^3 ✠ 5 a e^4 ✠ e^5 ✠ a^3 b pl. ✠ 3 a^2 e b pl. ✠ 3 a e^2 b pl. ✠ e^3 b pl. Hinc.

THEOREMA.

Theorema octauum.

SI fuerint duo latera, & coefficiens planum; Quadrato-cubus lateris primi, plus quintuplo plano-solido à quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum, plus decuplo plano-solido à cubo lateris primi in lateris secundi quadratum, plus decuplo plano-solido à quadrato lateris primi in lateris secundi cubum, plus quintuplo plano-solido à latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum, plus quadrato-cubo lateris secundi, plus plano-solido à cubo lateris primi in coefficiens planum, plus triplo plano-solido à solido subquadrato lateris primi, & latere secundo in coefficiens planum, plus triplo plano-solido à solido sub latere primo, & lateris secundi quadrato in coefficiens planum, plus plano-solido à cubo lateris secundi in planum coefficiens æqualis est quadrato-cubo aggregati laterum affecto adiunctione plano-solidi sub plano coefficiente, & cubo aggregati laterum. Huius autem Theorematis veritas ex opere multiplicationis innotescit.

PROPOSITIO IX.

Propositio nona.

CVbo-cubum affectum adiunctione solido-solidi sub latere à binomia radice adscito congruenter sublaterali coefficiente plano-solido, componere.

Sit binomia radix a ✠ e, coefficiens autem sublaterale b plano-solidum. Oporteat cubo-cubum ab a ✠ e, affectum adiunctione solido-solidi ex a ✠ e, in b plano-solidum, componere. Sumatur quadrato-cubus ab a ✠ e, & in illum superaddito b plano-solido, ducatur a ✠ e, & colligantur effecta singularia solido-solida; eruntque illa a^6 ✠ 6 a^5 e ✠ 15 a^4 b^2 ✠ 20 a^3 e^3 ✠ 15 a^2 e^4 ✠ 6 a e^5 ✠ e^6 ✠ a b pl. sol. ✠ e b pl. sol. quæ quidem æquabuntur cubo-cubo ex a ✠ e, plus solido-solido ex a ✠ e, in b plano-solidum. Hinc.

THEOREMA.

Theorema nonum.

SI fuerint duo latera vna cum coefficiente sublaterali plano-solido. Cubo-cubus lateris primi, plus sextuplo solido-solido à quadrato-cubo lateris primi in latus secundum, plus decuquintuplo solido-solido à quadrato-quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum, plus vigecuplo solido-solido à cubo lateris primi in lateris secundi cubum, plus decuquintuplo solido-solido à quadrato lateris primi in lateris secundi quadrato-quadratum, plus sextuplo solido-solido à latere primo

in la-

in lateris secundi quadrato-cubum, plus cubo-cubo lateris secundi, plus solido-solido à latere primo in coefficiens plano-solidum, plus solido-solido à latere secundo in coefficiens plano-solidum æqualis est cubo-cubo aggregati laterum, affecto adiunctione solido-solidi sub coefficiente plano-solido, & aggregato laterum. Theorematis veritas ex opere multiplicationis innotescit.

Genesis Potestatum affectarum negatè.

PROPOSITIO I.

QVadratum affectum multa plani sub latere à binomia, radice adscito congruenter sublaterali coefficiente longitudine, componere. *Propositio prima.*

Sit binomia radix a ✠ e; coefficiens sublateralis b longitudo. Oporteat quadratum abs a ✠ e, affectum multa plani sub a ✠ e, & b longitudine, componere. Ducatur a ✠ e, in a ✠ e — b, & erunt effecta plana a² ✠ 2 a e ✠ e² — a b — e b, quæ quidem æquabuntur quadrato ipsius a ✠ e, affecto multa plani ex a † e, in b longitudinem; Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, vna cum coefficiente sublaterali longitudine: Quadratum lateris primi, plus duplo plano à latere primo in latus secundum, plus quadrato lateris secundi, minus plano à latere primo in coefficientem longitudinem minus plano à latere secundo in coefficientem longitudinem, æquale est quadrato aggregati laterum, affecto multa plani sub dicto aggregato, & coefficiente longitudine. *Theorema primum.*

PROPOSITIO II.

CVbum affectum multa solidi sub latere à radice binomia, adscito congruenter sublaterali coefficiente plano, effingere. *Propositio secunda.*

Sit binomia radix a ✠ e, coefficiens autem sublaterale b pl. Oporteat cubum abs a ✠ e, affectum multa solidi ex a ✠ e, in b pl. effingere. Componatur quadratum ex a ✠ e, & in illud multatum b plano, ducatur a ✠ e. Colligantur autem effecta singularia solida. Eruntque illa a³ ✠ 3 a² e ✠ 3 a e² ✠ e³ — a b pl. — e b pl. & æquabuntur cubo ipsius a ✠ e, affecto multa solidi ex a ✠ e, in b planum. Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens sublaterale planum Cubus lateris primi, plus triplo solido à quadrato lateris primi in latus secundum, plus triplo solido à latere primo in lateris secundi quadratum, plus cubo lateris secundi, minus solido à latere primo in coefficiens planum, minus solido à latere secundo in planum coefficiens est æqualis cubo aggregati laterum affecto multa solidi sub coefficiente plano, & aggregato laterum. Theorematis veritas ex opere multiplicationis innotescit. *Theorema secundum.*

PROPO-

PROPOSITIO III.

Propositio tertia.

CVbum affectum multa solidi sub quadrato, à radice binomia, adscito congruenter coefficiente subquadratica longitudine, componere.

Sit binomia radix a + e, coefficiens autem subquadratica sit b longitudo. Oporteat cubum ex a + e, affectum multa solidi sub a + e, quadrato, & b longitudine, componere. Effingatur quadratum ex a + e, & illud ducatur in a + e — b, & colligantur effecta singularia solida, eruntque illa $a^3 + 3\,a^2 e + 3\,a\,e^2 + e^3 - a^2 b - 2\,a\,e\,b - e^2 b$. Quæ quidem æqualia erunt a + e, cubo affecto multa solidi abs a + e, quadrato in b longitudinem. Hinc,

THEOREMA.

Theorema tertium.

SI fuerint duo latera, & insuper coefficiens subquadratica longitudo, Cubus lateris primi, plus triplo solido à quadrato lateris primi in latus secundum, plus triplo solido à latere primo in lateris secundi quadratum, plus cubo lateris secundi, minus solido à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem, minus solido duplo à plano sub lateribus in coefficientem longitudinem, minus solido à quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem, æquabitur cubo aggregati laterum affecto multa solidi sub coefficiente longitudine, & quadrato aggregati laterum.

Generis Potestatum affectarum negatè mixtim, & affirmatè.

PROPOSITIO I.

Propositio prima.

QVuadrato-quadratum affectum adiunctione plano-plani sub latere, multa verò plano plani sub cubo à radice binomia, adscito congruenter sublaterali coefficiente solido, & subcubica coefficiente longitudine, componere;

Sit binomia radix a + e, coefficiens sublaterale b solidum, coefficiens subcubica d longitudo. Oporteat quadrato-quadratum ex a + e, affectum adiunctione plano-plani ex a + e, in b solidum; multa verò plano-plani abs a + e, cubo in d longitudinem, componere. Ducatur quadratum ex a + e, in a + e — d, & in effecta solida superaddito b solido, ducatur a + e, & colligantur singularia effecta plano-plana, eruntque illa $a^4 + 4\,a^3 e + 6\,a^2 e^2 + 4\,a\,e^3 + e^4 - a^3 d - 3\,a^2 e\,d - 3\,a\,e^2 d - e^3 d + a\,b$ sol. $+ e\,b$ sol. Quæ quidem æqualia erunt quadrato-quadrato abs a + e, affecto multa plano-plani ex a + e, cubo in d, longitudinem, & adiunctione plano-plani ex a + e, radice in b solidum. Hinc,

THEOREMA

Theorema primum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens cubica longitudo atq. etiam coefficiens sublaterale solidum, Quadrato quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus secundum, plus sextuplo plano-plano à longitu-

quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi minus plano-plano à cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, minus triplo plano-plano à ſolido ſub quadrato lateris primi, & latere ſecundo in coefficientem longitudinem, minus triplo plano-plano à ſolido ſub latere primo, & lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem minus plano-plano à cubo lateris ſecundi in coefficientem longitudinem, plus plano-plano, à latere primo in coefficiens ſolidum, plus plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum, æquatur quadrato-quadrato aggregati laterum affecto multa plano-plani ſub cubo aggregati laterum; & coefficiente longitudine, adiunctione verò plano-plani ſub aggregato eodem, & coefficiente ſolido.

PROPOSITIO II.

QVadrato-quadratum affectum multa plano-plani ſub latere adiunctione verò plano-plani ſub cubo, à binomi radice adſcitis congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, & ſubcubica coefficiente longitudine, componere. *Propoſitio ſecunda.*

Sit binomia radix $a + e$, coefficiens ſublaterale b ſol. coefficiens ſubcubica d longitudo. Oporteat ex $a + e$, quadrato-quadratum affectum multa plano-plani ſub $a + e$, & b ſolido, & adiunctione plano-plani ſub $a + e$, cubo, & d longitudine, componere. Ducatur quadratum ex $a + e$ in $a + e + d$, & in effecta ſolida multata b ſolido; ducatur $a + e$, & orta plano-plana erunt $a^4 + 4\,a^3\,e + 6\,a^2\,e^2 + 4\,a\,e^3 + e^4 + a^3\,d + 3\,a^2 e\,d + 3\,a\,e^2\,d + e^3\,d - a\,b$ ſol. $- e\,b$ ſol. quæ quidem æquabuntur quadrato-quadrato ex $a + e$, affecto adiunctione plano-plani ſub $a + e$, cubo, & longitudine, & multa plano-plani ſub $a + e$, radice, & ipſo b ſolido. Hinc autem.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & inſuper coefficiens ſubcubica longitudo, atque etiam coefficiens ſublaterale ſolidum; Quadrato-quadratum lateris primi, plus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus ſecundum, plus ſextuplo plano-plano à quadrato lateris primi in lateris ſecundi quadratum, plus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris ſecundi cubum, plus quadrato-quadrato lateris ſecundi, plus plano-plano à cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus triplo plano-plano à ſolido ſub quadrato lateris primi, & latere ſecundo in coefficientem longituninem, plus plano-plano triplo à ſolido ſub latere, primo, & lateris ſecundi quadrato in coefficientem longitudinem, plus plano-plano à cubo lateris ſecundi in coefficientem longitudinem minus plano-plano à latere primo in coefficiens ſolidum minus plano-plano à latere ſecundo in coefficiens ſolidum æquatur quadrato-quadrato aggregati laterum affecto adiunctiue plano-plani ſub cubo aggregati laterum, & coefficiente longitudine, multa verò plano-plani ſub ipſo laterum aggregato, & coefficiente ſolido. *Theorema ſecundum.*

PROPOSITIO III.

QVadrato-cubum affectum adiunctione plano-ſolidi ſub latere, & multa plano-ſolidi ſub cubo à binomia radice adſcitis congruenter ſublaterali coefficiente *Propoſitio tertia.*

plano-

plano-plano, & subcubico coefficiente plano, componere.

Sit binomia radix a ✠ e, coefficiens sublaterale b plano-planum; subcubicum coefficiens d planum. Effingendus verò sit quadrato-cubus ab a ✠ e, affectus adiunctione plano-solidi sub a ✠ e, radice, & b plano-plano, multa verò plano-solidi sub a ✠ e, cubo, & d plano, componatur quadratum ab a ✠ e, & in illud multatum d plano, ducatur idem quadratum ab a ✠ e, & orta plano-plana augeantur b plano-plano, & ducantur in a ✠ e, orientur hæc plano-solida a^5 ✠ 5 a^4 e ✠ 10 a^3e^2 ✠ e^5 ✠ 10 a^2 b^3 ✠ 5 a e^4 ✠ e^5 — a^3 d pl. — 3 a^2 e d pl. — 3 a e^2 d pl. — e^3 d pl. ✠ a b pl. pl. ✠ e b pl pl. Hinc.

THEOREMA.

Theorema tertium.

SI fuerint duo latera, & insuper subcubicum coefficiens planum, nec non, & sublaterale coefficies plano-planum Quadrato-cubus lateris primi, plus quintuplo plano-solido à quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum, plus decuplo plano-solido à cubo lateris primi in lateris secundi quadratum, plus decuplo plano-solido à quadrato-lateris primi in lateris secundi cubum, plus quintuplo plano-solido à latere primo in lateris secundi quadratoquadratum, plus quadrato-cubo lateris secundi, minus plano-solido à cubo lateris primi in coefficiens planum, minus triplo plano-solido à solido subquadrato lateris primi, & latere secundo in coefficiens planum, minus plano-solido à solido sub latere primo, & lateris secundi quadrato in coefficiens planum, minus plano-solido à cubo lateris secundi in coefficiens planum, plus plano-solido à latere primo in coefficiens plano-planum, plus plano-solido à latere secundo in coefficiens plano-planum æquatur quadrato-cubo aggregati laterum affecto multa plano-solidi sub cubo aggregati laterum, & coefficiente plano adiunctione verò plano solidi sub aggregato laterum, & coefficiente plano-plano.

Genesis potestatum auulsarum.

PROPOSITIO I.

Propositio prima.

PLanum sub latere, affectum multa quadrati à binomia radice adscita congruenter sublaterali coefficiente longitudine, componere.

Sit binomia radix a † e, sublateralis coefficiens b longitudo. Oporteat planum sub a † e, & b longitudine affectum multa a † e, quadrati, componere. Ducatur b — a — e, in a † e, & orientur singularia plana a b † e b — a^2 — 2 a e — e^2. Et hinc ordinatur.

THEOREMA.

Theorema primum.

SI fuerint duo latera, atque etiam sublateralis coefficiens longitudo, Planum à latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano à latere secundo in coefficientem longitudinem, minus quadrato lateris primi, minus duplo plano sub lateribus, minus quadrato lateris secundi, æquatur plano sub aggregato laterum, & coefficiente illa, affecto multa quadrati ab aggregato laterum.

PROPO-

PROPOSITIO II.

SOlidum ſub latere affectum multa cubi, à binomia radice, adſcito congruenter ſublaterali coefficiente plano, effingere. *Propoſitio ſecunda.*

Sit binomia radix a † e, ſublaterale coefficiens b pl. Effingendum ſit ſolidum ſub a † e, & b pl. affectum multa cubi ex a † e. Ducatur a † e, in b planum, multetur a † e cubo. Orientur ſolida a b pl. † e b pl. — a^3 — 3 a^2 e — 3 a e^2 — e^3. Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, vna cum coefficiente ſublaterali plano; Solidum à latere primo in coefficiens planum, plus ſolido à latere ſecundo in coefficiens planum minus cubo lateris primi, minus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, minus triplo ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratum, minus cubo lateris ſecundi, æquatur ſolido ſub aggregato laterum, & coefficiente ſublaterali plano, affecto multa cubi ab eodem aggregato laterum. *Theorema ſecundum.*

PROPOSITIO III.

SOlidum ſub quadrato affectum multa cubi à binomia radice, adſcita congruenter ſubquadratica coefficiente longitudine, effingere. *Propoſitio tertia.*

Sit binomia radix a † e, ſubquadratica coefficiens b longitudo. Oporteat ſolidum ſub a † e, quadrato, & b longitudine, affectum multa cubi ab a † e, componere. In a † e, quadratum, ducatur b — a — e, & orientur ſolida a^2 b † 2 a e b † e^2 b — a^3 — 3 a^2 e — 3 a e^2 — e^3. Hinc.

THEOREMA.

SI fuerint duo latera, & ſubquadratica coefficiens longitudo; Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem, plus duplo ſolido à plano ſub lateribus in coefficientem longitudinem, plus ſolido à quadrato lateris ſecundi in coefficientem longitudinem, minus cubo lateris primi, minus triplo ſolido à quadrato lateris primi in latus ſecundum, minus triplo ſolido à latere primo in lateris ſecundi quadratum, minus cubo lateris ſecundi, eſt æquale ſolido ſub quadrato aggregati laterum, & coefficiente longitudine, affecto multa cubi ab aggregato laterum. *Theorema tertium.*

PROPOSITIO IV.

PLano-planum ſub latere affectum multa quadrato-quadrati à binomia radice, adſcito congruenter ſublaterali coefficiente ſolido, componere. *Propoſitio quarta.*

Sit binomia radix a † e, coefficiens sublaterale b solidum. Oporteat componere plano planum ex b solido in a † e, affectum multa a † e, quadrato-quadrati. Auferatur a † e, cubus, ex ipso b solido, & ducatur in a † e. Orientur plano-plana a b sol. † e b sol. $- a^4 - 4\, a^3 e - 6\, a^2 b^2 - 4\, a e^3 - e^4$, & Hinc ordinabitur &c.

THEOREMA.

Theorema quartum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens solidum Plano-planum à latere primo in coefficiens solidum, plus plano-plano à latere secundo in coefficiens solidum, minus quadrato-quadrato lateris primi, minus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus secundum, minus sextuplo plano plano à quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum, minus quadruplo plano-plano à latere primo in lateris secundi cubum, minus quadrato-quadrato lateris secundi, æquatur plano-plano ex aggregato laterum in coefficiens solidum, affecto multa quadrato-quadrati ex predicto laterum aggregato.

PROPOSITIO V.

Propositio quinta.

PLano-planum sub cubo, affectum multa quadrato-quadrati à binomia radice, adscita congruenter subcubica coefficiente longitudine, effingere.

Esto binomia radix a † e, subcubica verò coefficiens b longitudo. Oporteat solidum ab a † e, cubo, & ipsa b longitudine affectum multa quadrato-quadrati ab a † e, componere. Ducatur b — a — e, in a † e, cubum, & efficientur singularia plano-plana $a^3 b$ † $3\, a^2 e b$ † $3\, a e^2 b$ † $e^3 b - a^4 - 4\, a^3 e - 6\, a^2 e^2 - 4\, a e^3 - e^4$. Hinc autem,

THEOREMA.

Theorema quintum.

SI fuerint duo latera, & præterea coefficiens longitudo Plano-planum à cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus triplo plano-plano à solido sub quadrato lateris primi, & latere secundo, in eandem coefficientem longitudinem, plus triplo plano-plano à solido sub latere primo, & lateris secundi quadrato, in eandem longitudinem, plus plano-plano à cubo lateris secundi in eandem longitudinem, minus quadrato-quadrato lateris primi, minus quadruplo plano-plano à cubo lateris primi in latus secundum, minus sextuplo plano-plano à quadrato lateris primi, in lateris secundi quadratum, minus quadruplo plano-plano à latere primo, in lateris secundi cubum, minus quadrato-quadrato lateris secundi, æquatur plano-plano sub coefficiente longitudine, & cubo aggregati laterum, affecto multa quadrato-quadrati aggregati laterum.

MONITUM.

ATque hunc in modum licet procedere ad altissimos gradus in infinitum; similitudine enim eorum, quæ superiùs attulimus cætera deinceps tractanda forent.

SCHO-

SCHOLION.

HAEC autem præsertim conducunt ad resolutionem numerosam Potestatum, de qua superiùs, in prima nimirum huius Operis parte, disseruimus.

Vt si supponamus potestatem puram, verbigratia quadratum, atque sit eius analysis instituenda; Id verò vt suo loco diximus beneficio speciosæ consequemur; supposito quod requisita radix binomia sit, hoc est duobus nominibus constet, in cuius gratiam hanc genesin Potestatum purarum adjecimus; hinc enim facilè constat quomodo sit numerosæ Potestatis, puræ Analysis instituenda. *Analysis numerosa potestatis beneficio speciosæ comparatur.*

Radix	$a \dagger e$	R
Radix	$a \dagger e$	R
	$a e \dagger e^2$	
	$a^2 \dagger a e$	
Quadratum	$a^2 \dagger 2 a e \dagger e^2$	Q
Radix	$a \dagger e$	
	$a^2 e \dagger 2 a e^2 \dagger e^3$	
	$a^3 \dagger 2 a^2 e \dagger a e^2$	
Cubus	$a^3 \dagger 3 a^2 e \dagger 3 a e^2 \dagger e^3$	C
Radix	$a \dagger e$	
	$a^3 e \dagger 3 a^2 e^2 \dagger 3 a e^3 \dagger e^4$	
	$a^4 \dagger 3 a^3 e \dagger 3 a^2 e^2 \dagger a e^3$	
Quadrato-quadratum	$a^4 \dagger 4 a^3 e \dagger 6 a^2 e^2 \dagger 4 a e^3 \dagger e^4$	QQ
Radix	$a \dagger e$	
	$a^4 e \dagger 4 a^3 e^2 \dagger 6 a^2 e^3 \dagger 4 a e^4 \dagger e^5$	
	$a^5 \dagger 4 a^4 e \dagger 6 a^3 e^2 \dagger 4 a^2 e^3 \dagger a e^4$	
Quadrato-cubus	$a^5 \dagger 5 a^4 e \dagger 10 a^3 e^2 \dagger 10 a^2 e^3 \dagger 5 a e^4 \dagger e^5$	QC
Radix	$a \dagger e$	
	$a^5 e \dagger 5 a^4 e^2 \dagger 10 a^3 e^3 \dagger 10 a^2 e^4 \dagger 5 a e^5 \dagger e^6$	
	$a^6 \dagger 5 a^5 e \dagger 15 a^4 e^2 \dagger 10 a^3 e^3 \dagger 5 a^2 e^4 \dagger a e^5$	
Cubo-cubus	$a^6 \dagger 6 a^5 e \dagger 10 a^4 e^2 \dagger 20 a^3 e^3 \dagger 15 a^2 e^4 \dagger 6 a e^5 \dagger e^6$	CC

Si igitur data potestas quadratum fuerit, constat illud si sit à binomia radice, constat inquam quadrato nominis primi, plus duplo plano sub lateribus, seu nominibus, plus quadrato secundi nominis, adeo vt latus vniuersum constans duobus singularibus lateribus, in se quadraticè ductum faciat, potestatem, quæ commemoratis planis constet, ac ad id instituenda erit analysis, iuxta ea, quæ suo loco tradidimus. *Quibus planis constet potestas quæ quadratum dicitur.*

Propositum sit latus quadratum ex 4096, elicere: facta signatione per puncta, vt agentes de interpunctione analytica docuimus, cùm deprehensum fuerit radicem esse binomiam, atque duobus singularibus lateribus constare; in memoriam est redigendum Theorema syntheticum, vnde deprehenditur, si radix vniuersa fuerit a, & e, quadratum constare a^2 † *Exemplum.*

2 a e † e^2, hoc est quadrato primi nominis, plus duplo rectangulo sub ipsis nominibus, plus quadrato secundi nominis; Atque adeo primum est inquirendum nomen primum; & procedendum, vt ex Paradigmate elicitur.

Non secus intelligendum de alijs potestatibus altioribus.

De Radicum extractione.

CAPVT VII.

De radicum extractione superiùs actū est, obiter propterea hic ex instituto rursus eadem de re differitur. Cui perspecta est ratio extractionis radicis ex numeris, eidem quoque constat quod hoc in loco tractandum assumitur.

HAC de re superiùs etiam, etsi obiter tractauimus, nunc iterum diligentiùs: præsertim cùm hoc loco de extractione quoque radicis ex fractionibus habendus sit sermo, cæterum vt superiùs quoque adnotauimus.

Qui modum extrahendi radicem ex numeris vulgaribus nouerit, facilè quidem intelliget, vt opinor, qua via in his magnitudinibus procedendum sit ad radicis extractionem. Est autem radicis extractio, quædam diuisionis species. Si enim consideremus naturam ipsius, persimilem diuisioni reperiemus; extrahendo siquidem radicem ex proposita magnitudine nos reperiemus, magnitudinem ad quam propositam magnitudinem cuius, radicem quærimus, dum applicamus, ipsi ortiuæ magnitudini esse æqualem. Dum enim ex 625, radicem quadratam eruere contendimus, certè nil aliud agendum suscipimus, quàm diuidere 625, per quendam numerum, puta per 25, itaut ex huiusmodi diuisione proueniat itidem 25, & vt 25, ductus in 25, facit 625, cuius radix siue latus quadratum dicitur 25, ita, & radice quadrata extracta ex 625, proueniet rursus 25, & ita de radicibus alijs, puta cubica &c. Quæ vt rei propositæ sint accommodata. Quæmadmodum a, ductum in a, facit a^2, cuius radix, siue latus dicitur a, ita radice quadrata extracta ex a^2, proueniet rursus a. Non dissimiliter cum a^2, multiplicatum per a, producit a^3, nempe cubum ex a; Ita quoque extracta radice cubica ex a^3, fit a. Et sic de cæteris radicibus.

Exemplis res illustratur speciebus adhibitis.

Quamobrem si proponatur a^2, cuius radix quadrata quæritur, illa quidem erit a, nam hæc in se ducta producit a^2. Si verò foret a^3, eius radix esset itidem a; nam hæc in se cubicè ducta facit a^3. Non dissimili modo procedendum erit in quantitatum compositarum extractione, vt enim ex quantitatibus simplicibus radicis extractio, non secus se habet, ac radicis extractio ex aliquo numero, qui vniùs tantùm sit characteris, ita radix quantitate existente composita, non dissimiliter extrahetur, ac si ex aliquo numero, radix eliceretur, dum numerus ille pluribus notis constaret.

Proponitur extrhenda radix ex binomio.

Itaque si radicem quadratam elicere deberemus ex hoc trinomio a^2 † 2 a c † c^2.

Primò extrahi debet radix ex a^2, eaque erit a, quæ quidem in se ducta producit a^2, quo dempto ex a^2, remanet o; vt in paradigmate cernitur. Modo autem multiplicetur a, per 2, fit 2 a, per quod si diuidatur ✠ 2 a c, fit ✠ e, quod adscribendum est priori radici inuentæ a, vt fiat a ✠ e, multiplicetur autem 2 a, per e, fiet productum ✠ 2 a e, subtrahendum ex 2 a e, superest autem tantummodo ✠ e^2. Ob id quadraticè ducatur in se ✠ e, secundum nomen extractæ radicis, primo existente nomine a, & fiet ✠ e^2, quo subtracto ex ✠ e^2, remanet o,

a^2 ✠ 2 a c ✠ e^2
a^2 ✠ 2 a e ✠ e^2
————————
Radix a ✠ e
—— ✠ 2 a c | ✠ e
Diuisor 2 a ✠ 2 a |

a ✠ c
a ✠ e
————
a c ✠ c^2
a^2 ✠ a c
————————
a^2 ✠ 2 a c ✠ e^2

quamo-

quamobrem quæſita radix erit $a + e$, hæc enim in ſe quadraticè ducta producit $a^2 + 2ae + e^2$, vt ex paradigmate conſtat.

Quod ſi alijs vtamur characteribus nihil refert.

Nihil refert alijs vti caracteribus.

Nos in prima huius Operis parte vti conſueuimus vocalibus, ad ſignificandas quantitates ignotas, ob id ſic ſe habet hypotheſis a, nimirum eſt primum nomen, at verò e, eſt ſecundum, itaque binomia radix, vtpote conſtans ex duobus nominibus eſt $a + e$, cuius quadratum eſt $a^2 + 2ae + e^2$, eadem autem præcepta forent obſeruanda, ſi vteremur a, & b, vel alijs quibuſcunque literis &c.

Cubica radix ex composita quãtitate proponitur extrahenda.

Propoſitum ſit ex quantitate compoſita cubicam radicem extrahere, & propoſita quantitas ſit $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$.

$$a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$$
$$a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Radix $a + e$

Diuiſor $3a^2$

$+ 3a^2e \mid + e$
$+ 3a^2$

Primò ſumatur cubica radix ex a^3, eaque eſt a, quæ in ſe cubicè ducta facit a^3, quo ſubtracto ex a^3, nihil remanet. Deinde diuidatur $3a^2e$, per $3a^2$, triplum quadratum ipſius a^2, & fit quotiens e, nempe ſecundum nomen vniuerſæ radicis primo exiſtente a, ducatur autem e, in $3a^2$, fit productum $3a^2e$, quo ſubtracto ex $3a^2e$, nihil remanet. Mox verò ducatur $3a$, triplum primi nominis in e^2, quadratum ſecundi nominis, & fit $3ae^2$, quo ſubtracto ex $3ae^2$, nihil remanet; Denique ducatur e, in ſe cubicè, & fiet e^3; quo ſubtracto ex e^3, remanet nihil; Atq; adeo hunc in modum ad finem operationis peruentum eſt.

Cum radix binomia fuerit quid obſeruandum.

Cæterùm hic obſerua, cùm radix fuerit binomia; nomina ipſa eſſe latera poteſtatum, quibus conſtat id, cuius radix quæritur, & quidem latera illius denominationis, quam poteſtates ipſæ denotant, vt cùm fuerit $a^2 + 2ae + e^2$, quæratur autem eius radix quadrata; quoniam autem poteſtates quibus conſtat propoſita magnitudo, eſt a^2, & e^2, propterea, quærantur latera quadrata ipſorum a^2, & e^2, quæ ſunt a, & e, connectantur ſigno +, & fiet $a + e$, hæc igitur erit radix quadrata propoſitæ magnitudinis.

Operationis comprobatio.

Operationis comprobatio ſic ſe habet.

$$a + e$$
$$a + e$$
$$ae + e^2$$
$$a^2 + ae$$
$$a^2 + 2ae + e^2$$
$$a + e$$
$$a^2e + 2ae^2 + e^3$$
$$a^3 + 2a^2e + ae^2$$
$$a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$$

Vides enim ſi ducatur in ſe quadratice $a + e$, radix iam dicta; fieri $a^2 + 2ae + e^2$, quod ſi ducatur in $a + e$, fieri $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$.

Nec diſſimiliter ſi propoſita magnitudo foret $a^3 + 3a^2e + 3ae^2 + e^3$, eius enim radix eſſet $a + e$, & eodem modo, quicunque adhibeantur characteres. At ſi propoſitum foret ex $a^4 + 2a^2e^2 + e^4$, radicem quadratam extrahere.

Superiora illuſtrãtur exẽplis.

Sumatur primò radix quadrata ex a^4, eaque eſt a^2, cuius quadratum eſt a^4.

Deinde accepto duplo huius nominis a^2, illud eſt $2a^2$, per illud diuidatur $2a^2e^2$, fiet quotient e^2, eritque ſecundum quæſitæ radicis nomen, itaut binomia radix ſit $a^2 + e^2$, ducatur $2a^2$, in e^2, fit productum $2a^2e^2$, quo ſubtracto ex $2a^2e^2$, nihil remanet, mox verò ducatur e^2, in ſe quadraticè, fit e^4, quo ſubtracto ex e^4 nihil remanet, atque ita ad extremum operationis peruentum eſt.

$$a^4 + 2a^2e^2 + e^4$$
$$a^4 + 2a^2e^2 + e^4$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$

Radix $a^2 + e^2$ $\qquad 2a^2e^2 \mid e^2$

Diuiſor $2a^2$ $\qquad 2a^2$

Compro-

Comprobatio operationis multiplicationis præsidio.

Comprobatur autem multiplicationis præsidio; si enim $a^2 + e^2$, ducatur in se quadraticè, producitur $a^4 + 2\,a^2 e^2 + e^4$, quod requirebatur.

$$\begin{array}{rrr} & a^2 & + \; e^2 \\ & a^2 & + \; e^2 \\ \hline & a^2 e^2 & + \; e^4 \\ a^4 \; + & a^2 e^2 & \\ \hline a^4 \; + & 2\,a^2 e^2 & + \; e^4 \end{array}$$

Rursus eadē declaratur alijs exemplis.

Ita si quadratum foret $a^4 - 2\,a^2 b^2 + b^4$, cuius radix quadrata desideretur, illa quidem erit $a^2 - b^2$, non secus enim elicietur, ac superior ex binomio simili, in quo tantùm intercedebat signum affirmatiuum, hìc igitur solum habenda est ratio signi negatiui.

$$\begin{array}{llll} & a^4 & - \; 2\,a^2 b^2 & + \; b^4 \\ & a^4 & - \; 2\,a^2 b^2 & + \; b^4 \\ \hline & o & o & o \\ \text{Radix} & a^2 - b^2 & - \; 2\,a^2 b^2 \,| & - \; b^2 \\ \text{Diuisor} & 2\,a^2 & \dagger\; 2\,a^2 & | \end{array}$$

Quando proponuntur numeri.

Ita quoque in numeris, si foret extrahenda radix ex $64\,a^2 + 160\,a + 100$, extracto latere quadrato ex $64\,a^2$, nempe $8\,a$; atq; diuiso $160\,a$, per $16\,a$, duplum ipsius $8\,a$, proueniet radix vniuersa $8\,a + 10$, constans ex duobus nominibus $8\,a$, & 10, connexis per signum $+$, quemadmodum fit $8\,a - 10$, radix ipsius $64\,a^2 - 160\,a + 100$, solum enim fit differentia in signis $+$, & $-$.

Exemplum ad idem.

$$\begin{array}{ll} & 64\,a^2 + 160\,a + 100 \\ \hline \text{Radix} & 8\,a + 10 \\ \hline \text{Diuisor} & 16\,a \\ \text{Vel fit} & 64\,a^2 - 160\,a + 100 \\ \hline \text{Radix} & 8\,a - 10 \\ \hline \text{Diuisor} & 16\,a \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} a^2 + & 2\,a\,c + & c^2 + & 2\,a\,b + & 2\,b\,c + & b^2 \\ a^2 + & 2\,a\,c + & c^2 + & 2\,a\,b + & 2\,b\,c + & b^2 \\ \hline o & o & o & o & o & o \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Radix} & a + c + b & \\ \text{Primus diuisor} & & 2\,a \\ \text{Quadratum} & a^2 & \dfrac{a + c}{2} \\ \text{Radix} & a & \\ & & 2\,a + 2\,c \;\; \text{Secundus diuisor} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2\,a\,c \,|\, \dagger\, c \\ 2\,a \;\;\, | \\ 2\,a\,b \;\dagger\; 2\,b\,c \,|\, \dagger\, b \\ 2\,a \;\;\;\, \dagger\; 2\;\;\, c \,| \end{array}$$

Hac itaq; lege procedendum in huiusmodi radicum extractionibus. Vbi obserua producta facta à quotientibus in diuisores subtrahenda esse à proposito plurinomio, itaut ijs, & singulorum nominorum potestatibus inde subtractis nihil remaneat. Hæc enim est vniuersalis extrahendarum radicum lex, vt ex dictis perspicuum est.

Primus diuisor est 2 a, nempe duplum nominis primi.

a	a	$a + c$
per 2	a	per 2
Primus diuisor 2 a	a^2	$2a + 2c$ Secundus diuisor

$+ 2ab + 2bc$ | $+ b$ quotus secundus
$+ 2a \quad + 2c$ |

$+ 2ac$ | $+ c$ quotus primus
$+ 2a$ |

		$2a + 2c$
		$+ b$
		$+ 2ab + 2bc$

2 a	$+ c$	$+ b$
$+ c$	$+ c$	$+ b$
$+ 2ac$	$+ c^2$	$+ b^2$

Quod si daretur quatrinomium, & eius esset exhibenda radix cubica; procedendum foret iuxta naturam cubicæ radicis; Vnde latus singulare primum esset a, cuius cubus subtractus ex a^3, nihil relinquit, at verò ad indagandum singulare latus secundum, paratur diuisor accipiendo triplum quadratum lateris primi, atq; reperitur latus vniuersum $a + c$.

Exemplum alterum cum radix extrahenda est cubica.

Cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Radix $a + b$

Diuiso $3a^2$

$+ 3a^2b$ | $+ b$
$+ 3a^2$ |

Idem agendum, cùm ex numeris extrahenda fuerit radix cubica, itaut quadrinomium sit cubicum, & ex ipso elicienda sit radix.

Quando ex numeris extrahenda est radix.

Propositum sit ex $27a^6 + 54a^5 + 36a^4 + 8a^3$ latus elicere
$27a^6 + 54a^5 + 36a^4 + 8a^3$

o o o o

Explicatio.

Primò extrahatur latus singulare primum ex $27a^6$, illudque erit $3a^2$, cuius cubus est $27a^6$; quo subtracto ex $27a^6$, nihil remanet. Deinde paretur diuisor ad indagandam singulare latus secundum.

Diuisor autem est triplum quadratum lateris primi, nempe $3a^4$; & proueniet 2 a, pro singulari latere secundo, nempe diuiso $54a^5$. Ducatur igitur $3a^2$; nempe latus primum, ducatur inquam in se quadraticè, & proueniet $9a^4$, quod ductum in 2 a, singulare latus secundum, fiet $18a^5$, cuius triplum est $54a^5$, quo subtracto ex $54a^5$, nihil remanebit. Deinde verò, sumatur $4a^2$, nempe quadratum singularis lateris secundi, & illud multiplicetur per latus primum, nempe per $3a^2$, fiet autem productum $12a^4$, cuius triplum est $36a^4$, quo

$27a^6 + 54a^5 + 36a^4 + 8a^3$
$27a^6 + 54a^5 + 36a^4 + 8a^3$

o o o o

Radix $3a^2 + 2a$

Diuisor $3a^4$

subtracto

ſubtracto ex $36\ a^4$, nihil remanet. Ad extremum ducatur $2\ a$, ſingulare latus ſecundum, ducatur inquam in ſe cubicè, vt fiat $8\ a^3$, quo ſubtracto ex $8\ a^3$, nihil remanet. Atque ita ad extremum operationis peruentum erit.

Exemplum ad idem.

Deinde ſit cubus $27a^6 - 54a^5 + 171a^4 \quad 188a^3 + 285a^2 - 150a + 125$

$27a^6 - 54a^5 + 36a^4 \quad 8a^3 + 60a^2 - 150a + 125$

$0 \quad 0 \quad + 135a^4 - 180a^3 + 225a^2 \quad 0 \quad 0$

$+ 135a^4 - 180a^3 + 225a^2$

$0 \quad 0 \quad 0$

Cubus $27\ a^6$

Radix $3\ a^2$

Radix $3\ a^2 - 2\ a + 5$

$3\ a^2$
$3\ a^2$

Primus diuiſor $27\ a^4$ $\quad - 54\ a^5$ | $9\ a^4$

Secundus diuiſor $27\ a^4 - 36\ a^3 + 12\ a^2$ $\quad + 27\ a^4$ | per 3

$27\ a^4$ primus diuiſor

$-\ 2\ a$ quotus primus

$+ 27\ a^4$
$-\ 2\ a$
$-\ 54\ a^5$

$-\ 2\ a$
$-\ 2\ a$
$+ 4\ a^2$
$+ 3\ a^2$
$+ 12\ a^4$
per 3
$+ 36\ a^4$

$3\ a^2 - 2\ a$
$3\ a^2 - 2\ a$
$-\ 6\ a^3 + 4\ a^2$
$9\ a^4 - 6\ a^3$
$9\ a^4 - 12\ a^3 + 4\ a^2$
per 3
$27\ a^4 - 36\ a^3 + 12\ a^2$ ſecundus diuiſor

$+ 135\ a^4$ | $+ 5$ quotus ſecundus
$+ 27\ a^4$ |

$+ 27\ a^4 - 36\ a^3 + 12\ a^2$
$+ 5$
$+ 135\ a^4 - 180\ a^3 + 60\ a^2$

$+ 5$
$+ 5$
$+ 25$
$+ 3\ a^2 - 2\ a$
$+ 75\ a^2 - 50\ a$
per 3
$+ 225\ a^2 - 150\ a$

$+ 5$
$+ 5$
$+ 25$
$+ 5$
$+ 125$

Quando contingit, vt radix prædicto modo erui nō poſſit.

Sæpè autem contingit, vt quantitates ex quibus radix extrahi debet, ita ſe habeant, vt radix prædicto modo erui non poſſit, tunc autem deſignabitur ipſa de qua quæritur præfigendo propoſitis quantitatibus ſignum radicale cuiuſmodi eſt ℞, & quidem iuxta naturam quæſitæ radicis, vt ad extrahendam radicem quadratam ex a b, ſcribendum ℞ a b, quo ſymbolo denotamus radicem quadratam ex a b, extractam, vel adhuc extrahendam eſſe. Quod ſi in animo, ſit extrahere radicem ex binomio, vt ex $a^2 + b^2$, præfigendum eſt character radicalis, priùs clauſo binomio intra parentheſin, vt hinc, qui ſequitur in modum ℞ $(a^2 + b^2)$, vel loco parentheſis adhiberi etiam ſolet lineola deſuper vt ℞ $\overline{a^2 + b^2}$.

Quod de quadratis radicibus dicitur, idem dicendum de cæteris.

Quæ autem diximus de radicibus quadratis, intelligenda de cæteris, quamobrem, ſi foret extrahenda radix cubica ex a^2 b, ſcribendum eſſet ℞ c, a^2 b, & ſi ex

quantitate

quantitate composita, idem perficiendum adhibita parenthesi, vt ℞ c $(a^3 - b^3 + a b^3)$, vel descripta desuper lineola ℞ c $\overline{a^3 - b^3 + a b^3}$.

Hę autem quantitates surdæ; siue irrationales dicuntur.

Ex Fractionibus Radicum extractio.

Ex fractionibus qua arte radices extrahatur exemplum.

EX Arithmeticæ præceptis manifestè constat, quandocunque ex fractionibus erunda sit radix aliqua, nil aliud agendum esse, quàm radicem extrahere illius generis, tàm ex numeratore, quàm ex denominatore, hoc enim pacto propositæ radicis fractionis radix comprobatur. Si itaque radix est extrahenda quadrata ex $\frac{a^2 b^2}{c^2}$. Quoniam igitur radix quadrata ex $a^2 b^2$, est $a b$, & radix quadrata ex c^2, est c, propterea propositæ quantitatis radix erit $\frac{a b}{c}$.

Exemplum alterum.

Non dissimiliter si extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{a^2 + 4ab + 4b^2}$, fiet enim radix $\frac{a^2 - b^2}{a + 2b}$. Ita quoque ad extrahendam radicem quadratam ex $4 + \frac{16a^2 - 96a}{16}$, quandoquidem $4 + \frac{16a^2 - 96a}{16}$, in formam fractionis facit $\frac{64 - 96a + 16a^2}{16}$, & radix quadrata ex $64 - 96a + 36a^2$ est $8 - 6a$, vt radix quadrata ex 16, est 4, propterea quæsita radix erit $\frac{8 - 6a}{4}$, hoc est $2 - \frac{6a}{4}$.

Eodem modo in radicibus alterius generis procedendum.

Nec dissimiliter in radicibus alterius generis procedendum; Vnde si foret propositum radicem cubicam extrahere ex loco proposito multinomio $\frac{a^6 + 3a^4e^2 + 3a^2e^4 + e^6}{b^3}$. Quandoquidem radix cubica numeratoris est $a^2 + e^2$, radix verò cubica denominatoris est b, propterea quantitatis propositæ cubica radix erit $\frac{a^2 + e^2}{b}$.

Idem in numeris ostenditur quod in speciebus.

In numeris verò, si proponeretur $\frac{512 - 1152a + 864a^2 - 216a^3}{64}$, & huius exhibenda foret radix, ea quidem esset $\frac{8 - 6a}{4}$, vt multiplicatione comprobari potest, latus enim cubicum numeratoris $8 - 6a$, & denominatoris itidem latus cubicum est 4.

Algorithmus quantitatum Surdarum.

De quantitatibus seu radicibus surdis agendum superest. Vnde quantitates surdæ ortum ducāt.

OMnis quantitatis diuisio per aliam quantitatem dum perficitur, ita contingit, vt imperfecta, vel perfecta sit; hoc secendo modo euenit, cum fit adeo vt sine reliquo eueniat quotus; primò autem cum reliquo prouenit, atque adeo non dissimiliter est ratiocinandum in extractione radicis, vnde cum ex aliqua quantitate radix est eruenda, aut ita radix elicitur, vt iuxta conditionem, atque naturam radicis in se ducta totam quantitatem restituat, vel ita extrahitur vt non præcisè sua iam dicta multiplicatione quantitatem efficiat, quia nimirum nulla reperiri potest, quæ quantitatem illam, cuius radix quæritur, ad vnguem in se ducta iuxta quæsitæ radicis naturam, efficiat. Inde igitur surdæ quantitatis eueniunt, ac proinde hæ tractandæ quoque sunt in fractionibus. Primùm autem, quod occurrit est quantitatum surdarum Reductio.

De reductione Surdarum quantitatum.

Reductio quantitatum surdarum qua arte perficiatur.

QVemadmodum ad operationem fractionum diuersæ denominationis oportet priùs ipsas ad eundem denominatorem reducere, ita non secus est opus quantitates surdas, cum diuersa radicalia signa habuerint, ad idem radicale signum reducere.

Hoc autem perficitur si ad numeros, à quibus radices denominantur minimus reperiatur numerus, qui per ipsos sine reliquo diuidi possit.

Exempli reductionis.

Opus igitur ſit has quantitates ℞Q a b, & ℞C a^2 b, ad idem radicale ſignum reuocare. Querendus eſt igitur ad 2, & 3, numeros, à quibus Q, & C, denominantur, quærendus inquam eſt numerus minimus, qui per ipſos ſine reliquo diuidi poſſit, hic autem numerus eſt 6, qui nimirum per 2, diuidi poteſt, itemq; per 3. Cùm igitur ſi 6, diuidatur per 2, oriatur 3, & ſi idem 6, diuidatur per 3, oriatur 2, fit vt ab multiplicandum ſit in ſe cubicè, & a^2 b, ducendum ſit in ſe quadraticè fient enim eodem ſigno affecta ℞CC $a^3 b^3$, & ℞CC $a^4 b^2$. Vel iuxta alios fit ℞QC &c. Ita ℞ a b, & ℞℞ $\overline{a^2 b + a b^2}$, ſub eodem radicali ſigno; erunt ℞℞ $a^2 b^2$, & ℞℞ $\overline{a^2 b + a b^2}$.

Sæpe contingit vt aliqua quantitas rationalis ad aliquam irrationalè duci debeat.

Ita quoque ſæpe accidit, vt aliqua quantitas rationalis reduci debeat, ad aliquod ſignum radicale, fitque per multiplicationem in ſe. Vt ſi opus ſit a + b, reducere ad idem ſignum radicis ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, oportet multiplicare a + b, in ſe quadratè, & fit ℞ $\overline{a^2 + 2 a b + b^2}$. Quod ſi idem binomium a + b, multiplicetur in ſe cubicè producetur ℞C $\overline{a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3}$, nempe ſub eodem ſigno radicis, cum exempligratia ℞C $\overline{a^3 - b^3 + a b^2}$.

Quandoque ſurdæ quantitates ad ſimpliciores reducuntur.

Reducuntur quandoque ſurdæ quantitates ad ſimpliciores, tollendo ex ſigno radicali quicquid rationale eſt, nempe diuidendo quantitates ſub eodem ſigno radicali comprehenſas per aliquod quadratum, vel per aliquem cubum, & quidem per quadratum illud, cui præfixo ſigno radicali, ductum fuit in quantitatem irrationalem, eodem modo de cubo intelligendum.

Exemplum.

Sit verbigratia ℞ $\overline{108\ a^2}$, reducenda, & quidem ad 6 a ℞ 3, reduci poterit; quandoquidem 108 a^2, producitur ex multiplicatione 36 a^2, per 3, quarum radices ſunt 6 a, & ℞ 3. Itaque ſi 108 a^2, diuidatur per 36 a^2, ſuperſit ſcribendum tantummodo 3, ſub ſigno radicali, vt fiat 6 a ℞ 3. Id autem oſtendit 6 a, ſeu quod idem eſt ℞ $\overline{36\ a^2}$, multiplicatum eſſe per ℞ 3.

Exemplum alterum.

Ita ſi fuerit ℞ $\overline{a^3 b + a^2 b^2}$, loco ipſius ſubſtitui poterit a ℞ $\overline{a b + b^2}$, propterea quòd a^3 b + $a^2 b^2$, diuidi poteſt per quadratum iſtud a^2, ex qua diuiſione emergit a b + b^2, ſi enim a b + b^2, ducatur in a^2, fit productum a^3 b + $a^2 b^2$, vt patet.

Quid præſtet hac in re operari.

Quia tamen haud facile eſt reperire quadratum, cubum &c. per quod diuiſio ad huiuſmodi reductionem neceſſaria perfici queat, præſtat ob id diligenter inquirere, qua ratione datarum quarumlibet quantitatum diuiſores omnes inueniantur, de quo infra.

Additio quantitatum Surdarum.

Additio ſurdarum quantitatum, quo artificio inſtitui debeat.

AD addendas quantitates ſurdas, oportet primùm explorare, vtrum ſint inter ſe communicantes, an non; Si enim communicantes fuerint, addantur tantùm quantitates, vel numeri, qui extra ſignum radicale ſunt conſtituti. Vt ad addendum ℞ $\overline{75\ a^2}$, & ℞ $\overline{27\ a^2}$, ſeu quod idem eſt 5 a ℞ 3, & 3 a ℞ 3. Addere oportet 5 a, & 3 a, vt fiat ſumma 8 a, cui annexa ℞ 3, fiet ſumma 8 a ℞ 3.

Exempla. Ad maiorem intelligentiã, quid agendũ.

Hęc vt intelligantur, adhibendus eſt numerus rationalis velut irrationalis, & ſupponendum eſt numero aliquod radicis pretium. Vt exempligratia ſit ℞ $\overline{100\ a^2}$, & ℞ $\overline{64\ a^2}$, quarum ſumma fiet 9 a ℞ 4. Nam idem eſt ℞ $\overline{100\ a^2}$, ac eſt 5 a ℞ 4, & ℞ $\overline{64\ a^2}$, idem quod 4 a ℞ 4 quarum ſumma eſt 9 a ℞ 4. Vt igitur meliùs hæc percipiantur: Supponamus a valere 3, igitur ℞ $\overline{100\ a^2}$, ſeu 5 a ℞ 4. Idem eſt quod 15 ℞ 4, hoc eſt ℞ producti ex 225, in 4, hoc eſt ℞ 900. At verò ℞ 64 a^2, hoc eſt 4 a ℞ 4. idem eſt quòd 12 ℞ 4, hoc eſt ℞ 576. At verò ſi ℞ 900, & ℞ 576, ſimul addantur, fiet ſumma ℞ 2916, & ita eſt nàm ℞ 900, eſt 30, ℞ 576, eſt 24, quorum ſumma eſt 54, at verò ℞ 2916, eſt idem quod 54. Rectè igitur præceptum ſcribit, vt ſimul addantur numeri extra ſignum radicale exiſtentes.

Præcepti comprobatio.

Non diſſimiliter ſi fuerint ℞ $\overline{a^4 + a^2 b^2}$, & ℞ $\overline{a^2 b^2 + b^4}$, hoc eſt a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, & b ✠ ℞ $\overline{a^2 b^2}$. Additis a, & b, fiet ſumma a ✠ b ℞ $\overline{a^2 b^2}$. *Exemplum.*

Præterea propoſitum ſit ad ℞ $\frac{aa\,bb}{cc}$ ✠ $\frac{4cd\,bb}{cc}$, & addere ℞ $\frac{ee\,aa\,ee}{dd\,bb}$ ✠ $\frac{4cee\,ee}{d\,bb}$, hoc eſt ad $\frac{b}{c}$ ℞ $\overline{a^2 + 4cd}$, addere $\frac{ee}{db}$ ℞ $\overline{a^2 + 4cd}$, fiet autem ſumma $\frac{dbb + cee}{cdb}$ ℞ $\overline{a^2 + 4cd}$. Non diſſimiliter ſi ad ℞ $\frac{4aabb - 4aauu}{bb}$, vel $\frac{2a}{b}$ ℞ $\overline{b^2 - u^2}$, addere oporteret ℞ $\overline{b^2 - u^2}$, fiet enim ſumma $\frac{2a + b}{b}$ ℞ $\overline{b^2 - u^2}$. Itemque addito ℞ $\overline{a^4 + 6a^3 + 21a^2 + 72a + 108}$, ad ℞ $\overline{a^4 - 10a^3 + 37a^2 - 120a + 300}$, hoc eſt addito $\overline{a + 3}$ ℞ $\overline{a^2 + 12}$ ad $\overline{5 - a}$, ℞ $\overline{a^2 + 12}$, fiet ſumma 8 ℞ $\overline{a^2 + 12}$. *Exemplum alterum ad idem.*

At ſi non fuerint communicantes addi non poterunt; itaut vnam radicem conſtituant. Vnde oportet illas addere mediante ſigno ✠, ex quo binomia, ac multinomia conſurgunt. Vt ſi fuerit addendum ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, ad ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, fiet ſumma ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ ✠ ℞ $\overline{a^2 - b^2}$. *Quando non ſunt communicantes, addi non poſſunt, vt vnam radicem conſtituant.*

Deinde ſi fuerit opus addere a ✠ b, ad ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, fiet ſumma a ✠ b ✠ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, eſt enim a ✠ b, quantitas rationalis, & ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, Irrationalis. Non diſſimili modo ex a^2 ✠ b^2 ✠ a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, & $a^2 - b^2 -$ b ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, fiet 2 a^2 ✠ a — b ℞ $\overline{a^2 + b^2}$. *Exemplum.*

Quandoque verò ſunt addendæ quantitates irrationales ſic ſe habentes.

Supponamus propoſitam eſſe ℞ b^2 a, cui ſit addenda ℞ d^2 a, hoc autem modo intelligimus a, quod ſupponere poſſumus radicem Geometricæ progreſſionis ductum eſſe in b, radicem quadratam ipſius b^2, itemque a, ductum eſſe in d, radicem quadratam ipſius d^2, vnde ſi foret ℞ b pl. a, & ℞ d pl. a, eundem ſenſum redderet. *Aliquando cõtingit vt inſtituenda ſit additio inter quãtitates irrationales.*

Ad has autem radices addendas, conducunt præcepta tradita in prima huius Operis parte; duci enim debet b^2, in d^2, vt fiat $b^2 d^2$, cuius radix quadrata eſt b d; vt ibi oſtendimus in numeris, cuius duplum eſt 2 b d, cui addere oportet b^2 † d^2, vt fiat 2 b d † b^2 † d^2, ex quo eruendum eſt latus quadratum, illudque eſt b † d, quo ducto in a, fit b a † d a, atque tantum eſt aggregatum ex ℞ b^2 a, & ℞ d^2 a, & quidem ita eſt, nam ℞ b^2 a, idem eſt quod b a, & ℞ d^2 a, idem quod d a, quare aggregatum ex illis erit b a † d a. *Ad has addẽdas radices cõducunt præcepta tradita in prima huius Operis parte.*

At ſi foret ℞ b pl. a cui addenda eſſet ℞ d pl. a, non diſſimili artificio procedendum. Duc enim b pl. in d pl. vt fiat b pl. d pl. cuius latus quadratum eſt ℞ (b pl. d pl.) huius duplum eſt 2 ℞ (b pl. d. pl.), ſeu ℞ (4 b pl. d pl.), cui oportet addere b pl. plus d pl. vt fiat ℞ (4 b pl. d pl.) † b pl. † d pl.) quo ducto in a, fiet ℞ (4 b pl. d pl.) † b pl. † d pl.) a, cuius ſenſus eſt, vt extrahatur latus quadratum ex quadruplo producto abs b pl. in d pl. & extracto lateri addatur eorundem aggregatum, ex ſumma verò extrahatur latus, quod intelligitur ductum in a, dignitatem. *Exemplum ad hæc illuſtranda.*

At ſi fuerint radices cubicæ, vt ℞ c b^3 a, & ℞ c d^3 a, additio inſtituetur non per illam multiplicationem &c. ea ſiquidem regula generalis non eſt, ſed tantummodo Radicibus quadratis inſeruit. Quamobrem extrahenda erit radix cubica ex ipſis quantitatibus, puta b^3, & d^3, & quidem ipſius b^3, radix cubica eſt b, at verò ipſius d^3, eſt d, addito autem b, ad d, fit b † d; quo ducto in a, fiet b a † d a, ſeu b † d) a, tantum igitur conſurget ex additione ipſius ℞ c d^3 a, ad ℞ c b^3 a. *Quando fuerint radices cubicæ.*

At ſi quantitates illæ non haberent latera cubica, vt ℞ c b ſol. a, & ℞ c d ſol. a; in huiuſmodi caſu quoniam non poteſt addi ℞ c d ſol. ad ℞ c b ſol. reperto communi diuiſore, ob id oportebit inſtituere additionem beneficio ſigni †, ad hunc modum ℞ c b ſol. a † ℞ c d ſol. a, & ita de reliquis. *Quando illæ quantitates nõ habent latera cubica.*

At ſi fuerint radices vniuerſales, itidem cum dignitatibus vt ℞ (b pl. a), & ℞ (d pl a), vbi ℞ (b pl. a), ſignificat extrahendam eſſe radicem quadratam ex producto ab a, in b pl. vel ab a, in d pl. &c. vbi nimirum a, ponitur, tanquam radix alicuius progreſſionis geometricæ incipientis ab vno; vel demum accipitur veluti quantitas multiplicans tam b pl. quam d pl. In harum autem vniuerſalium radicum additione ſic procedendum erit. *Quando fuerint radices vniuerſales.*

Sit exempligratia ℞ (d^2 a), addenda ad ℞ (b^2 a), quarum ſignificatio patet ex dictis, etenim ℞ (d^2 a), ſignificat radicem quadratam producti ex a, in d^2, & ℞ (b^2 a), importat radicem quadratam producti ex a, in b^2. *Exemplo res illuſtratur.*

Operationis explicatio. Ducatur igitur b^2, in d^2, & fiet productum $b^2 d^2$, huius latus eſt b d, cuius duplum 2 b d; cui annectantur b^2, & d^2, fiet enim 2 b d ✠ b^2 ✠ d^2, cuius radix quadrata eſt ℞ (2 b d ✠ b^2 ✠ d^2), quæ ducta in a, faciet quidem ℞ (2 b d ✠ b^2 ✠ d^2) a, nempe ſummam duarum propoſitarum radicum.

Idem contigit ſi quantitates illas tractaremus non ſecus ac ſi latera nõ haberent. Idem porro contingeret, ſi quantitates illas, tractaremus non ſecus ac ſi latera non haberent; vt ſi b^2, duceremus in d^2, fieret enim $b^2 d^2$, cuius latus erit ℞ ($b^2 d^2$) cuius duplum eſt 2 ℞ ($b^2 d^2$), ſeu quod idem eſt ℞ (4 $b^2 d^2$), cui additis b^2, & d^2, fiet ℞ (4 $b^2 d^2$) ✠ $b^2 d^2$, huius verò latus eſt ℞ (4 $b^2 d^2$) ✠ b^2 ✠ d^2), quo ducto in a, fit ℞ (4 $b^2 d^2$) ✠ b^2 ✠ d^2) a, tantaq; erit ſumma propoſitarum radicum vniuerſalium.

Quando latera magnitudinum exhiberi non poſſunt, quid agendum. At ſi latera magnitudinum, nempe ipſarum b^2, & d^2, exhiberi non poſſint; vt ſi foret b pl. d pl. horum latera cum non reperiantur, procedendum ob id hunc in modum. Ducatur igitur b pl. in d pl, & fiet b pl. d pl. cuius latus eſt ℞ (b pl. d pl.) huius duplum eſt 2 ℞ (b pl. d pl.), ſeu quod idem eſt ℞ (4 b pl. d pl.), cui addere oportet b pl. ✠ d pl. vt fiat ℞ (4 b pl. d pl.) ✠ b pl. ✠ d pl.). Itaque additione ℞ (b pl. a), ad ℞ (d pl. a), fiet ſumma ℞ (4 b pl. d pl.) ✠ b pl. ✠ d pl.) a.

Præcepta ſuperiora numeris illuſtrantur. Hæc autem hunc in modum numeris illuſtrabimus. Supponamus a, valere 9, at verò b^2, valere 16, item d^2, valere 25. Itaque ℞ (b^2 a), idem erit quod 21, latus quadratum numeri 144, producti ex 9, in 16.

Proſequitur explicatio. Præterea ℞ (d^2 a), idem erit, quod 15, latus quadratum numeri 225, producti ex 9, in 25. Procedatur autem vt Præceptum iubet, nempe ducatur 16, in 25, vt fiat 400, cuius latus quadratum eſt 20, huius duplum eſt 40, cui additis 16, & 25, fit 81, quo ducto in 9, fit 729, cuius latus quadratum eſt 27, quantum profecto eſt pretium iſtius ℞ (4 b pl. d pl.) ✠ b pl. ✠ d pl.) a, namque b pl. eſt 16, quo ducto in d pl. nempe 25, fit 400, huius quadruplum eſt 1600, cuius latus quadratum eſt 40, cui addito b pl. nempe 16, fit 56, cui addito d pl. puta 25, fit 81; quo ductò in 9, pretium ipſius a, fit 729, cuius latus quadratum eſt 27. Itaque rectè præceptum iubet &c.

Subtractio quantitatum Surdarum.

Subtractio ſurdarum quantitatum, qua arte ſit inſtituenda. QVemadmodum de Additione diximus hæc in ſubtractione occurunt.

Subtractio vt inſtituatur, primò eſt obſeruandum, an ipſæ quantitates ſurdæ ſint, vel non ſint communicantes. Si fuerint communicantes, ſubtrahantur quantitates, quæ extra ſignum radicale exiſtunt. Vt ſi fuerit iniunctum ſubtrahere inuicem has quantitates ℞ $\overline{75\, a^2}$, & ℞ $\overline{27\, a^2}$, hoc eſt 5 a ℞ 3, & 3 a ℞ 3, oporteat igitur harum quantitatum minorem ex maiori ſubducere, inſtituatur ſubtractio inter numeros exiſtentes extra ſignum radicale, nempe inter 5 a, & 3 a, reliquum enim erit 2 a ℞ 3. *Exemptis illuſtrãtur præcepta.* Non ſecus ſi fuerit opus exhibere differentiam inter ℞ $\overline{a^4 \dagger a^2 b^2}$, & ℞ $\overline{a^2 b^2 \dagger b^4}$, hoc eſt inter a ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$, & b ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$, reperiatur enim differentia inter a, & b, quæ eſt a ∼ b, & fiet differentia quæſita a ∼ b ℞ $\overline{a^2 ✠ b^2}$.

Hæc autem numeris illuſtrari poſſunt, quemadmodum fecimus ſupra in operatione Additionis.

Exempla ad idem. Non diſſimiliter ſi fuerint ℞ $\overline{\frac{aa\,bb}{ee} ✠ \frac{4cd\,bb}{ee}}$, & ℞ $\overline{\frac{ee\,aa\,ee}{dd\,bb} ✠ 4\frac{ee\,cc}{d\,bb}}$, hoc eſt $\frac{b}{e}$ ℞ $\overline{a^2 ✠ 4cd}$, & $\frac{ee}{db}$ ℞ $\overline{a^2 ✠ 4cd}$, fiet reſiduum $\frac{dbb \sim eee}{edb}$, ℞ $\overline{a^2 \dagger 4cd}$. Non ſecus etiam ſi fuerit ℞ $\overline{\frac{4aa\,bb - 4aa\,uu}{bb}}$, vel $\frac{2a}{b}$ ℞ $\overline{b^2 - u^2}$, & ℞ $\overline{b^2 - u^2}$, fiet enim differentia $\frac{2a \sim b}{b}$ ℞ $b^2 - u^2$.

Quod

Quod si fuerint ℞ $\overline{a^4 + 6a^3 + 21a^2 + 72a + 108}$, & insuper ℞ $\overline{a^4 - 10a^3 + 37a^2 - 120a + 300}$, hoc est $a + 3$ ℞ $\overline{a^2 + 12}$, & $5 - a$, ℞ $\overline{a^2 + 12}$, fiet differentia $2a \backsim 2$ ℞ $a^2 + 12$.

Alia proponuntur exempla.

At verò si quantitates communicantes non fuerint, institui debebit subtractio beneficio signi —. Vnde residua, & multinomia proueniunt. Vt si fuerit subtrahendum ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, de ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, fiet residuum ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ — ℞ $\overline{a^2 - b^2}$. Non secus subtrahatur ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, de $a + b$, fiet reliquum $a + b$ — ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, est enim $a + b$, quantitas rationalis, secus verò ℞ $\overline{a^2 + b^2}$.

Quando quãtitates nõ fuerint communicantes.

Sic etiam si propositum sit ex $a^2 + b^2 + a$ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, subtrahere $a^2 - b^2 - b$ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, fiet enim residuum $2b^2 + \overline{a + b}$ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$.

Aliud exemplum ad idẽ.

Multiplicatio quantitatum Surdarum.

AD hanc operationem perficiendam in numeris irrationalibus; oportet primùm aduertere, num sint, vel non sint communicantes. Si fuerint communicantes, multiplicatis quantitatibus, vel numeris extra signum radicale positis, multiplicare oportet productum per quantitates, vel numerùm sub signo ralicali contentum, vt productum quæsitum habeatur. Vt si sit iniunctum multiplicare ℞ $\overline{245 a^2}$, & ℞ $\overline{80 a^2}$, hoc est $7a$ ℞ 5, per $4a$ ℞ 5. Primò itaque multiplicetur $7a$, per $4a$, & fiet $28a^2$, deinde multiplicetur huiusmodi productum $28a^2$, per 5, & fiet productum $140a^2$. Ita multiplicata ℞ $\overline{245 a^2}$, per ℞ $\overline{80 a^2}$, fiet productum $140a^2$; idem valet enim ℞ $\overline{19600 a^4}$, quod numeris explicari potest.

Multiplicationis institutio requirit, vt aduertatur num quantitates sint communicantes.

Id autem numeris explicabitur si prius exempla attulerimus in numeris rationalibus. Propositum sit multiplicare ℞ $\overline{144 a^2}$, per ℞ $\overline{2304 a^2}$, hoc est $4a$ ℞ 9, per $16a$ ℞ 9, Supponamus fieri ℞ $576a^2$, multiplicatis nempe $16a$, per $4a$, &c. vt Præceptum iubet, oportet ergo numeris explicare, pragmatiam rectè institutam fuisse. Pretium ipsius a, sit 5, ergo eius quadratum erit 25, quo ducto in 144, fiet 3600, cuius latus quadratum est 60. Itaque ℞ $\overline{144 a^2}$, idem est quod 60. Deinde si a, valet 5, eius quadratum valebit 25, vt diximus quo ducto in 2304, fit 57600, cuius latus quadratum est 240, itaque ℞ $\overline{2304 a^2}$, idem est quod 240, ducamus autem 240, in 60, & fiet productum 14400. Nunc igitur videndum num $576a^2$, seu quod idem est $8a$ ℞ 9, valeat numerus 14400, & ita quidem est, nam 576, ductus in 25, pretium ipsius a^2, facit 14400. Non dissimiliter discurrendum de $8a$ ℞ 9, nam a, valet 5, qui ductus in 8, facit 40, cuius quadratum (duci enim debet pretium ipsius $8a$ in ℞ 9), est 1600, quo ducto in 9, fit 14400.

Numeris id explicatur.

Perpendamus hoc aliud exemplum. Oporteat multiplicare ℞ $\overline{75 a^2}$, per ℞ $\overline{27 a^2}$, hoc est $5a$ ℞ 3, per $3a$ ℞ 3. Primùm ducatur $5a$, in $3a$, & fiet $15a^2$, quo ducto in 3, fiet $45a^2$, Aduertendum hic autem prodoctum esse $45a^2$. Supponamus a, valere 5, vt a^2, valeat 25, quo ducto in 75, fit productum ℞ 1875. Deinde ducatur 27, in 25, fiet productum 675, cuius latus quadratum est ℞ 675, multiplicemus verò ℞ 1875, per ℞ 675, fiet productum ℞ 1265625, seu 1125. Vidennum an $45a^2$, valeat ℞ 1171875, seu 1125, & quidem ita est, nam a^2, valet 25, quo ducto in 45, fit 1125.

Aliud exemplum ad idẽ

Non dissimili arte procedendum erit in multiplicatione ℞ $\overline{a^4 + a^2 b^2}$, per ℞ $\overline{a^2 b^2 + b^4}$, hoc est a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, per b ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, fiet enim productum multiplicando a, per b, atque producto ab, multiplicato per $a^2 + b^2$, proueniet $a^3 b + a b^3$. Vbi obserua idem esse a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, ac est ℞ $\overline{a^4 + a^2 b^2}$. Si enim nos ducere velimus ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, in a, id autem fieri debere symbolum indicat, fiet productum a quadraticè in se ducto; id autem faciendum, cum duci debeat in ℞ 9, vnde vterque terminus quadraticè multiplicari profectò debet, vt proueniet a^2, si a^2, ducatur in $a^2 + b^2$, proueniet certè ℞ $\overline{a^4 + a^2 b^2}$. Deinde itidem aduerte idem esse b ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, ac est ℞ $\overline{a^2 b^2 + b^4}$, si enim ducatur b in ℞ $\overline{a^2 + b^2}$. Id enim fieri debere symbolum indicat,

Non dissimili arte procedendum in multiplicatione aliorum numerorum irrationalium.

dicat, fit illud productum; nam b, in se quadraticè ducendum, cum per radicem quadraticam multiplicari debeat, vterque enim terminus quadraticè multiplicandus est; quo facto prouenit b^2, hoc autem ductum in a^2 ✠ b^2, facit $a^2 b^2$ ✠ b^4, cuius ℞ est ℞ $\overline{a^2 b^2 ✠ b^4}$.

Exemplo superior doctrina rursus declaratur.

Insuper propositum sit ducere ℞ a^4 ✠ 6 a^3 ✠ 21 a^2 ✠ 72 a ✠ 108, per ℞ a^4 − 10 a^3 ✠ 37 a^2 − 120 a ✠ 300, hoc est a ✠ 3 ℞ a^2 ✠ 12 per 5 − a ℞ a^2 ✠ 12.

Multiplicetur a ✠ 3, per 5 − a, fiet 15 ✠ 2 a − a^2; quod quidem multiplicatum per a^2 ✠ 12, productum facit 180 ✠ 24 a ✠ 3 a^2 ✠ 2 a^3 − a^4.

Quando quantitates nō sunt communicantes.

Sæpe autem contingit, vt quantitates non sint communicantes tunc autem oportet multiplicare quantitates sub signis radicalibus comprehensas, & producto præfigere commune signum radicale. Si verò signa radicalia diuersa fuerint reducenda prius sunt ad idem signum, vt superiùs declarauimus, & postea operandum vt paulo antea dicebamus.

Multiplicationis ratio rursus declaratur.

Oporteat multiplicare ℞ a b, per ℞ c d, ductis a b, in c d, producto a b c d, præfigatur signum ℞, & fiet productum ℞ a b c d.

Adnotanda quædam.

Cæterum si foret multiplicandum ℞ a b c^2, per 2. Oportet aduertere numerum 2, esse reducendum sed naturam radicis quadratæ, vnde tam ℞ a b c^2, quàm 2, debet in se quadraticè duci, vt ex illius multiplicatione a b c^2, ex fiat istius verò 4, nunc igitur ducere oportet a b c^2, in 4, & proueniet 4 a b c^2, cuius radix ligata ℞ (4 a b c^2), est productum quæsitum. Verùm hoc symbolo ℞ (4 a b c^2), significamus a b c^2, ductum fuisse in 4, & ex producto extractam fuisse radicem quadratam; atque adeo idem erit ac 2 ℞ a b c^2, nam hoc symbolo significamus ℞ a b c^2, ductam esse in 2. Plerumque autem illud idem significamus ℞ (4 a b c^2), hoc alio symbolo 4, ℞ a b c^2, hunc enim in modum intelligendum volumus a b c^2, ductum fuisse in 4, ex producto extractum fuisse latus; vnde non idem erit 4 ℞ a b c^2, ac 4, ℞, a b c^2, commatibus enim illis, differentia innuitur. Huiusmodi autem multiplicatio euenit, cum binomium in se quadraticè ducitur.

Quando binomium in se quadraticè ducitur.

Si enim fuerit ℞ a c † ℞ b c, binomium constans è duobus nominibus irrationalibus, in se quadraticè ductum facit a c † 2 ℞ a b c^2 † b c, seu quod idem est a c † ℞ (4 a b c^2) † b c. Vel demum a c † 4, ℞, a b c^2 † b c.

```
                  ℞ a c † ℞ b c
                  ℞ a c † ℞ b c
                  -------------
              ℞ a b c² †    b c
      a c †   ℞ a b c²
      -----------------------
      a c † 2 ℞ a b c² †    b c
Vel   a c †   ℞ (4 a b c²) † b c
Vel   a c † 4, ℞, a b c² †   b c
```

Quando occurrit multiplicatio quantitatis irrationalis.

Vbi vt vides occurrit multiplicatio quantitatis irrationalis ℞ a c, per 2, quæ perficienda est vno ex modis supra positis.

Hæc autem iuuabit exemplis illustrare. Supponamus a, valere 9, at b, valere 16, & c, denique 4, his suppositis ℞ a c, valebit ℞ 36, nam a c, valet 36, & ℞ b c, valebit ℞ 64, nam b c, valet 64.

Exemplis hæc illustrantur.

Itaque instituta multiplicatione prouenit 36 † ℞ 9216 † 64, & quidem ita se res habebit, nam ℞ 9216, idem est quod 96, quo addito ad 64, & 36, fit 196, quantum prouenit ex 14, pretio ipsius binomij ℞ 36 † ℞ 64, si ducatur in se. Sed perpendamus, valorem producti; numerus 36, respondet a c, & ℞ 9216, respondet 2 ℞ a b c^2, vel ℞ (4 a b c^2) vel 4, ℞, a b c^2, nam a b c^2, valet 2304, cuius radix quadrata est 48, quæ ducta in 2, facit 96, at verò cùm a b c^2, valeat 2304, hoc ducto in 4, fit 9216, cuius latus quadratum est 96. Vel quod idem est 4, si ducatur in 2304, pretium

```
       ℞ 36   † ℞ 64
       ℞ 36   † ℞ 64
       -------------
       ℞ 2304 †    64
  36 † ℞ 2304
  ------------------
  36 † ℞ 9216 †    64
          9 6
```

ipsius

ipſius $a\,b\,c^2$, producit 9216, ſumatur latus, illud quidem erit 96.

Si verò propoſitum ſit multiplicare, vt ſupra ℞ a b, per ℞ c d, ex hac multiplicatione prouenit ℞ $\overline{a\,b\,c\,d}$, vnde intelligendum hoc ſymbolo extrahendam eſſe radicem quadratam ex multiplicatione a, in b, & producti in c, & iterum producti in d, atque adeo vel deſuper vt lineola ducenda in producto, vel parentheſi productum claudendum; quinimo hoc idem intelligendum de multiplicato, & multiplicante, nam cum dicimus ducendam eſſe ℞ a b, in ℞ c d, intelligendum volumus multiplicandam radicem producti ex a, in b, per radicem producti ex c d.

Exemplū ad multiplicationem perficiendam.

Quod ſi proponeretur multiplicandum ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, per ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, multiplicatis $a^2 + b^2$, per $a^2 - b^2$, fiet productum ℞ $\overline{a^4 -{}^4}$, etenim radix eſt vniuerſalis ſiuè ligata perinde enim eſt a c, ſi dicamus duci debere ℞ $(a^2 + b^2)$, per ℞ $(a^2 - b^2)$, fit enim productum ℞ $(a^4 - b^4)$, quæ numeris licebit illuſtrare. Supponamus a, valere 8, eius quudratum eſt 64, at verò b, valeat 6, eius quadratum valebit 36. Itaque $a^2 + b^2$, valebit 100, quare ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, ſeu ℞ $(a^2 + b^2)$, valebit 10, eo enim ſymbolo denotamus extrahendam eſſe radicem quadratam ex a^2, plus b^2, at verò ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, ſeu & $(a^2 - b^2)$, valebit ℞ 28, etenim $a^2 - b^2$, valet $64 - 36$, hoc eſt 28, quamobrem ℞ $(a^2 - b^2)$, valebit ℞ 28, eo ſiquidem ſymbolo denotamus extrahendam eſſe radicem quadratam ex differentia inter a^2, & b^2, hæc igitur in numeros reſoluamus; perinde igitur eſt ducere ℞ $(a^2 + b^2)$, in ℞ $(a^2 - b^2)$ ac ducere 10, in ℞ 28, quorum multiplicatione prouenit ℞ 2800. At verò ſi explicetur ℞ $\overline{a^4 - b^4}$, ſeu ℞ $(a^4 - b^4)$, ex hypotheſi eorundem numerorum, comperietur idem pretium huius nempe producti ex mutua multiplicatione ℞ $(a^2 + b^2)$, per ℞ $(a^2 - b^2)$, propterea quod a^4, valebit 4096, & b^4, valebit 1296, quorum differentia eſt 2800, huius autem quadrata radix vt ſupra eſt ℞ 2800.

Exemplum alterū ad idē.

$$
\begin{array}{r}
\text{℞ } \overline{a^2 + b^2} \\
\text{℞ } \overline{a^2 - b^2} \\
\hline
- a^2 b^2 - b^4 \\
a^4 + a^2 b^2 \qquad \\
\hline
\text{℞ } \overline{a^4 - b^4} \\
\text{Vel ℞ } (a^4 - b^4)
\end{array}
$$

Sed quando non fuerint radices vniuerſales non eadem modo procedendum Sit multiplicandum ℞ $\overline{a^2 b^2} + c\,d$, per ℞ $\overline{a^2 b^2} + c\,d$, hoc eſt ſi foret opus multiplicare in ſe ℞ $\overline{a^2 b^2} + c\,d$, & quidem quadraticè, fieret productum $a^2 b^2 + 2$ ℞ $\overline{a^2 b^2 c^2 d^2} + c^2 d^2$.

Quando radices non fuerint vniuerſales.

Quæ vt melius intelligantur oportet numeris rem illuſtrare.

Numeris præcepta illuſtrātur.

Supponamus hæc literarum pretia, & quidem a, valeat 2, b, 4, c, 5, d, 6, vtique a^2, valebit 4, b^2, 16, c^2, 25, & d^2 36, atque adeo a^2, ductum in b^2, facier 64, vnde ℞ $a^2 b^2$, valebit 8, at verò c d, valebit 30, vnde ipſius ℞ $a^2 b^2 + c\,d$, pretium erit 38, qui ductus in ſe quadraticè facit 1444. Videndum igitur num $a^2 b^2 + 2$ ℞ $a^2 b^2 c^2 d^2 + c^2 d^2$, productum ſcilicet abs ℞ $a^2 b^2 + c\,d$, in ſe quadraticè ducto ſit 1444, quod, vt cognoſcamus; perpendamus ſingula producti membra; primum eſt 64, ſecundum eſt ℞ 230400; nam ſi 30, ducatur in ℞ 64, fit ℞ 57600, quæ ducta in 2, facit ℞ 2304000, nempe 480, eſt enim numerus 230400, rationalis, cuius latus quadratum eſt 480, vltimum membrum eſt 900, at verò 480, 900, & 64, conficiunt 1444, cæterùm 2 ℞ $a^2 b^2 c^2 d^2$, idem eſt, quod ℞ $(4\,a^2 b^2 c^2 d^2)$ nam ſi ℞ $a^2 b^2 c^2 d^2$, duci debet in 2, vtrunque debet quadraticè multiplicari, vt ex illo proueniat $a^2 b^2 c^2 d^2$, ex hoc autem 4, quo ducto in $a^2 b^2 c^2 d^2$, fit $4\,a^2 b^2 c^2 d^2$, cuius

$$
\begin{array}{r}
\text{℞ } \overline{a^2 b^2} + c\,d \\
\text{℞ } \overline{a^2 b^2} + c\,d \\
\hline
+ \quad \text{℞ } \overline{a^2 b^2 c^2 d^2} + c^2 d^2 \\
a^2 b^2 + \quad \text{℞ } \overline{a^2 b^2 c^2 d^2} \qquad\quad \\
\hline
a^2 b^2 + 2 \text{ ℞ } \overline{a^2 b^2 c^2 d^2} + c^2 d^2
\end{array}
$$

Hoc igitur eſt productum ex illa mutua multiplicatione.

Supradictorū explicatio.

latus

latus quadratum eſt ℞ ($4a^2b^2c^2d^2$), at a^2, eſt 4, quo ducto 16, pretium ipſius b^2, fit 64, hoc autem ducto in 25, pretium ipſius c^2, fit 1600, hoc autem ducto in 36, pretium ipſius d^2, fit 57600, hoc autem ducto in 4, fit 230400, cuius latus quadratum eſt 480; quantum fit ſi ducatur ℞ $a^2\,b^2\,c^2\,d^2$, nempe ℞ 57600,

℞ 64 ✠ 30
℞ 64 ✠ 30
———————
℞ 57600 ✠ 900
64 ✠ ℞ 57600
———————————
64 ✠ ℞ 230400 ✠ 900
4 8 0

in 2, fitque 64 ✠ 480 ✠ 900, ex ℞ 64 ✠ 30, in ſe. Hunc igitur in modum procedendum erit in conſimilibus multiplicationibus.

Exempla propoſita declaratio. Quod ſi multiplicari debeat ℞ $\overline{a^2 ✠ b^2}$, per a ✠ b, priùs oportet reuocare a ✠ b, ad idem ſignum radicale, & fit ℞ $\overline{a^2 ✠ 2ab ✠ b^2}$, hoc autem nihil aliud eſt, quàm a ✠ b, quadraticè in ſe ducere, fit enim a^2 ✠ 2 a b ✠ b^2, cuius latur eſt ℞ $\overline{a^2 ✠ 2ab ✠ b^2}$, ſeu a ✠ b, & ſi ℞ a^2 ✠ b^2, ducatur in ſe quadraticè fit a^2 ✠ b^2, cuius latus eſt ℞ $\overline{a^2 ✠ b^2}$. Ductis autem quadratis adinuicem, nempe a^2 ✠ 2 a b ✠ b^2, & a^2 ✠ b^2, fit productum a^4 ✠ 2 a^3 b ✠ 2 a^2 b^2 ✠ 2 a b^3 ✠ b^4, cuius latus quadratum eſt ℞ (a^4 ✠ 2 a^3 b ✠ 2 a^2 b^2 ✠ 2 a b^3 ✠ a^4), & hoc eſt productum factum ex multiplicatione ipſius ℞ (a^2 ✠ 2 a b ✠ b^2), per a † b. Idem plane cernes in numeris. Si enim a, valet 2, & b, 4, vtique a^2, valebit 4, & 2 a b, valebit 16, & b^2, valebit 16, vnde a^2 † 2 a b † b^2, valebit 36, atque adeo ipſius ℞ (a^2 † 2 a b † b^2), pretium erit 6. At ſi a, valet 2, & b, 4, vtique a^2 † b^2, valebit 20, & ℞ $\overline{a^2 † b^2}$, pretium erit ℞ 20, quare ex ducta ℞ $\overline{a^2 † 2ab † b^2}$, in ℞ $\overline{a^2 † b^2}$, fieri debet productum, cuius pretium, ex eadem hypotheſi æſtimationis ipſorum a, & b, ſit ℞ 720, numerus factus ex ℞ 20, in 6. Videndum igitur quantus ſit valor ipſius ℞ (a^4 † 2 a^3 b † 2 a^2 b^2 † 2 a b^3 † b^4). Si a, valet 2, a^2, valebit 4, & a^4, valebit 16, & hoc eſt pro primo membro a^4. At verò a^3, valebit 8, qui ductus in 4, pretium ipſius b, facit 32, cuius duplum eſt 64, & hoc pro ſecundo membro 2 a^3 b. Deinde a^2, valet 4, qui ductus in 16, pretium ipſius b^2, facit 64, cuius duplum eſt 128, & hoc pro tertio membro; Poſtea a, valet 2, & b^3, valet 64, his ductis inter ſe fit 128, cuius duplum eſt 256, & hoc pro quarto membro. Denique quadrato-quadratum ipſius b, cuius pretium eſt 4, erit 256, colligantur omnes hi quinque numeri in vnam ſummam, & proueniet 720; cuius latus quadratum eſt ℞ 720, vt oportebat.

Exemplum alterum. Sit iniunctum multiplicare a † ℞ b c, per a † ℞ b c.

Propoſitio declaratio. Primò enim ducatur ℞ b c, in ℞ b c, vt proueniat b c, deinde multiplicetur a, per ℞ b c, hoc autem productum bifariam deſignari poteſt, vel nempe reducendo a, ad quadraticam nauuram, nempe multiplicando illum in ſe quadraticè, vt proueniat a^2, quod ductum in b c, quadratum ipſius ℞ b c, facit a^2 b c, cui præfixo eodem charactere fit productum ℞ $\overline{a^2bc}$, quod etiam deſignari poterit, vt paulo poſt dicemus. Deinde iterum multiplicetur a, per ℞ b c, & eodem modo operando proueniet ℞ a^2 b c, mox autem ducatur a, in ſe quadraticè, & proueniet a^2, his autem omnibus in vnam ſummam collectis

a † ℞ b c
a † ℞ b c
———————
℞ $\overline{a^2bc}$ † b c
a^2 † ℞ $\overline{a^2bc}$
———————————
a^2 † 2 ℞ $\overline{a^2bc}$ † b c

Vel a † ℞ b c
a † ℞ b c
———————
a ℞ b c † b c
a^2 † a ℞ b c
———————————
a^2 † 2 a ℞ b c † b c

proueniet a^2 † 2 ℞ $\overline{a^2bc}$ † b c, ſeu 2 a ℞ b c, ſeu a^2 † ℞ [4 a^2 b c] † b c, ſeu a^2 † 4, ℞, a^2 b c.

Poteſt

Consulitur quomodo sit scribendum.

Potest etiam hoc modo illud productum designari, nempe a ℞ b c quo symbolo denotamus ℞ b c duci per a cum aliàs expressiùs idem sigificemus scribendo ℞ $\overline{a^2 b c}$ hoc enim modo iam operatio absoluta est, & facta est ipsa multiplicatio, vnde si quis volens significare ℞ 8 duci in 3 duobus modis scribere productum posset, vel 3 ℞ 8, vel ℞ 7 2 videtur mihi meliùs scribi ℞ 72. Ita etiam, & meliùs ℞ $\overline{a^2 b c}$, quàm a ℞ b c, quicquid alij dicant.

Qua arte superior multiplicatio perfici posse.

Non dissimiliter superior illa multiplicatio, ad hunc qui sequitur in modum perfici posset. Cæterùm rectè dicebatur in idem recidere siue scribatur a ℞ b c siue ℞ $\overline{a^2 b c}$; nam si a valet 3, a^2 valebit 9, at verò si b, valeat 8, & c valeat 2 vtiq; b c valebit 16 atque a^2 b c valebit 144. cuius latus est 12 pretium ipsius ℞ $\overline{a^2 b c}$. At si b c valet 16, ℞ b c valebit 4, si autem a valet 3, vtique a ℞ b c valebit 12, quare, &c.

Nihil refert vtro modo procedatur.

Non est igitur id ignorandum in idem scilicet redire, vtro modo procedatur Quamobrem, vt quispiam in operando ritè procedat, debet solùm præ aculis habere, quod initio aggreditur operandi genus, vt deinceps sibi constans non dissimiliter procedat. Sed hæc explicemus.

℞ $\overline{a^2 b^2}$ + c d
℞ $\overline{a^2 b^2}$ + c d
——————————
c d ℞ $\overline{a^2 b^2}$ + $c^2 d^2$
$a^2 b^2$ + c d ℞ $\overline{a^2 b^2}$
——————————————
$a^2 b^2$ + 2 c d ℞ $\overline{a^2 b^2}$ + $c^2 d^2$
Vel $a^2 b^2$ +, c d, 4, ℞, $a^2 b^2$ + $c^2 d^2$
Vel $a^2 b^2$ + c d ℞ (4 $a^2 b^2$) + $c^2 d^2$
Vel vt supra $a^2 b^2$ + 2 ℞ ($a^2 b^2 c^2 d^2$) + $c^2 d^2$
Vel denique $a^2 b^2$ + ℞ (4 $a^2 b^2 c^2 d^2$) + $c^2 d^2$

Literarum pretia ad explicanda quæ hactenus tradita sunt.

Supponamus literarum pretia esse quę à latere, & ex huiusmodi hypothesi tractentur suprapositę magnitudines; deprehendetur enim rectè ab Arte præscribi, quæ nos præcepta attulimus. Si enim a valet 2, & b, valet 3, vtique a^2 valebit 4, & b^2, valebit 9, ducto autem 4 in 9, fit 36, & hoc est pretium ipsius $a^2 b^2$, cuius latus quadratum est ℞ $\overline{a^2 b^2}$, nempe 6, est enim 6, latus quadratum numeri 36 at verò si c valet 4, & d, valet 5, pretium ipsius c d erit 20.

a = 2
b = 3
c = 4
d = 5

Hìc tamen aduerte cùm intercesserit signum + vel — repetendũ numerũ esse; vnde si fuerit 2 ℞ (b a^3 — a^4) scribendum ℞ (4 b a^3 — 4 a^4) vbi 4 vtriq; termino præfigitur.

Itaque ℞ $\overline{a^2 b^2}$ + c d, valebit 26, quare $a^2 b^2$ + 2 c d ℞ $\overline{a^2 b^2}$ + $c^2 d^2$, pretium erit 67 6, nempe quadratum ex 26, cum $a^2 b^2$ + 2 c d ℞ $\overline{a^2 b^2}$ + $c^2 d^2$ sit quadratũ, ex ℞ $\overline{a^2 b^2}$ † c d; Verùm id superest perpẽdendũ, $a^2 b^2$, valet 36, at 2 c d valet 40, quo ducto in 6, pretium ipsius ℞ $\overline{a^2 b^2}$, fit 240; deinde pretium vltimi membri $c^2 d^2$, est 400, at si 36, 240, 400, in vnam summam redigantur, fit 676, vt constat, explicemus productum secundo modo exhibitum. Primum membrum est $a^2 b^2$, cuius pretium est 36. Deinde c d, 4, ℞ $a^2 b^2$ valet 240; nam $a^2 b^2$, valet 36, quo ducto in 4, fit 144, huius latus quadratum est 12, quo multiplicate per 20, pretium ipsius c d, fit 240, at pretium ipsius $c^2 d^2$ est 400 hisq; collectis, vt prius fit 676.

Alia eodem modo numeris explicantur, ac illustrantur, et tertius, & quartus ac quintus modus colligendi producta.

Deinde ad trutinam reuocemus productum tertio modo; scilicet $a^2 b^2$ + c d ℞ (4 $a^2 b^2$) + $c^2 d^2$, & non dissimiliter colligemus eius pretium esse 676.; nam $a^2 b^2$, valet 36, it qui 36, ductus in 4, facit 144, cuius latus quadratum 12, multiplicatum per 20, pretium ipsius c d, facit 240, denique $c^2 d^2$, valet 400, è quibus, consurgit 676.

Ad quartum quod attinet. Primum membrum, puta $a^2 b^2$, valet 36. At verò a^2, valet 4, quo ducto in 9 pretium ipsius b^2, fit 36 hoc autem multiplicato per 16, pretium ipsius c^2, fit 576, quo ducto in 25 pretium ipsius d^2 fit 14400 cuius latus quadratum est 120, itaque ℞ ($a^2 b^2 c^2 d^2$) valet 120, quo multiplicato per 2, fit 240; Vltimum membrum est $c^2 d^2$, quod valet 400, ex his autem; nempe 36, 240, & 400, consurgit vt priùs 676.

Vltimus modus colligendi producta explicatur.

Ad vltimum quod ſpectat ; primum membrum puta $a^2 b^2$, valet 36, Deinde, a $b^2 c^2 d^2$, valet 14400, quo ducto in 4 fit 57600, huius latus quadratum eſt 240 vltimum membrum $c^2 d^2$, valet 400, atque, vt priùs ex 36, 240, 400 conſurgit 676.

Diuiſio quantitatum Surdarum.

Inſtituitur diuiſio quando quantitates ſunt communicantes.

SI fuerint datæ quantitates communicantes, opretet diuidere tantùm quantitates, ſiue numeros extra ſignum radicale poſitos, & quod prouenit erit quotiens quæſitus. Vt ſi oporteat diuidere ℞ ($75 a^2$) per ℞ ($27 a^2$) hoc eſt 5 a ℞ 3 per 3 a ℞ 3. diuidatur 5 a per 3 a, vel quod idem eſt, diuidatur 5 per 3, fiet quotiens $\frac{5}{3}$ hoc eſt $1 \frac{2}{3}$. Noc ſecus, cùm propoſitum fuerit diuidere ℞ ($108 a^2$) per ℞ ($48 a^2$) hoc eſt 6 a ℞ 3 per 4 a ℞ 3. diuidatur 6 a per 4 a, vel quod idem eſt diuidatur 6 per 4, fiet quotiens $\frac{6}{4}$ hoc eſt $1 \frac{1}{2}$. Quod ſi proponeretur ℞ ($a^4 + a^2 b^2$) diuidendum per ℞ ($a^2 b^2 + b^4$) nempe a ℞ ($a^2 + b^2$) per b ℞ ($a^2 + b^2$) Oportet diuidere a per b, vt fiat quotiens $\frac{a}{b}$ Vbi hìc oportet aduertere non eſſe mirandum ſi applicetur quantitas, quantitati eiuſdem omnino dimenſionis ; Tametſi enim ſuo loco docuerimus applicandam eſſe quantitatem altiorem, depreſſiori, tamen non repugnat etiam applicationem fieri vnius quantitatis ad aliam eiuſdem dimenſionis, ſi per ipſas ſpecies intelligantur quantitates diſcretę; vnde ſi per a intelligatur exempli gratia 20, & per b intelligatur 4, nullum ſequitur incommodum, nempe ſi a intelligatur applicari ad. b. Imo etiam illud quoque licet hìc, nempe lineam hunc in modum deſignare $\frac{a}{b}$ vel $\frac{b}{c}$ vel $\frac{c}{d}$ ſue $\frac{b}{d}$ alijſue modis ſimilibus, non ſecus ac in Arithmetica, fractiones deſignare valemus cùm dicimus $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. fractio enim literis exprimitur, imo cùm numerator ad denominatorem non habeat rationem commemſurabilem, ſed quæ ſimilis ſit lineæ ad lineam, quarum vna fungatur munere numeratoris, altera verò denominatoris eiuſdem fractionis. Vnde intelligimus lineam a ſę habere tanquam numeratorem, at b, velut denominatorem eiuſdem fractionis, itaut reſpondeat exempligratia fractioni Arithmeticæ $\frac{2}{3}$ vel $\frac{2}{℞ 5}$, adeo vt ſignificetur eo ſymbolo ratio, quæ eſt inter 2, & 3, vel inter 2, & ℞ 5, vel alia, prout res de qua fit ſermo, expoſcit.

Hic non nulla notatu digna circa diuiſionem ſunt aduertenda.

Alia diuiſionis exempla afferuntur, ac explicantur.

Si verò proponeretur ℞ $\overline{a b c^2}$ ſeu c ℞ ab diuidendum per ℞ a b, fiet quotiens c ; vt enim ℞ a b ſi ducatur in c, fit c ℞ a b, ita ſi c ℞ a b diuidatur per ℞ a b, fiet quotiens c. Cæterum, vt ſuperiùs vidimus idem eſt c ℞ a b, ac eſt ℞ $\overline{a b c^2}$, hoc enim ſymbolo denotamus quadratum ex c ductum eſſe in a b, & ex producto radicem eſſe extractam, at cùm ſcribimus c ℞ a b, ſignificamus, ducendum eſſe c in ℞ a b, & ex producto extrahendam eſſe radicem. Vt enim idem eſt 2 ℞ a b, ac eſt ℞ $\overline{4 a b}$, ſeu 4, ℞, a b, &c. quod ſuperiùs luculenter explicuimus, ita hìc idem eſt c ℞ a b, ac eſt ℞ $\overline{a b c^2}$. Nec diſſimiliter procedendum erit in alijs diuiſionibus perficiendis, cùm ſcilicet datæ quantitates, nempe diuidenda, & diuidens communicantes fuerint.

Quando quãtitates nõ fuerint communicantes, quamodo procedendum in diuiſione perficienda.

Quod ſi quantitates non fuerint communicantes, diuidendæ erunt quantitates ſub ſignis radicalibus comprehenſæ ; quantitati autem ortiuæ pręfigendum erit commune radicale ſignum; Vt ad diuidendum ℞ $\overline{a^3 b - a b^3}$ per ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ oportet diuidere $a^3 b - a b^3$ per $a^2 - b^2$, prouenit autem a b ; ſi enim + $a^3 b$ diuidatur per + a^2, prouenit + a b, ſi verò − $a b^3$ per − b^2 prouenit item + a b, cui pręfixo eodem radicali ſigno, prouenit quotiens ℞ a b, tantum igitur oritur ex diuiſione ipſius ℞ $\overline{a^3 b - a b^3}$ per ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ quę vt meliùs intelligantur, alia afferemus exempla.

Si proponatur ℞ $\overline{a^4 b - a b^4}$ diuidendum per ℞ $\overline{a^3 - b^3}$, diuidatur $a^4 b - a b^4$ per $a^3 - b^3$ prouenit autem a b ; nam ſi diuidatur $a^4 b$ per a^3 prouenit a b, ſi diuidatur $a b^4$ per b^3 prouenit item a b, quare ſupereſt tantùm, vt pręfigamus ipſi a b, ſignum radicale ℞.

Ita ſi oporteat diuidere ℞ $\overline{a^4 b + a^2 b^3 + a^2 b d^2}$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2 + d^2}$ Diuiſis $a^4 b +$
$a^2 b^3$

$a^3 b^4 + a^3 b d^3$ per $a^3 + b^3 + d^3$, proueniet $a^3 b$, cui si prefigatur idem signum radicale, proueniet ℞ $a^3 b$, & sic de similibus.

Quod si contra oporteat diuidere ℞ $\overline{a^3 b + a^3 b^4 + a^3 b d^3}$ per $a^3 b$, fiet quotiens ℞ $\overline{a^3 + b^3 + d^3}$ eodemque modo procedendum in cæteris, quando nimirum signa radicalia fuerint eiusdem nature. *Aliud exemplum.*

At si radicalia signa diuersa extiterint, priùs reducenda erunt ad idem signum, deinde procedendum, vt priùs, quod exemplis planum fiet. *Quando radicalia signa diuersa extiterit.*

Opus sit diuidere ℞ $\overline{a^4 + 2a^3 b - 2ab^3 - b^4}$ per $a + b$, ducatur $a + b$ in se, & fiet $a^2 + 2ab + b^2$ itaque diuisor erit ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$, per hunc igitur diuisorem diuidatur ℞ $\overline{a^4 + 2a^3 b - 2ab^3 - b^4}$ & fiet quotiens ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ quod si diuidere oporteret ℞ $\overline{a^4 + 2a^3 b - 2ab^3 - b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ fieret quotiens ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$ hoc est $a + b$. At si oporteret diuidere ℞ $\overline{a^4 + 2a^3 b + 2ab^3 + 3a^2 b^2 + b^4}$ per $a + b$, non dissimiliter procedendum: Ducendum est enim $a + b$ in se, vt fiat $a^2 + 2ab + b^2$ erit igitur diuisor ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$ diuisione verò instituta proueniet quotiens ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ quod si diuidere oporteret ℞ $\overline{a^4 + 2a^3 b + 2ab^3 + 2a^2 b^2 + b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ fieret quotiens ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$, hoc est $a + b$, vt perspicuum est. *Exempla ad eā declarandum.*

Diuidere sit iniunctum $a^3 + ab^2$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$. Primò multipliciter $a^3 + ab^2$ in se, prouenit verò $a^6 + 2a^4 b^2 + a^2 b^4$; Diuidere igitur oportet ℞ $\overline{a^6 + 2a^4 b^2 + a^2 b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ facta verò diuisione fit, quotiens ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ *Exemplum alterum ad idem.*

$$\begin{array}{r} a^3 + ab^2 \\ a^3 + ab^2 \\ \hline a^4 b^2 + a^2 b^4 \\ a^6 + a^4 b^2 \\ \hline a^6 + 2a^4 b^2 + a^2 b^4 \end{array}$$

Huius diuisionis ea est ratio; Si diuidatur ℞ $\overline{a^4 + 2a^3 b - 2ab^3 - b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$ sumenda sunt eorum qoadrata vnde diuidere oportet $+ a^4$ per $+ a^2$, & pro venit $+ a^2$, si diuidatur $+ 2a^3 b$ per $2ab$, fit quotiens item $+ a^2$, si verò diuidatur $- 2ab^3$ per $2ab$, fit quotiens $- b^2$ si diuidatur $- b^4$ per $+ b^2$ fit quotiens $- b^2$ vnde quotiens integer erit ℞ $\overline{a^2 - b^2}$. *Diuisionis ratio.*

Non secus cum diuiditur ℞ $\overline{a^4 + 2a^3 b + 2ab^3 + 2a^2 b^2 + b^4}$ per ℞ $\overline{a^2 + 2ab + b^2}$ sumenda sunt eorum quadrata, vnde si diuidatur $+ a^4$ per $+ a^2$, fiet quotiens $+ a^2$ si diuidatur $+ 2a^3 b$ per a^2 fit quotiens $2ab$. Si verò diuidatur $+ 2a^2 b^2$ per b^2 fit quotiēs $+ b^2$ vbi aduerte $a^2 b^2$ bis adhiberi, semel in prima, & semel in tertia diuisione, vnde restituit $2a^2 b^2$ quod est in quantitate diuidenda, quod diuisione facta secundum formam ipsius, constabit. Itaque integer quotiens erit ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ *Exemplum alterum.*

Quod si proponatur diuidendum $a^2 + b^2$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ oportet diuidere $a^2 + b^2$ per suum latus cuiusmodi est ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, at si quadratum applicetur lateri oritur latus, quamobrem quotiens erit ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ *Item aliud exemplum ad idem.*

Quod si oporteat diuidere $a^3 + ab^2$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ orietur a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$; nam oportet reductionem facere ad idem signum radicale, quare ducendum est $a^3 + ab^2$ in se, vt fiat $a^6 + 2a^4 b^2 + a^2 b^4$, vnde diuidere oportet ℞ $a^6 + 2a^4 b^2 + a^2 b^4$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, sumptis eorum quadrantis diuidendo a^6 per a^2 fit quotiens a^4, quo ducto in $a^2 + b^2$, diuisorem fit $a^6 + a^4 b^2$ hoc subtracto ex quantitate diuidenda, fit reliquū $a^4 b^2 + a^2 b^4$ hoc diuiso per eundem diuisorem $a^2 + b^2$ fit quotieus $a^2 b^2$ quo multiplicato per $a^2 + b^2$ fit productum $a^4 b^2 + a^2 b^4$, quo subtracto ex reliquo iam dicto, nihil remanet, itaut quotiens fit $a^4 + a^2 b^2$, cuius latus est a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$. Hæc autem multiplicatione comprobantur, si enim ducamus ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ in a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ fit productum $a^3 + ab^2$ vel si ducamus $a^4 + a^2 b^2$ quadratum quotientis a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ in $a^2 + b^2$ quadratum ipsius ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ diuisoris, fit $a^6 + 2a^4 b^2 + a^2 b^4$ quadratum diuidendę quantitatis $a^3 + ab^2$. *Exemplum aliud.*

Quia tamen id quibusdam non probatur, lubet hunc in modum confirmare.

Supponamus à valere 3, & b, valere 4, argo a^2, valet 9, & b^2, valet 16, atque $a^2 + b^2$ valebit 25, quare pretium ipsius ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, erit 5. Diuisor igitur erit 5. At verò quod est diuidendum erat $a^3 + ab^2$, ex hypothesi iam dicta a^3, valebit 27, & ipsius ab^2, pretium erit 48, quare $a^3 + ab^2$ valebit 75. Cum igitur diuidere *Explicatio supradictorum.*

dere

dere oportet $a^3 + a\,b^2$ per ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, perinde est, ac diuidere 75 per 5, fit autem quotiens 15, at cùm diceremus quotientem fieri a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ rectè se habet; nam a^2 est 9, & b^2 est 16, è quibus fit 25, cuius latus est 5, quod ductum in 3 facit 15.

Quorundam error detegitur. Malè igitur alij pragmatiam instituunt.

Exemplum ad idem. Sit iniunctum diuidere $a^2 - b\,c$ per $a +$ ℞ $b\,c$, fiet quotiens $a -$ ℞ $b\,c$, quod multiplicatione comprobabitur, si enim diuisor $a +$ ℞ $b\,c$, ducatur in $a -$ ℞ $b\,c$ quotientem iam dictum, producitur $a^2 - b\,c$, quantitas diuidenda. Diuisionis autem instituendæ ratio est, quia si diuidatur a^2 per a fit quotiens a, quo ducto in a fit a^2 hoc subtracto ex a^2 remanet $- b\,c$ ducto autem in ℞ $b\,c$, fit a ℞ $b\,c$ atque adeo reliquum diuidendi erit $- a$ ℞ $b\,c - b\,c$ at si $- a$ ℞ $b\,c$ diuidatur per a fit quotiens $-$ ℞ $b\,c$ quo ducto in $+$ ℞ $b\,c$, fit productum $- b\,c$ quo subtracto ex reliquo diuidendi, $- b\,c$ nihil remanet; vnde diuisio est absoluta, & ad finem perducta.

$a +$ ℞ $b\,c$	diuisor
$a -$ ℞ $b\,c$	quotiens
$-$ ℞ $a^2 b\,c - b\,c$	
$a^2 +$ ℞ $a^2 b\,c$	
$a^2 - b\,c$	

Exemplum alterum. At si foret operæ pretium diuidere $a^2 + 2$ ℞ $a^2\,b\,c + b\,c$ per $a +$ ℞ $b\,c$ quotiens fieret $a +$ ℞ $b\,c$, propterea quod $a^2 + 2$ ℞ $a^2\,b\,c + b\,c$ est quadratum ipsius $a +$ ℞ $b\,c$, quadratum autem applicatum lateri restituit latus.

Exemplo rursus præceptum declaratur. Ita similiter si propositum fit diuidere $a\,b + b$ ℞ $b\,c$ per $a +$ ℞ $b\,c$ fit quotiens b, eadē enim quãtitas b oritur si diuidatur $a\,b$ per a & b ℞ $b\,c$ per ℞ $b\,c$ propterea ex huiusmodi diuisione quotiens proueniens erit b; quod multiplicatione comprobatur, namque multiplicato $a +$ ℞ $b\,c$ per b, fit productum $a\,b + b$ ℞ $b\,c$, quotiens igitur est quantitas b, quę ducta in diuisorem $a +$ ℞ $b\,c$, facit diuidendam quantitatem $a\,b + b$ ℞ $b\,c$.

Exemplum alterum vt dictum. Propositum sit diuidere ℞ $\overline{a^4 + 2\,a^3\,b - 2\,a\,b^3} - a^2 + b^2$ per $a + b$. Oportet autem procedere, vt dictum est, & proueniet quotiens ℞ $\overline{a^2 - b^2} - a + b$. Si enim ℞ $\overline{a^4 + 2\,a^3\,b - 2\,a\,b^3 - b^4}$ diuidatur per $a + b$, hoc est per eius quadratum $a^2 + 2\,a\,b + b^2$ diuidatur $a^4 + 2\,a^3\,b - 2\,a\,b^3 - b^4$, oritur $a^2 - b^2$, cuius latus est ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, at si $- a^2 + b^2$ diuidatur per $+ a + b$, fit quotiens $- a + b$. Hæc verò multiplicatione comprobantur.

$- a + b$	$a + b$
$a + b$	$a + b$
$- a\,b + b^2$	$a\,b + b^2$
$- a^2 + a\,b$	$a^2 + a\,b$
$- a^2 + b^2$	$a^2 + 2\,a\,b + b^2$
	$a^2 - b^2$
	$- a^2\,b^2 - 2\,a\,b^3 - b^4$
	$a^4 + 2\,a^3\,b^2 + a^2\,b^2$
℞ $\overline{a^2 - b^2} - a + b$	$a^4 + 2\,a^3\,b^2 - 2\,a\,b^3 - b^4$
$a + b$	
℞ $\overline{a^4 + 2\,a^3\,b^2 - 2\,a\,b^3 - b^4} - a^2 + b^2$	℞ $\overline{a^4 + 2\,a^3\,b^2 - 2\,a\,b^3 - b^4}$

Multiplicatione diuisio superior comprobatur. Diuisor est $a + b$, quotiens verò ℞ $\overline{a^2 - b^2} - a + b$ si enim $- a + b$ ducatur in $+ a + b$ fit productum $- a^2 + b^2$, at verò si ℞ $\overline{a^2 - b^2}$ ducatur in $+ a + b$ fit productum ℞ $\overline{a^4 + 2\,a^3\,b - 2\,a\,b^3 - b^4}$, ad id enim oportet $a + b$ quadraticè multiplicare, vt constat ex præceptis suo loco traditis, per huiusmodi verò multiplicationem producitur a^2

$+ 2\,a\,b$

$\dagger\ 2ab \dagger b^2$ ducendum in $a^2 - b^2$, nempe quadratum ipsius ℞ $\overline{a^2 - b^2}$, & fit $a^4 \dagger 2a^3b - 2ab^3 - b^4$, cuius latus est ℞ $\overline{a^4 \dagger 2a^3b - 2ab^3 - b^4}$, atque adeo productum integrum erit quantitas illa diuidenda ℞ $\overline{a^4 \dagger 2a^3b - 2ab^3 - b^4} - a^2 \dagger b^2$. Rectè igitur enunciatum fuit ex supradicta diuisione oriri ℞ $\overline{a^2 - b^2} - a \dagger b$.

Exemplum. Propositum sit diuidere $a^3 \dagger ab^2 \dagger ab$ ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ per a ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ proueniet quotiens ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2} \dagger b$. Siquidem a ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ diuidendo ab ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ facit quotientem b, at verò a ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ diuidendo $a^3 \dagger ab^2$, facit quotientem ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$, propterea ex illa diuisione orietur ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ ✠ b. Id autem multiplicatione confirmabitur, vt à latere hìc cernere licet. Verum non erit abs re numeris hęc illustrare, sat erit tamen hoc vnum exemplum explicasse.

℞ $\overline{a^2 \dagger b^2} \dagger b$
$\dagger a$ ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$
———————
a^3 ✠ ab^2 ✠ ab ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$

Numeris hactenus dicta declarantur. Supponamus ipsius a valorem esse 3, at verò ipsius b pretium esse 4, igitur a^2 valebit 9, & b^2 valebit 16, quare $a^2 \dagger b^2$, valebit 25, vnde ipsius ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ pretium erit 5, at a^3 valebit 27, & ab^2, valebit 48, quare ipsius $a^3 \dagger ab^2$ valor erit 75 sed ab valebit 12, & quia ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ valet 5, vtique ab ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ valebit 60, vnde, cum $a^3 \dagger ab^2$ valent 75, tota quantitas nempe $a^3 \dagger ab^2 \dagger$ ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ valebit 135, est igitur diuidenda quantitas, cuius valor est 135, & quia diuisor est a ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$, & a valet 3, vt ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$, valet 5, ipsum a ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$, valebit 15, perinde igitur erit diuidere $a^3 \dagger ab^2 \dagger ab$ ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ per a ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ ac diuidere 135 per 15, ex hac autem diuisione oritur 9 sed quotiens ex prędicta diuisione dicebatur esse ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2} \dagger b$, manifestum est autem huius pretium esse 9, siquidem ℞ $\overline{a^2 \dagger b^2}$ est 5, at verò b est 4 ex 5, & 4 fit 9. Optimè proinde Diuisio ad eum, quem diximus modum, perficitur.

Aliud rursus proponitur exemplum. Diuidatur $ab - cd$ per ℞ ab — ℞ cd, fiet autem quotiens ℞ ab ✠ ℞ cd, est enim ab quadratum ipsius ℞ ab, quadratum autem applicatum lateri restituit latus. Deinde si — per — diuidatur emergit ✠ mox autem ℞ cd, diuidens cd, ob eandem rationem; faciet ℞ cd, siquidem cd est quadratum ipsius ℞ cd, quare integer quotiens erit ℞ $ab \dagger$ ℞ cd, quod est magnopere obseruandum. In his autem diuisionibus se se quisque debet exercere.

Exemplum. Proponatur a^3 ✠ bc ℞ bc, diuidendum per a ✠ ℞ bc. Diuidatur a^3 per a fit quotiens a^2, quo ducto in diuisorem a ✠ ℞ bc fit $a^3 \dagger a^2$ ℞ bc hoc subtracto ex diuidendo $a^3 \dagger bc$ ℞ bc remanet $\dagger bc$ ℞ $bc - a^2$ ℞ bc. Deinde diuidatur bc ℞ $bc - a^2$ ℞ bc per eundem diuisorem, & fit quotiens $\dagger bc$, hoc multiplicato per a ✠ ℞ bc diuisorem, fit $abc \dagger bc$ ℞ bc quo subtracto ex bc ℞ $bc - a^2$ ℞ bc, remanet $-a^2$ ℞ $bc - abc$ modo diuidatur $-a^2$ ℞ $bc - abc$ per eundem diuisorem, fit quotiens $-a$ ℞ bc, quo ducto in diuisorem a ✠ ℞ bc fit productum $-a^2$ ℞ $bc - abc$, quo substracto ex $-a^2$ ℞ $bc - abc$ nihil remanet; atque adeo diuisio ad finem perducta erit.

Exemplum alterum multiplicatione comprobatum. Pręterea sit iniunctum diuidere $a^2b^2 - c^2d^2$ per ℞ ab — ℞ cd, fiet quotiens $\overline{ab \dagger cd}$ ℞ $ab \dagger \overline{ab \dagger cd}$ ℞ cd autem hic ductus in diuisorem ℞ ab — ℞ cd dabit quantitatem diuidendam $a^2b^2 - c^2d^2$. quod cernere licet hìc à latere ex apposito paradigmate, vbi nimirum supradicta instituitur multiplicatio quotientts per diuisorem.

$\overline{ab \dagger cd}$ ℞ $\dagger\ \overline{ab \dagger cd}$ ℞ cd quotiens
℞ ab — ℞ cd diuisor
———————
$-\ \overline{ab \dagger cd}$ ℞ ab ℞ cd — $\overline{ab \dagger cd}\ cd$
$\dagger\ \overline{ab \dagger cd}\ ab \dagger \overline{ab \dagger cd}$ ℞ ab ℞ cd
———————
$\dagger\ \overline{ab \dagger cd}\ ab - \overline{ab \dagger cd}\ cd$ productum.

$-\overline{ab \dagger cd},\ cd$
cd
———
$-abcd \dagger c^2d^2$

$\overline{ab \dagger cd},\ ab$
ab
———
$\dagger a^2b^2 \dagger abcd$
$-abcd \dagger c^2d^2$
———
$a^2b^2 - c^2d^2$

Hęc

Explicatur instituta diuisio.

Hec verò nos infra comprobabimus explicatione numerorum; interim adnotetur diuisionis institutio; quę fit iuxta præcepta tradita; est enim a b latus quadratum ipsius $a^2 b^2$, si enim a b ducatur in se fit $a^2 b^2$ præterea c d est eodem modo latus ipsius $c^2 d^2$ hæc latera simul iuncta faciunt a b † c d, in hoc autem aggregatum, ducatur latus quadrato-quadratum eiusdem $a^2 b^2$ nempe ℞ a b, fiet enim $\overline{a b}\,\dagger\,\overline{c c}$ ℞ a b.

Non dissimiliter, a b, vt diximus est latus quadratum ipsius $a^2 b^2$, & c d latus quadratum ipsius $c^2 d^2$ hęc duo latera simul iunct faciunt $\overline{a b}\,\dagger\,\overline{c d}$ in hoc autem aggregatum ducatur latus quadrato-quadratum ipsius $c^2 d^2$, nempe ℞ c d. Itaque totum quod ex diuisione emergit, erit $\overline{a b}\,\dagger\,\overline{c d}$ ℞ a b ✠ $\overline{a b}\,\dagger\,\overline{c d}$ ℞ c d, & ita diuisio commemorata perficitur. Si verò quotiens iam dictus multiplicatus fuerit per diuisorem ℞ a b — ℞ c d producitur † $\overline{a b}\,\dagger\,\overline{c d}$ a b — $\overline{a b}\,\dagger\,\overline{c d}$ c d hoc est † $a^2 b^2$ † a b c d, & — a b c d † $c^2 d^2$ totum autem hoc a b illo in additione subtrahendum ob notam, symbolumue defectus, quare, similibus de medio sublatis, fiet residuum $a^2 b^2$ — $c^2 d^2$ nempe quantitas diuidenda.

Illustrantur numeris hactenus tradita.

Cæterum hęc illustrantur numeris hunc in modum a, valeat 16, b, 25, c, 4, & d, 9. Itaque a b erit 400, at c d erit 36, vnde a b † c d erit 436 sed ℞ a b, erit ℞ 400, nempe 20, quare ducatur 436 in 20, & proueniet 8720, & hoc erit pretium ipsius $\overline{a b}$ ✠ $\overline{c d}$ ℞ a b. Deinde idem 436, pretium ipsius a b ✠ c d, ducatur in 6, pretium ipsius ℞ c d, & prouenict 2616, quo addito ad 8720, fit 11336. At si a b, valet 400, ℞ a b, valebit 20, & si c d valet 36, ℞ c d, valebit 6, quare ℞ a b — ℞ c d, pretium erit 14, quo ducto in 11336, fit 158704. Hoc autem est etiam pretium diuidendæ quantitatis $a^2 d^2$ — $c^2 d^2$ siquidem a^2 valet 256, & b^2 valet 625, ex horum mutua multiplicatione prouenit 160000, at verò si d valet 9, d^2 valebit 81, & si c valet 4, c^2 valebit 16, at ex 16 in 81 fit 1296. Si verò $a^2 b^2$ valet 160000, & $c^2 d^2$ valet 1296, horum differentia 158704, erit pretium ipsius, $a^2 b^2$ — $c^2 d^2$, vt superiùs dicebamus.

Diuisionis aliud proponitur exemplum.

Propositum sit diuidere a^3 ✠ a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c per a — ℞ b c, fiet quotiens a^2 ✠ b c — 2 a ℞ b c, quod multiplicatione comprobabitur, & numeris illustrabitur. Interim adnotetur methodus diuisionis siquidem ex multiplicatione diuisoris per quotientem fit quantitas diuidenda.

Explicatur diuisio.

Diuiso enim a^3 per a fit quotiens a^2, cum verò diuiso a^3 per a fiat quotiens a^2, ducatur a^2 in a — ℞ b c diuisorem, fiet productum a^3 — a^2 ℞ b c, hoc subtracto ex a^3 ✠ a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c, fit reliquum 2 a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c, diuidatur hoc ipsum residuum per

									a^2 ✠ b c ✠ 2 a ℞ b c							
									a — ℞ b c							
— a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — 2 a b c																
✠ a^3 ✠ a b c ✠ 2 a^2 ℞ b c																
a^3 ✠ a b c ✠ a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — 2 a b c																
hoc est a^3 ✠ a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c																

eundem diuisorem, & fiet quotiens b c adiungendus priori quotienti a^2, multiplicetur b c per a — ℞ b c diuisorem, fiet productum ✠ a b c — b c ℞ b c quo subtracto ex 2 a^2 ℞ b c — b c ℞ b c — a b c fiet reliquum 2 a^2 ℞ b c — 2 a b c, diuidendum per eundem diuisorem, facta autem diuisione, fit quotiens 2 a ℞ b c, quo ducto in a — ℞ b c diuisorem, producitur 2 a^2 ℞ b c — 2 a b c, quo subtracto ex 2 a^2 ℞ b c — 2 a b c, nihil remanet, vnde diuisio ad finem perducta est, & ex præceptis traditis diuidemus etiam hoc plurinomium a^4 ✠ a b c d ✠ b^2 ℞ b c d ✠ a d^2 — a^3 ℞ b c — b c d ℞ b c — a ℞ b c ℞ b c d — d^2 ℞ b c per a — ℞ b c, fiet autem quotiens a^3 ✠ b c d ✠ a ℞ b c d ✠ d^2 quod multiplicatione comprobabitur.

a^3 ✠ b

$$a^3 + bcd + a\,\text{℞}\,bcd + d^3$$
$$a - \text{℞}\,bc$$

$$-a^3\,\text{℞}\,bc - bcd\,\text{℞}\,bc - a\,\text{℞}\,bc\,\text{℞}\,bcd - d^3\,\text{℞}\,bc$$
$$a^4 + abcd + a^2\,\text{℞}\,bcd + ad^3$$

$$a^4 + abcd + a^2\,\text{℞}\,bcd + ad^3 - a^3\,\text{℞}\,bc - bcd\,\text{℞}\,bc - a\,\text{℞}\,bc\,\text{℞}\,bcd - d^3\,\text{℞}\,bc.$$

Quod numeris licebit citra difficultatem explicare, diuisionis verò methodus eadem est cum præcedentibus.

Exercitatio assidua plurimũ ad huius Artus pragmatiam conducit.

Illud porro silentio non præteribo, videlicet huiusmodi operationes, vt rectè exerceantur, præter Artis præcepta, longam, assiduamque exercitationem requiri, sine qua nemini licebit expeditam, promptamque pragmatiam comparare, studiosis igitur est insudandum, ad hanc enim Artem capessendam improbus labor exigitur, segni verò, ac impatientes laboris ab huiusmodi studijs arcendi sunt.

Numeris hæc illustrantur.

Numeris autem hęc illustrare facilè quidem erit. Supponamus ipsius a pretium esse 16, b, verò 25, at c esse 4, ergo a^3 valebit 4096, quoniam verò a, valet 16, eius quadratum erit 256, quo ducto in 10, pretium ipsius ℞ b c fiet 2560.

Itaque 2560, erit pretium ipsius a^2 ℞ b c eoque addito ad 4096, valorem ipsius a^3, fit 6656 pretium ipsius $a^3 + a^2$ ℞ b c at verò b c, valet 100, hoc autem ducto in 10, prætium ipsius ℞ b c, fit 1000 pretium ipsius b c ℞ b c quo subtracto ex 6656, pretio ipsius $a^3 + a^2$ ℞ b c remanet 5656, subtrahatur 1600, valor ipsius a b c fit reliquum 4096.

Continuatio superioris illustrationis.

Nunc perpendamus pretium producti ex diuisore in quotientem, diuisor est a — ℞ b c hoc est 16 minus 10, nempe 6, quotiens dicebatur $a^2 + bc + 2a$ ℞ b c nempe 256 + 100 + 320, hoc est 676, quo multiplicato per 6 fit productum 4056, quantum est pretium quantitatis diuidendæ. Cæterum in hac, quam attulimus diuisione, quidam neotericus haud ingnobilis Analysta deceptus est.

a^4	= 65536	a^3 ℞ b c	= 40960	a^3	= 4096
a b c d	= 14400	b c d ℞ b c	= 9000	b c d	= 900
a^2 ℞ b c d	= 7680	a ℞ b c ℞ b c d	= 4800	a ℞ b c d	= 480
a^3 ℞ b c	= 11664	d^3 ℞ b c	= 7290	d^3	= 729
	99280		62050		6205
	62050				6
	37230	a — ℞ b c	= 6		37230.

Quando diuisio institui nequit quid agendum.

Quando verò nequit institui diuisio, fieri debet fractio ac proinde si proponatur ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ diuidendum per c + d, fiet quotiens $\frac{\text{℞}\, a^2 + b^2}{c+d}$, nequit enim ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ diuidi per c + d quare fieri debet fractio. Ita si foret opus diuidere ℞ $\overline{a^3 + b^3}$ per eundem diuisorem, c + d, fieret fractio $\frac{\text{℞}\, a^3 + b^3}{c+d}$ non secus si foret ℞ $\overline{a^4 + b^4}$ per eundem diuiuisorem diuidendum fieret enim quotiens $\frac{\text{℞}\, a^4 + b^4}{c+d}$. Insuper idem eueniet in diuisione hnius ℞ $a^2 + b^2$ per d fiet enim qnotiens $\frac{\text{℞}\, a^2 + b^2}{d}$ præterea si opus fuerit diuidere ℞ $\overline{a^3 + b^3 - c^3}$ per d — e fiet quotiens $\frac{\text{℞}\, a^3 + b^3 - c^3}{d-e}$. Aduerte autem fractionem illam superiorem, & similes aliter etiam scribi posse, vnde ℞ $\overline{a^4 + b^4}$, si diuidatur per c + d, scribi poterit quotiens ne dum, vt supra, sed etiam hoc modo ℞ $\frac{a^4 + b^4}{c^4 + \ldots}$ Ita quoque de alijs intelligendum suo modo.

Aliquando contingit, vt quantitas irrationalis intelligenda, vt ducta in aliquam quantitatem rationalem.

Quandoque contingit, vt quantitas irrationalis intelligenda sit ducta in aliquam quantitatem rationalem, diuisio verò instituenda sit per aliquam quantitatem, vt cùm proponitur a ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, diuidendum per b fiet quotiens $\frac{a}{b}$ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$, quod si alter quicumque diuisor fuerit, non dissimiliter procedendum, vt si per a + b fore instituenda diuisio, fieret enim quotiens $\frac{a}{a+b}$ ℞ $\overline{a^2 + b^2}$ insuper propositum sit diuidere a^2

re a^2 ℞ $\overline{b^2 d^2}$ per c † e fieret quotiens $\frac{a^2}{c+e}$ ℞ $\overline{b^2 d^2}$. Quę vt meliùs innotescant, illustrare numeris iuuabit.

Explicatio supradictorum. Supponamus a valere 2, eius quadratum valebit 4 at verò b valeat 3, eius quadratum valebit 9, quare $a^2 b^2$ valebit 36, vnde ℞ $\overline{a^2 b^2}$, valet 6, necesse est; hæc si intelligatur ducta in 2 pretium ipsius a, fiet productum 12, hoc autem proponitur diuidendum per a ✠ b, hoc est per 5, & dictum est oriri $\frac{2}{a+b}$ ℞ $\overline{a^2 ✠ b^2}$, & ita est propterea quod, si 12 diuidatur per 5 fit quotiens 2 $\frac{2}{5}$ at si 2 diuidatur per 5 nempe a per a ✠ b, fit quotiens $\frac{2}{5}$ quo ducto in 6, pretium ipsius ℞ $\overline{a^2 b^2}$ fit productum 2 $\frac{2}{5}$. Hinc igitur perspicuè constat rectè diuisionem illam ad eum modum institui.

Fractiones vnde ortum ducant. Fractiones autem ex diuisionibus passim contingunt, vnde si a^2 ℞ a b c d diuidi debeat per a † b — c fiet quotiens $\frac{a^2 + ℞\, abcd}{a+b-c}$ si ita si fuerit a^2 ✠ ℞ a b c d diuidendum per a † ℞ b c, fiet quotiens ad modum fractionis $\frac{a^2 + ℞\, abcd}{a + ℞\, bc}$.

S C H O L I O N.

Operatio qua fractiones ad integras magnitudines reuocantur vtilis est. *VTilissima est illa operatio, qua factas magnitudines ad integras reuocamus; Haud rarò siquidem contingit in æquationibus reperi magnitudines fractas, quasi non reducantur ad magnitudines integras nequeunt feliciter explicari.*

Data sit fractio $\frac{bk^2}{d}$ oporteat eam in integras magnitudines transmutare. Fiat, vt d ad b ita k^2 ad aliud quidpiam, quod sit z^2, & ita z^2 erit idem, quod $\frac{bk^2}{d}$.

Sit $\frac{abg}{d}$ fiat vt d ad b ita g ad f erit a f idem, quod planum illud $\frac{abg}{d}$.

Data sit fractio $\frac{b^2 f + d^2 f}{g}$. Hanc autem oporteat ad integras magnitudines reuocare. Fiat vt g ad f ita b^2 † d^2 ad aliud quidpiam, quod sit z^2, & ita idem erit z^2 quod fractio illa $\frac{b^2 f + d^2 f}{g}$.

Exempla varia. *Data sit fractio $\frac{bg}{d}$ quam oporteat ad integras magnitudines reuocare. Fiat vt d ad g, ità b ad aliam quampiam magnitudinem, quæ sit f, & erit f idem, quod $\frac{bg}{d}$.*

Data sit fractio $\frac{bg+dg}{f}$, quam oporteat ad integras magnitudines reuocare. Fiat vt f ad g, ità b † d ad aliam quampiam magnitudinem, quæ sit z, & erit z idem, quod $\frac{bg+dg}{f}$.

Proponatur $\frac{br+bs}{f}$, fiat vt f ad r † s, ita b ad aliud, quod sit z, & erit z idem, quod superior illa fractio $\frac{br+bs}{f}$.

Operatio superior numeris illustratur *Hæc operatio nůmeris illustrari potest; supponamus fractionem esse $\frac{bd}{g}$, & b esto numerus 10, d verò 3, itaque b d valebit 30, at g sit 5, quamobrem fractio illa valebit 6, si namque 30 diuidantur per 5 fit quotiens 6, quantum oriri debet si disponantur termini illi sic, vt ijs reperiatur quartus proportionalis, nimirum si fiat, vt 5 ad 10, ita 3 ad aliud, nempe 6.*

Demonstratur facilè hæc operatio. Si enim duo sint latera, sub quibus rectangulum aliquod comprehenditur, hoc verò ad latus diuidens applicetur, diuidens erit primus terminus, in serie quatuor proportionalium terminorum, & latera erunt subsequentes termini sic, vt quotiens locum quartum in illa serie sortiatur, vt alibi dictum, explicatumque fuit.

Multa omittuntur, vt pate minus necessaria. *Multa hic possent in medium afferri, ea tamen cùm ex hactenus traditis facile intelli possint, libenter silentio prætereunda duximus sat enim est aduertisse qua arte sit facienda reductio fractarum magnitudinum ad integras, quod omnino erat animaduersione dignum cum non rarò eueniat, vt in æquationibus huiusmodi fractæ magnitudines reperiantur, quæ nisi ad magnitudines integras reuocentur, æquationes haud explicari possunt.*

De Æquatione Algebrica.

CAPVT IX.

IAm superiùs in Algebra Diophantea nos æquationem definiuimus, est autem ęquatio, quæ Græcis dicitur Ο᾽μαλισμὸς, nomen enim hoc æquationem importat, vt Ο᾽μαλότης æqualitatem significat, definiuimus verò dicentes ęquationem esse comparationem inter certam, & incertam magnitudinem. *Equatio quid sit explicatur.*

Itaque nil aliud æquatio est, quàm proportio æqualitatis inter duas magnitudines, duasue quantitates, vel res variè de nominatos quarum vna sit certa, & nota, altera autem incerta, & ignota; siquidem inter ea, que sunt eiusdem denominationis, ęquatio vel est inutilis, vt inter 4 a, & 4 a inter 5 a^2, & 5 a^2 inter a^2 + b a, & a^2 + b a, vel non erit ęqualitas, vt inter 4 a & 5 a, vel 3 a^2 + b a & a^2 + b a, &c. *Quid nomen æquatio importet.*

Huius autem æquationis varia sunt genera, quemadmodum memorato loco expliuimus; quamuis enim æquatio communi quadam vsurpatione suo quantitatum duarum, vel plurimum quacumquę æqualitate capiatur, hic tamen propriè accipitur, prout est quantitatis quæsitæ cum quantitate aliqua data, alterius ad alteram facta comparatione, distinctè ordinata æqualitas. In qua quidem pars quæsititia potestas est, vel pura, vel affecta, vt mox docemus pars autem data comparationis homo geneum dicitur etenim illa magnitudo incerta Radix est, vel Potestas, At verò Potestas pura est, vel affecta, & affectio aut est per affirmationem, aut per negationem. Sit æquatio $a^2 = z^2$. Seu $a^2 =$ b d. Potestas, nempe a^2 est pura; Si verò fuerit æquatio a^2 + b a $= z^2$. Potestas est afferta, & huiusmodi affectio est per affirmationem, diciturque affici ediunctione plani sub latere dataque creffieciente longitudine; Hæc verò æquatio Grecis dicitur καταφατικὴ; hoc est affirmatiua. Si verò fuerit æquatio a^2 — b a $= z^2$ dicitur potestas affecta per negationem, eaque dicitur affici multa plani sub latere, dataque coefficiente longitudiue, diciturque Α᾽ποφατικὴ seu apophatica, hoc est negatiua. Quando autem afficiens homogeneum cuiusmodi hic est b a, de Potestate negatur negatio est directa. Illud porro afficiens homogeneum diuisur quoniam eiusdem est dimensionis seu eandem dimensionis naturam participat cum Potestate, & cum Comparationis homageneo, vel vnico verbo, quoniam eandem dimensionis naturam participat cum cęteris magnitudinis in æquatione existentibus, At; si forei æquatio b a — $a^2 = z^2$. Dicitur Αμφιβολος seu amphibola, hoc est ambigua, & Planum autem sub latere dataque coefficiente longitudine in hac equatione afficitur multa quadrati, & quia Potestas regatur, de afficiente homogenea sub gradus, proinde negatio indirecta dicitur. Magnitudo autem certa, cui reliqua comparantur, dicitur comparationis homogeneum. Quando verò designatur z^2 pro comparationis homogeneo, potest etiam subrogari z planum; hoc enim interest inter hęc, quod, z planum se habet, tamquam genus, non transcendit tamen æquationes, at verò z^2 se habet tamquam species est enim quadratum, species planę magnitudinis. *Exemplis æquationes declarantur.* *Exemplum.*

Quandocumque verò Radix de qua quæritur in sua base consistens datæ magnitudini homegeneæ comparatur æquatio simplex absolutè dicitur vt si a æquetur b. Cùm autem Potestas quæsitæ radicis puræ ab affectione datæ homogeneę comparatur, ęquatio solet simplex climactica nuncupari. Vt si sit $a^2 =$ z plane. At cùm Potestas quæsitę radicis affectę sub designato gradu dataque coefficiente, datæ magnitudini comparatur homogeneę ęquatio πολυνομια, hoc est polinomia est pro multitudine, ac varietate affectionum, & tot potest affectionibus implicari ipsa Pote- *Equatio simplex quid.*

O stas,

ſtas, quot ad Poteſtatem gradus ſunt parodici, vt etiam in Algebra Numeroſa dic-tum eſt. Gradus autem parodici ad Poteſtatem dicuntur dignitates infra Poteſtatem exiſtentes in æquatione; Cùm autem in infinitum procedi poſſit in Scala graduum parodicorum: proinde, & affectiones in infinitum procedent, atque adeo, & æquationes. Sufficiat autem innuiſſe varietatis originem. Quoniam autem quatuor ad ſummum numero ſunt, quæ requiruntur ad æquationis explicationem. Primum æquationum inuentio. Secundum inuentæ æquationis Antitheſis Tranſpoſitio, ſeu Reductio. Tertium Paraboliſmus, hoc eſt Applicatio, ſeu Diuiſio. Quartum Analyſis, hoc eſt Reſolutio, ſeu Radicis extractio. De his igitur agendum ſupereſt.

Æquationes in infinitum pertrahi poſſunt.

Proponuntur ea de quibus proximè diſſerendum.

Admonitio ad lectorem circa vſum ſpecierum in operationibus perficiendis.

Hic lectorem monitum volumus nos in ſuperioribus, ſpeciebus ſic vſos fuiſſe, vt ordinatim illas collocauerimus, iuxta ordinem alphabeti, quę in ordine prædicto præcedunt, vnde maluimus ſcribere a b, quam b a, quamuis in idem recidat, idque factum à nobis fuit, quoniam hæc literarum, ſeu ſpecierum ordinatio magis eſt obuia ſaltem ex vſu ipſarum, at in poſterum, cum vocales, ad incertas, ignotaſque quantitates deſignandas, adhibeamus, potius libuit illas tractare quatenus in ijs ſe ſe exercuerunt celebriores Analyſtę, & nos quoque eos imitati facere conſueuimus, vnde in æquationibus illud obſeruabimus, ac in extractione radicis ex illis, quare potius ſcribimus a^2 ✠ b a ⊏ z^2, vel a^2 ✠ b a ⊏ z plano, quàm a^2 ✠ a b ⊏ z^2, ſeu a^2 ✠ a b ⊏ z plano, & ita de reliquis. Hìc enim a, ſignificat quantitatem ignotam, & propterea ob eandem rationem in ſequentibus ſcribemus e^2 ✠ b e ⊏ z^2 ſeu e^2 ✠ b e ⊏ z plano, & ita de reliquis.

Alia quedam notatione digna.

Illud quoque ſupereſt aduertendum, quod paulo ſuperiùs innuimus, & in prima huius Operis parte notauimus, quamuis comparationis homogeneum non neceſſariò eſſe debeat, determinatę ſpeciei cùm ſolùm requiratur homogenea natura inter æquationis membra, vnde ſi poteſtas planitiem non tranſcendit, comparationis homogeneum, planum dicatur, atque adeo rectè inſtituatur æquatio hoc modo a^2 ✠ b a ⊏ z plano, nihilominus, plerunque expedit ad ſpeciem certam deſcendere, nempe in planis ad quadratum, in ſolidis ad cubum, &c. quamobrem paſſim has æquationis formulas vſurpauimus, nempe a^2 ✠ b a ⊏ z^2 inſuper a^2 ✠ b pl. a ⊏ z^3. Imo ob eandem rationem, præſtat etiam coefficiens planum ad ſpeciem reſtringere, atque adeo a^3 ✠ b^2 a ⊏ z^3, id enim expeditiùs perficitur nec irrationabiliter id fit; propterea quod ſi quadratum eſt, planum eſt, & ſi cubus eſt etiam neceſsè eſt ſolidum eſſe; ſolùm enim aliquid videtur ingerere difficultatis, quoniam ſtatim quis ſuſpicatur huiuſmodi planum eſſe quadratum, cùm tamen ad æquationem nihil faciat; verùm ſi quis aſſueuerit omnem difficultatem abijciet, atque reperiet elegantiùs rem ipſam hunc, quem diximus in modum, tractari. Verùm, vt ingenuè fatear, res parui momenti eſt, atque adeo, vtro modo res explicęretur nihil refert, ſolùm hæc innuiſſe ſit ſatis.

Quo pacto ſcribere præſtet æquationes, vt elegantius explicentur.

Notanda quadam circa id de quo agitur.

Poſtremo loco videtur obſeruatione dignum; nempè non ſemper omnes commemoratas quatuor operationes ad æquationem explicandam, atque adeo ad Problema reſoluendum requiri, ſed aliquando ſufficere primam, cum ſecunda, quandoque, imo frequenter requiri tertiam, plerumque exigi quartam. Sed hic non ommittam animaduertendum, ſcilicet, ſæpeſepiùs contingere, vt eidem Problemati per plures æquationes fieri ſatis poſſit, prout varia poſitio fit analyſeos initio, & varia ipſius Dati tarctatio. Tunc autem par eſt ſemper ſimpliciora, implicatioribus præferre, niſi quis omnia velit ad oſtentationem fæcunditatis, illius, quam callet Artis, comiſcere, vnica non contentus reſolutione, de quibus multa nos in ſequentibus afferemus. In reſolutionibus etenim perficiendis, plurima præceptis vniuerſalibus explicatu dificilia, obuia fiunt, nullaque adhibita induſtria ſua ſponte occurrunt.

De

De æquationis inuentione.

CAPVT X.

Æquationis inuentio explicatur.

IIsdem præceptis indagatur equatio speciosa, quibus, & numerosa, cùm igitur proponitur Problema resoluendum, ea debet Aalysta curare, memoria que amplecti præcepta, quę ibi nos exposuimus. Si itaque sit quæstio de longitudine, & equalitas, aut proportio sub inuolucris eorum, quę proponuntur, lateat. Dicemus longitudinem quęsitam esse Latus.)Si verò quęstio sit de planitie lateat autem æqualitas, planities quęsita; Quadratum esto. Si de soliditate, quęritur, & equatio lateat, soliditas, de qua quæritur Cubus esto, & ita ascendet, vel descendet sua vi per gradus quoscunque, comparatarum magnitudinum, ea de qua est quęstio. His autem consideratis si sit resoluendum Problema magnitudines ipsę quęsitę, & datæ, sic tractari debent, compbrari, atque adeo addi, subtrahi, multiplicari, ac diuidi, prout quęstionis sensus requirit. Hoc enim pacto ad aliquam equalitatem peruenitur. Exemplis hęc omnia declarabimus. Admonendus priùs tamen Analysta ne sinat, vt animo excidat suo, equalitas, quę est inter factum sub extremis terminis in serie trium proportionalium, & quadratum medij, vt neque ea quæ est inter factum sub medijs, & sub extremis in serie quatuor proportionalium hęc enim consideratio plurimum confert, ad equalitatem indagandam.

Notanda quædam.

Hic tamen diligenter adnotandum occurrit, quod plerosque Tyronum decipit, nempe non quamcumqne equationem idoneam esse; de quo etiam superiùs non nulla tradidimus.

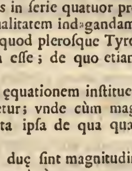
Hoc igitur in loco oportebit aduertere sic equationem instituendam esse, vt in ea, certa cum incerta magnitudine comparetur; vnde cùm magnitudo incerta, cum certa fuerit collata, innotescet incerta ipsa de qua quæritur, magnitudo.

Perpenditur æquationis instituendæ ratio.

Haud benè itaque instituerecur operatio; si duę sint magnitudines certę, ac notę, puta b, & d, velit autem, vt d, sit secunda è quatuor proportionalibus, b, verò sit differentia, inter primam, & quartam. Dicatur verò a esse quarta, itaut prima, sit b ✱ a at verò secunda ex hypothesi, cùm sit d superest indaganda tertia, vt igitur d ad b ✱ a ita a ad aliam nempe $\frac{ba+aa}{d}$ his verò habitis, quandoquidem sunt proportionales d; b ✱ a; a $\frac{ba+aa}{d}$; atque adeo vt b ✱ a ad d, ita $\frac{ba+aa}{d}$ ad a propterea factum sub extremis, nempe b a ✱ a^2, equabitur facto sub medijs, nimirum b a ✱ a^2. Hęc autem equatio inutilis est, cùm idem sit ex vtraque equationis parte, & quidem analogismum ex æqualitate deducentes, ex analogismo, & rursus ad equalitatem redeuntes inutilem laborem perferimus.

Quando inutilis æquatio fuerit.

Cùm autem hunc in modum instituta fuerit equatio ne inutilis fiat alia incedendum via; Si itaque fuerit triangulum C F D, in quo A B sit parallela ipsi C D. Supponamus autem A B esse a, A F esse b, C G esse d, C F esse f, & C E esse c erit* vt b ad d, ita a ad $\frac{da}{b}$ non est autem hinc inferenda æquatio, inter factum sub medijs, & sub extremis, cum & huiusmodi equatione ad analogismum deuentum fuerit, vt enim quartum terminum reperiremus, duximus



** Est enī triāgulum A F B simile triangulo C F D, cui simile est triangulum E H D, quare triangulum A F B, simile erit triangulo E H D, ob id vt A F ad A B, ita E H ad E D, & permutando, vt A F ad E H, hoc est ad C G ita A B ad E D quare, vt b ad a, ita d, ad $\frac{da}{b}$ proinde E D, erit $\frac{da}{b}$.*

ſecundum d in tertium a, vt fieret da cui æquale eſſe debet factum ſub primo b & quarto, & quia quod ſupereſficit multiplicatio illud reſoluit diuiſio, ob id da, factum ſub medijs applicatum ad b reſtituet quartum, at applicato da ad b, fit $\frac{da}{b}$ ob id $\frac{da}{b}$ erit quartus terminus nempe ED, exiſtentibus primo AF, ſecūdo AB, tertio EH ſeu CG.

Quomodo ratiocinandum ad conſequendum prædictum analogiſmum.

Vt autem hoc vtentes analogiſmo ad ęqualitatem perueniamus ita ratiocinandum, quandoquidem triangula illa AFB, CFD, ſimilia ſunt, erit pariter, vt AF ad AB, ita CF ad CD, at verò AF ſupponitur b, AE, ſupponitur a, inſuper CF ſupponitur f, & CD eſt $c + \frac{da}{b}$, vnde rectangulum $bc + da$, ęquabitur fa, quę quidem ęquatio ſecum habet proportionem adiunctam, per antitheſin enim ad hanc reuocatur $bc = fa - da$, & inſtituto paraboliſmo, omnibus videlicet applicatis ad $f - d$ fiet $a = \frac{bc}{f-d}$ quare reſoluta ęqualitate in proportionem, erit, vt $f - d$ ad c ita b ad a. Vnde ex tribus cognitis quantitatibus quarta innoteſcit.

Alij autem ſunt caſus innumeri, in quibus hactenus dicta obſeruare licet. Vt verò meliùs explicetur qua induſtria ad ęquationem perueniendum ſit, præſtabit plura in medium afferre exempla, quorum primum eſto.

Zeteticum I.

Data differentia duorum laterum, & aggregato eorundem, reperire latera.

Data ſit b differentia laterum d verò eorundem aggregatum oporteat; reperire latera. Minus latus eſto a, ergo maius erit $a + b$; ſed aggregatum laterum eſt notum, ſiquidem ponitur datum d; ergo erit ęquatio inter $2a + b$, ignotum, & d, notum, nempe $2a + b = d$. Quamobrem ad ęqualitatem peruenimus.

Secundò proponatur.

Zeteticum II.

Datum latus ita diuidere, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium, datam habeat rationem.

Datum ſit latus b diuidendum, ita vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium datam habeat rationem, proportio verò data ſit vt r, ad s. Pars, ad cuius quadratum deberet rectangulum habere ſtatutam proportionem eſto a, ergo pars altera neceſſariò erit $b - a$, quoniam autem rectangulum ſub his partibus ad quadratum vnius partium rationem habere debet, vt r ad s, propterea fieri debet rectangulum illud, quod erit $ba - a^2$, & quadratum vnius partium eſt a^2; alterutra enim partium ſumi poteſt; proinde erit vt r ad s, ita $ba - a^2$ ad a^2.

Cùm autem ſint quatuor termini proportionales, factum verò ſub medijs ęquale ſit facto ſub extremis; erit quęſita æquatio inter ra^2, & $sba - sa^2$; & ita quæſtionem examinando; atque iuxta eius tenorem datas, & quæſitas magnitudines tractando ad ęqualitatem denique peruenitur.

Tertiò proponatur.

Zeteticū III.

Dato extremo ex tribus lateribus continuè proportionalibus, & aggregato ex ſecundo, & tertio diſtinguere ſingula.

Datum ſit extremum latus d; ſumma verò reliquorum ſit b; ſecundum latus eſto a; erit ob id tertium $b - a$, vt patet. Conſtat autem rectangulum ſub extremis æquari quadrato medij; proinde a^2 æquabitur $bd - da$, & hęc eſt æquatio de qua quęrebatur. Cęterum vt etiam in prima huius Operis parte monuimus, potius expedita methodus exercitatione, & vſu comparatur ad æquationem inquirendam, quàm pręceptis, atque verborum ambagibus. Vt autem hæc Ars ad plana problemata reſoluenda plurimum habeat momenti; obſeruandum, eſt atque magnopere curandum, vt perueniatur ad ęquationem ſine aſcenſu planorum ad ſolida, vel ad plano-plana. Dum enim hoc modo inſtituitur analyſis, huius repetitis veſtigijs in ſyntheſi ad ipſam contexendam demonſtrationem Analyſta ad ſolida offendit; cum tamen longè feliciùs, & elegantiùs ſit per plana demonſtrationem elaborare. Non inficiandum tamen eſt, quamuis Analyſis ad ſolida peruenerit demonſtrationem contexi poſſe non repetitis Analyſeos veſtigijs, ſolidis nullis adhibitis; itaut Analyſeos beneficio, quod pręſertim in hac Arte intenditur Geometrica tantùm effectio comparetur; quamobrem dum proponebatur.

Datum latus diuidere, ita vt rectangulum ſub partibus ad quadratum vnius partium datam habeat rationem.

Præſtabit analyſin hunc in modum ad quæſitam radicem comparandam, inſtituere,

tuere. Datum sit latus b quod ea lege diuidendum est, vt rectangulum sub partibus ad quadratum alterius, rationem habeat, vt r ad s. Datum latus supponatur diuisum, & pars ad cuius quadratum datam rationem habet rectangulnm sub partibus esto a; ergo pars altera erit b — a. Quoniam verò est, vt r ad s, ita rectangulum sub partibus ad alterius partis quadratum, ob id erit, vt r ad s ita b a, — a^2 ad a^2, & componendo erit vt r ✠ s ad s ita b a ad a^2; sed b a ad a^2 est, vt b ad a, cum eiusdem sint altitudinis a; ergo, vt r ✠ s ad s ita b ad a.

Quartò proponatur.

Dato aggregato laterum, & differentia eorundem inuenire latera. *Zeteticū IV.*

Datum sit laterum aggregatum b, data verò differentia laterum sit h, oporteat reperire latera. Supponamus latus vnum esse a, aliud erit a † h, quamobrem 2 a † h, æquabitur b; & per antithesin erit 2 a = b — h, atque adeo a æquabitur $\frac{b-h}{2}$ de hoc tamen infra.

Quintò proponatur.

Data differentia duorum laterum, & ratione eorundem inuenire latera. *Zeteticum V.*

Data differentia sit b, ratio verò data sit vt r ad s minoris ad maius; Latus vnum esto a aliud erit a ✠ b; vt verò est r ad s, ita debet esse a ad a ✠ b, quamobrem erit factum sub extremis, nimirum r a ✠ r b æquale facto sub medijs puta s a.

Sextò proponatur.

Dato quadrato rectangulum æquale reperire, cuius latera sint in ratione data. *Zeteticū VI.*

Datum sit quadratum b^2; huic autem sit iniunctum æquale rectangulum reperire habens latera in ratione vt r ad s. Latus vnum ipsius rectanguli esto a: ergo latus alterum erit $\frac{sa}{r}$ hoc enim pacto rectanguli latera propositam rationem seruabunt, est enim, vt r ad s, ita a ad $\frac{sa}{r}$. Cùm itaque rectangulum æquale supponatur b^2; proinde $\frac{sa^2}{r}$ æquabitur b^2, & ita ad æquationem peruentum erit.

Potest etiam huic Problemati analogismo tantummodo satisfieri; quandoquidem si supponamus latus vnum rectanguli esse a, in omni autem rectangulo, quemadmodum est latus vnum ad latus alterum, ita quadratum illius, ad rectangulum sub lateribus, vt si sit rectangulum, cuius latera 24, & 6, vt est 24 ad 6, ita 576, quadratum ex 24 ad 144, rectanguli superficiem; ob id, vt r ad s, ita a^2, ad quæsitum rectangulum, quod est b^2, hoc enim, rectangulo debet esse æquale, quare erit, vt r ad s ita a^2 ad b^2, & conuertendo, vt s ad r ita b^2 ad a^2. Itaque ex tribus cognitis quantitatibus, quarta non ignorabitur. *Eidem Problemati fit satis analogismum.*

Septimò proponatur.

Latus datum ita secare, vt partium quadrata simul accepta ad quadratum differentiæ partium constitutam habeant rationem. Oportet autem rationem propositam maioris est ad minus. *Zeteticū VII.*

Datum latus diuidendum esto 2 b, & quidem in duas partes, quarum quadrata simul accepta ad quadratum differentiæ partium rationem habeat, vt r ad s, maioris scilicet ad minus. Supponatur latus iam diuisum, atque dimidium differentiæ partium esto a; ergo b ✠ a pars maior erit; quemadmodum b — a pars erit minor. Quoniam autem istarum partium quadrata ad quadratum differentiæ partium rationem habet, vt r ad s, atque horum quadratorum summa est 2 b^2 ✠ 2 a^2; quadratum autem differentiæ partium est 4 a^2; erit igitur analogismus, vt r ad s ita 2 b^2 ✠ 2 a^2 ad 4 a^2; vnde constat huic Problemati satisfieri per solam analogiam.

De

De Antithesi, seu transpositione æquationis.

CAPVT XI.

Antithesis quid significet quid apud Rhetores; quid apud Mathematicos.

GRecis ἀντίθεσις, antithesis, oppositionem significat, vnde autem sit hoc modo dicta, iam in prima parte explicatum fuit, vbi etiam quo sensu hoc in loco vsurpetur insinuatum est; non enim hic accipitur, vt apud Rhetores quibus idem est, ac assumptiua causa, vnde κατ' ἀντίθεσιν defendi id dicitur, quod per se improbabile assumptis extrinsecus auxilijs, defenditur; Analystę verò oppositionem & contrapositionem sonat; contingit autem, vt commemorato loco explicuimus, cùm afficientes, affectæue magnitudines ex vna æquationis parte in alterā partem transeunt sub contraria affectionis nota; quamobrem rectè antithesis dicetur quantatis ex vna æquationis parte in alteram partem sub contraria affectionis nota, transpositio. Itaque si aliqua magnitudo afficitur nota ✠ per antithesin affecta euadat nota —, & contrà. Per antithesin debemus omnino certam magnitudinem ex vna ęquationis parte constituere, cui reliqua comparentur; vel etiam ita fit, vt magnitudines omnes affectę, aut nota abundantiæ, aut nota defectus vnam æquationis partem constituant; ita vt partem reliquam occupet cyphra o, seu numeralis circulus, vt in sequentibus planum fiet. Quo autem pacto perficiatur ex ijs, quæ in prima parte tradita suut citra laborem addisces.

Exemplum I. Sit ęquatiora ✠ r b ⩵ s a — s b, vtrinque addi debet s b, hoc enim afficicitur nota —, ac huius restauratione (hoc nomen prout attinet ad signum — consueuit appellari) debet huius operationis initium sumi, & fiet r a ✠ r b ✠ s b ⩵ s a; modò auferri debet r a, vt fiat æquatio r b ✠ s b ⩵ s a ✠ r a; seu r ✠ s(b ⩵ s — r)a.

Exemplū II. Si sit æquatio b^2 — b a ⩵ 2 a^2 — b a reuocabitur per antithesin ad hanc b^2 ⩵ 2 a^2; vtrinque subtrahendo — b a.

Exemplū III. Si verò sit b^2 — a^2 ⩵ 4 a^2, vtrinque addito a^2, per antithesin fiet b^2 ⩵ 5 a^2.

Exemplū IV. Si autem sit æquatio a^2 — d pl. ⩵ g^2 — b a; primò reducetur ad hanc a^2 ✠ b a — d pl. ⩵ g^2, & rursus a^2 ✠ b a ⩵ g^2 ✠ d pl. vbi vides certas omnino magnitudines ex vna æquationis parte constitui.

Exemplū V. Si sit 2 b a ⩵ d a ✠ b^2 — 2 b g per antithesin ad hanc reducetur 2 b a — d a ⩵ b^2 — 2 b g; vbi obseruandum hanc operationem fieri, ad hoc, vt cognita ab incognitis separentur; ob id, & si 2 b g afficiatur nota — restaurari non debet.

Illud autem non est ignorandum, non debere subtractionem fieri nisi minoris à maiori, vt constat.

Exemplū VI. Sit ęquatio r b ✠ r a ⩵ s b — s a addatur vtrinque s a fiet ęquatio r b ✠ r a ✠ s a ⩵ s b, quod si vtrinque auferatur r b fiet r a ✠ s a ⩵ s b — r b seu quod idem est r ✠ s(a ⩵ s — r)b.

Exēplū VIII. Proposita sit ęquatio r a ✠ r b ⩵ s a — s b; addatur vtrinque s b, fiet ęquatio r a ✠ r b ✠ s b ⩵ s a, vtrinque ablato r a fiet r b ✠ s b ⩵ s a — r a, seu r ✠ s (b ⩵ s — r) a, vbi supponimus r minorem esse quàm s.

Exēplū IX. Ita pariter si proponatur a — 5 ⩵ 15, vtrinque addatur — 5, fiet a ⩵ 20; Si verò sit a — 10 ⩵ o, vtrinque verò addatur — 10, fiet a ⩵ 10; & si fuerit a † 100 ⩵ 3 a — 60 vtrinque additis 60 fiet a ✠ 160 ⩵ 3 a, vtrinque sublato a, fiet 2 a ⩵ 160.

Et

Et ſi fuerit $a^3 + b\,a = 360 + 10\,a^2$ per antitheſin fiet $a^3 - 10\,a^2 + 6\,a = 360$. *Exemplum.*

Ex hactenus dictis conſtat apertè quantitates affectas ſigno — vtrique parti addi ſi ab vtraque parte eximantur, & ſub ſigno + transferantur. Liquet etiam quantitates ſigno + affectas ſubtrahi vtrinque ipſas eximendo ex vna parte in alteram transferendo ſub ſigno —; quo fit, vt quidquid vel ſubtractione, vel additione transfertur contrario ſigno afficiatur.

Quamuis hæc operatio rectè quidem fiat per additionis, & ſubtractionis regulas nihilo tamen minus artificium iſtud duobus hiſce præceptis continetur, quod & in prima parte traditum eſt.

Primum. *Quicquid tranſponitur mutat ſignum*. Seu quod idem eſt; *omnis tranſmutatio fit mutato ſigno*. *Præceptum ad antitheſin perficiendam.*

Huius autem præcepti ſenſus eſt, quod particula æquationis negata tranſpoſita in alteram partem fit affirmata, vt contra particula affirmata fit negata.

Secundum. *Homogenea ſigna negant. Heterogenea affirmant.* *Secundum præceptum.*

Huius autem ſenſus eſt; Si particula tranſponenda in altera parte ſimilem denominationem habuerit, fit ſubtractio minoris à maiori. Si particula aliqua ipſius æquationis tranſponenda habens ſignum quodcumque ex illis duobus + vel — habuerit in altera parte æquationis magnitudinem maiorem eiuſdem denominationis, cum eodem ſigno ſubtrahenda eſt magnitudo illius particulę à magnitudine, & idem relinquendum ſignum, quod habet illa magnitudo, à qua fieri debet ſubtractio, atque adeo tranſpoſitio, incogiendo eſt à magnitudine minori.

Si verò particula tranſponenda habuerit in altera parte magnitudinem denominationis eiuſdem cum oppoſito ſigno, addendaque eſt magnitudo illius particulæ huic magnitudini, & relinquendum idem ſignum, quod habet magnitudo, cui fit additio.

De Hipopibaſmo.

CAPVT XII.

DE nomine hypobibaſmi abundè in prima parte ſcripſimus, deducitur à Græco verbo ὑποβιβάζω, quod opponitur τῷ ἀναβιβάζω; itaque cùm hoc inter cetera ſignificet aſcendere facio, illud proinde ſignificabit deſcendere facio; ſignificat quoque idem, quod ſubduco, imò eſt etiam minuo. Fit igitur nomen iſtud hypobibaſmus ad ſignificandam quandam minutionem poteſtatis, & parodicorum graduum, quam quidem, etiam minutionem, depreſſionem appellant. Quoniam igitur ſępe ſæpius contingit, datas omnes magnitudines in gradum duci, atque adeo non dari purum comparationis homogeneum, ita vt homogeneum ſub data omnino menſura non ſtatim offeratur, tunc fieri debet hypobibaſmus, qui vt dicebamus nil aliud eſt, quàm depreſſio, ſiue mauis minutio poteſtatis, & parodicorum graduum; licet huiuſmodi depreſſio, minutio, ſiue etiam ſubductio æqua eſſe debeat, vt mox dicemus obſeruato ordine ſcalæ donec homogeneum ſub depreſſiori gradu in datum omnino homogeneum cadat, cui reliqua comparantur. *Hypobimaſmi nomen quid ſignificet.*

Fit autem hoc artificio, nimirum ſubducendo gradum depreſſiorem parodicum, tum à poteſtate, cùm ab alijs parodicis gradibus, quo opere haud immutatur æqualitas.

Eſto æquatio $a^3 + b\,a^2 = z$ pl. a, ſi fiat hypobibaſmus æquatio ad hanc reuocabitur $a^2 + b\,a = z$ pl. illud enim eſt omnia ſolida diuiſiſſe per diuiſorem communem, ſeu quod idem eſt omnia ſolida ad communem applicaſſe magnitudinem. *Quo artificio fiat.*

Sit prętereà ęquatio $r\,a^2 = s\,b\,a - s\,a^2$ fiat hypobibaſmus, & ita prędicta ęquatio ad hanc reuocabitur $r\,a = s\,b - s\,a$; omibus nimirum applicatis ad a, vt ſit aliqua magnitudo omnino data, cui comparentur incertæ, ſiue incognitę, nam per antitheſin fiet $r\,a$ *Exempla ad hypobibaſmi declarationē.*

$+ s\,a$

Cui etiam principio hæc innitatur operatio.

$+ s a$, quod æquabitur $s b$; est autem hoc quidem notum, vtpote rectangulum factum à duabus magnitudinibus r, & s, quas notas supponimus, vt a incognitam intelligimus. Hęc verò operatio illi innititur principio, nimirum à communi diuisore non immutatur æqualitas.

De Parabolismo, hoc est Applicatione; siue Diuisione.

CAPVT XIII.

Parabolismus vnde dicatur.

PArabolismus dicitur à παραβάλλω verbo, quod inter cętera significat applicare, cum autem quidpiam per aliud diuiditur, fit quędam applicatio, nimirum diuidendæ quantitatis, ad diuidentem, vnde fit ortiua quantitas, ob id ipsa diuisio non incongruè applicatio dicta, parabolismus consueuit appellari.

Hic de Parabolismo instituitur tractatio.

Hoc itaque loco de Parabolismo, hoc est applicatione, seu diuisione differendum est; quæ prout hìc accipitur, homogeneorum, quibus constat æquatio ad datam magnitudinem, quę in altiorem gradum ducitur communis est applicatio, vt ille Potestatis gradus nomen sibi vendicet, & ex ea tandem æquatio ritè ordinetur, quo opere fit, vt ex se Potestas ipsa subsistat.

Quando parabolismus fieri debeat.

Tunc enim fieri debet ipse Parabolismus, quando accidit altiorem gradum, ad quem ascendit quęsita magnitudo, non ex se subsistere, sed in aliquam magnitudinem duci, quo opere non immutatur ęqualitas.

Exemplum ad parabolismo explicationem.

Sit ęquatio $b a^2 + d\,pl.\,a = z\,sol.$ vel $b a^2 + d^2 a = z^3$ fiat parabolismus, & æquatio ad hanc reuocabitur $a^2 + \frac{d\,pl.}{b} a = \frac{z\,sol.}{b}$ seu $a^2 + \frac{d^2}{b} a = \frac{z^3}{b}$. Omnia enim solida applicantur ad b, quo opere non immutari ęqualitatem perspicuum est; Illud enim est omnia ad communem quantitatem applicasse, atque adeo, ęqualitatem retinuisse.

Exemplum alterum ad i. d. m.

Insuper esto ęquatio $d a^2 - d g a - b g a = b z^2$; omnibus applicatis ad d (ad magnitudinem enim d, omnia sunt applicanda) & fit ęquatio $a^2 - g a - \frac{b g}{d} a, = \frac{b z^2}{d}$ & ita consimili modo procedendum est in alijs æquationibus quibuscunque.

Exemplum.

Sit æquatio $d a^2 + b d a = d z^2$ omnibus applicatis ad d, fiet æquatio $a^2 + b a = z^2$. Quo opere a^2 liberatur à comite d atque adeo ipsa æquatio ritè ordinatur, cùm id ad eiusdem explicationem requiratur.

Principium cui innititur parabolismus

Innititur autem hęc operatio communi principio; Æqualia si per eundem diuisorem diuidantur, æqualitas non immutatur.

Notanda quadam.

Vbi vides operationem hanc instituendam esse applicatione omnium ad eam quantitatem in quam potestas ducta erat, ideo enim ad hanc applicatio fieri debet propterea quod eò hæc operatio tendit, vt potestatem reddat per se subsistentem cum potestas, à comite soluta sit per parabolismum; cætera quoque ad candem sunt quantitatem applicanda, tunc enim disertè erit æqualitas expressa, ac ordinata, reuocanda si placet ad analogismum, ea lege, vt quæ sub extremis fiunt, tum potestati, tum affectionum homogeneis respondeant; sub medijs autem homogeneo sub data mensura; Analogismus autem ordinatus series est, trium, quatuorue magnitudinum, sic affecta in terminis, siue puris, siuè affectis, vt omnes sint datæ si vnum excipias, de quo, quęritur eiusue potestatem, & parodicos ad eam gradus, ita homogeneum comparationis tanquam productum sub medijs, habeatur, sub extremis verò factum, tum potestati, tum affectionum homogeneis, respondeat. Sic enim ignota quantitas comparabitur, & eam, de qua solliciti sumus, assequemur.

Analogismus ordinatus quid.

De

De transmutanda æquatione in proportionem, & contrà.

CAPVT XIV.

HOc præcipuum est Algebræ munus, nimirum æquationem ad analogismum reuocare, seu æqualitatem in proportionem transmutare. Obseruandum itaque factum sub extremis æquale esse quadrato medij, & contrà, quando nimirum tria fuerint latera proportionalia. Vel factum sub extremis æquari facto sub medijs, quando fuerint quatuor proportionalia latera. Hæc autem facilè nos assequemur. *Præcipuum Algebræ munus est æquationem ad analogismum, & analogismum in proportionē transmutare.*

Quamobrem si proponatur $ra + sa = sb$ ad hanc analogiam reuocabitur, vt $r + s$ ad s, ita b ad a, si verò fuerit æqualitas $ra + sa = sb + rb$, seu quod idem est $r + s]\, a = s - r]\, b$ supponendo quidem r terminum esse minorem, quàm s, ad hanc reuocabitur proportionem, vt $r + s$ ad $s - r$, ita b ad a. *I. Exemplis explicatur tradita doctrina*

Si fuerit æquatio $ba = a^2$ ad hanc reuocabitur proportionem, scilicet, vt b ad z ita z ad a; est enim factum sub b, & a, æquale quadrato ex z. *Exemplum II.*

Si sit æquatio huiusmodi $2ba - da = 2bd + 2gd$ ad hunc reuocabitur analogismum, vt $2b - d$ ad $2b + 2g$ ita d ad a. *Exēplum III.*

Si verò sit $2ba - da = 2bg + b^2$ fiat, vt $2b - d$ ad $2g + b$ ita b ad a. *Exēplum IV.*

Aduertendum autem præcipuè cum plana fuerint proportionalia etiam latera esse huiusmodi, vt si sint $g^2 - d^2$; $4b^2 + g^2 - d^2$ d^2; a^2, & etiam latera proportionalia esse, vt $\sqrt{}\, g^2 - d^2$; $4b^2 + g^2 - d^2$; $d^2\, a^2$ $Q(g^2 - d^2)\ \sqrt{}\, Q(4b^2 + g^2 - d^2)$; d; a, & $\sqrt{}(g^2 - d^2)\ \sqrt{}(4b^2 + g^2 - d^2)$; d; a hoc perpetuò obseruari debet, & contrà poterit etiam æqualitas in proportionem trasmutari, vt cuicunque perspicuum esse potest. *Aduertenda quædam.*

Si fuerit æquatio $2b^2 - 2bd = d^2$ ad hanc reuocabitur analogiam $2b - d$ d; $2b$ extrema enim hæc inuicem multiplicata producunt quadratum ex d. *Exēplum V.*

Si fuerit $rb + sb = sa - ra$ ad hunc reducetur analogismum, vt $s - r$, ad $r + s$ ita b ad a. *Exēplum VI.*

Insuper si sit $2ba - da = bd + 2dg$ ad hunc redigetur analogismum, vt $2b - d$ ad $b + 2g$ ita d ad a. *Exēplū VII.*

At si fuerit $2bg - b^2 = da - 2ba$, fiet analogismus, vt $d - 2b$ ad $2g - b$, ita b ad a. *Exēplū VIII.*

Et si fuerit $2ba - da = b^2 - 2bg$ fiet analogismus, vt $2b - d$ ad $b - 2g$ ita b ad a. *Exēplum IX.*

At hunc in modum cætera perficienda sunt.

Illud porrò silentio non præteribo, nempe, sæpe sæpius vsu venire, vt in illis terminis proportionalibus ratiocinandum couuertendo componendo, diuidendo, &c. idque vel continuit postquam æquatio ad proportionem fuerit reuocata, vel nulla æqualitate præeunte, quod frequentiùs euenit, vt non præeunte aliqua æqualitate, erit, vt r ad s, ita $a - b$ ad $a + b$, conuertendo igitur erit, vt s ad r ita $a + b$ ad $a - b$, & diuidendo, vt $s - r$ ad r ita $2b$ ad $a - b$ *Notāda quædam.*

Ita si fuerit, vt b ad a ita a ad $d - a$ fiet conuertendo, vt a ad b ita $b - a$ ad a, & componendo, vt $a + b$ ad b ita b ad a; insuper si fuerit, vt r ad s ita $b + a$ ad a, diuidendo fiet, vt $r - s$ ad s ita b ad a. *Exēplum X.*

Exemplū I. At si foret, vt r ad s ita b — a ad b ✠ a componendo fieret, vt r ✠ s ad s, ita 2 b ad b ✠ a.

Exemplū II. Sic etiam si foret, vt r ad s, ita b a — a^2 ad a^2 componendo fieret, vt r ✠ s ad s ita b a ad a^2.

Exemplū III. Si fuerit, vt 2 b ad d ita 2 a ad 2 a ✠ 2 g — b per conuersionem rationis fiet, vt 2 b ad 2 b — d ita 2 a ad b — 2 g, & si fuerit, vt 2 b — d ad b ita b — 2 g ad a, fiet permutando, vt 2 b — d ad b — 2 g ita b ad a.

Exemplū IV. Et si fuerit, vt b — c ad c ita 2 d ad a — d deinde, vt c ad c ✠ b ita a — d ad 2 a erit ex ęqualitate, vt b — c ad c ✠ b ita 2 d ad 2 a seu d ad a.

Quandoque contingit duplanda esse antecedentia. Plerumque contingit, vt opus sit duplare antecedentia, vel consequentia rationum; vt si fuerit analogismus huiusmodi, nempe, vt b ad d ita a ad 2 a ✠ 2 g — b, etiam duplatis antecedentibus proportionales erunt magnitudines, nempe, vt 2 b ad d, ita 2 a ad 2 a ✠ 2 g — b.

Quandoque subduplanda. Vt autem licet hoc modo arguere, licebit etiam subduplatis antecedentibus.

Quandoque consequentia. Quod autem de antecedentibus diximus de consequentibus quoque intelligendum volumus, vt si fuerit quemadmodum d ad b, it 2 a ✠ 2 g — b ad a duplatis consequentibus etiam proportionalia erunt hunc in modum, nempe, vt d ad 2 b ita 2 a ✠ 2 g — b ad 2 a.

Quandoque duplanda sunt omnia. Quandoque verò duplanda sunt omnia, quod contingit quando in æquatione fuerit fractio $\frac{1}{2}$, & sic suo modo de alijs fractionibus;

Plerunque resolutio incipit ab analogismo. Quandoque resolutio incipit per analogismum, nec vlla est opus ęquatione nempe si fuerit, vt b ad d ita a ad 2 a — 2 g — b duplatis antecedentibus fit, vt 2 b ad d ita 2 a ad 2 a — 2 g — b, & per conuersionem rationis, vt 2 b ad 2 b — d ita 2 a ad 2 g ✠ b, & subduplatis antecedentibus, vt b ad 2 b — d ita a ad 2 g ✠ b, & conuertendo, vt 2 b — d ad b ita 2 g ✠ b ad a, & permutando, vt 2 b — d ad 2 g ✠ b ita b ad a, vbi ex tribus cognitis quantitatibus ea, de qua quærebatur, innotescit.

Quandoque ex analogismo fit gradus ad æqualitatem. Aliquando verò ex analogismo gradum facimus ad ęquationem qua comperta ad alium analogismum progredimur, vt ex duabus, vel tribus magnitudinibus cognitis ea, quę latebat manifesta reddatur; itaque erit, vt r ad s ita a — b ad a ✠ b; hoc autem analogismo ad æqualitatem traducto fit æquatio r a ✠ r b ⊐ s a — s b, & bis antithesi repetita fit ęquatio r b ✠ s b ⊐ s a — r a, quæ rursus ad analogiam reuocatur, fitque, vt s — r ad r ✠ s ita b ad a.

Plerumque sistendum in ipsa æquatione. Plerunque sistimus in ipsa æquatione, qua explicata secundùm Artis præcepta, reperta scilicet eius radice, hoc est potestatis affectę, & quidem huiusmodi; prout potestatis natura requirit.

Sæpe contingit, vt fractio integræ magnitudini æquetur. Quoniam verò fractionem æquari integræ magnitudini non raró contingit; ob id reliquum est, vt hac de re sermonem instituamus; non omnis tamen fractio in sua membra resolubilis est, nisi nimirum illa, cuius numerator resolubilis est in duas magnitudines, quæ suo ductu numeratorem ipsum efficiant. Huiusmodi autem resolutione mutatur æqualitas in proportionem.

Resolutio qua arte sit instituenda. Resolutio ipsa hac Arte perficitur.

Qua ratione sit instituenda resolutio. Denominator fractionis resoluendæ, & integra magnitudo, cui fractio ipsa æquatur, sunto extremi termini quatuor magnitudinum proportionalium, magnitudines verò, quæ suo ductu numeratorem efficiunt sunto medij termini in eadem serie, & contrà; hoc enim pacto absolutum erit, quod oportet.

Obseruanda conditio in huiusmodi fragmentis. Hac tamen in re hęc obseruanda conditio, vt videlicet primus terminus, & secundus sint quantitates homogeneæ, siue eiusdem generis, quemadmodum etiam tertia, & quarta eiusdem debent esse naturæ, quandoquidem heterogeneę comparari inuicem non possunt. Ratio enim duarum est magnitudinum eiusdem generis mutua quędam secundum quantitatem habitudo; tres verò termini quandoque sufficere quidem possent; nihilominus si vnus bis accipiatur duorum munere fungitur; propterea quatuor constituendos esse terminos haud iniuria dicebatur.

Primò sit ęquatio $\frac{bc}{d}$ ⊐ a. Oporteat fractionem hanc in sua membra resoluere, vt

re, vt æqualitas in proportionem transmutetur. Resolubilis est enim numerator in duas magnitudines, quæ efficiunt illum.

Sunto termini extremi d, & a; medius autem b; seu duo medij b bis repetitus, & fiet analogismus, vt d ad b ita b ad a.

Quoniam enim est, vt d ad b ita b ad $\frac{b^2}{d}$, vt patet; factum enim sub extremis æquale est facto sub medijs; ergo erunt termini proportionales; sed $\frac{b^2}{d}$ æquatur ipsi a; ergo erunt proportionales, vt supra.

Secundò esto æquatio $\frac{b^3}{a} = d^2$. Numerator resolubilis est in duas quatitates, vt supra requirebatur; fiant extremi termini a, & d^2; medij vero b, & b^2, vt sit analogismus. *Exemplũ II.*

Vt a ad b, ita b^2 ad d^2; & ob eandem rationem termini sunt proportionales, & conuertendo, vt d^2 ad b^2 ita b ad a.

Tertio sit $\frac{bd}{a} = g$. Sunto extremi termini a, & g medij verò b, & d, vt fiat analogismus, vt a ad b, ita d ad g, & conuertendo, vt g ad d ita b ad a. *Exemplũ III.*

Quoniam est, vt a ad b, ita d ad $\frac{bd}{a}$, & hæc fractio æquatur ipsi g ergo, vt a ad b, ita d ad g. Possunt etiam fieri extremi termini b, d, &c.

Quartò sit æquatio $\frac{bd}{a+g} = f$ sunt extremi termini a $+$ g, & f, medij verò b, & d vel contra fiet analogismus. *Exemplũ IV.*

Vt a $+$ g ad b, ita d ad f, & conuertendo, &c.

Quinto proponatur æquatio $\frac{bdg}{a} = f^2$ fiant extremi termini a, & f^2 medij autem b, & d g vel g, & b d, vel d, & b g; ostendemus autem eodem pacto quo supra, terminos illos esse proportionales. *Exemplũ V.*

Sextò proponatur $\frac{bd+gd}{a} = f$ extremi termini fiant a, & f medij b $+$ g, & d vel contra, &c. vt fiat analogismus. *Exemplũ VI.*

Vt a ad b $+$ g, ita d ad f, vel contra, &c.

Septimò si proponatur æquatio $\frac{b^2-d^2}{g} = a$ sunto extremi termini g, & a medij verò b $+$ d, & b $-$ d vel contra, vt fiat analogismus ob rationem similem præcedentibus. *Exemplũ VII*

Vt g ad b $+$ d, ita b $-$ d ad a.

Octauò proponatur $\frac{b^2+2bd+d^2}{a} = f$ fiant extremi termini a, & f medius verò b $+$ d nam ex ductu b $+$ d in se fit ille numerator; fiet analogismus. *Exẽplũ VIII.*

Vt a ad b $+$ d ita b $+$ d ad f, vel contra, &c.

Nonò sit æquatio $\frac{b^2+bd+bg+dg}{a} = f$ fiant extremi termini a, & f, medij verò b $+$ d, & b $+$ g, &c. *Exemplũ IX.*

Sit $\frac{b^2d^2}{g^2} = a^2$ fiant extremi termini g^2, & a^2 medius verò b d, & erit, vt g^2 ad b d ita b d ad a^2. Vel sint extremi termini g^2, & a^2 medij verò b^2, & d^2. *Exemplũ X.*

Hoc eodem modo procedendum in reliquis fractionibus, cum ęquantur integris magnitudinibus, numeratoresque sunt resolubiles, vt suprà iam sępe dictum fuit.

Quando autem numerator fractionis non est resolubilis ad eum modum, vt diximus, fractio nequit in sua membra resolui, inde tamen non fit, quin ęqualitas ipsa ad proportionem reduci possit, vt superiùs innuimus. Fitque hac Arte; fractionis denominator, & integra magnitudo, cui comparatur fractio, extremi sint termini ex tribus proportionalibus; r ad s at verò ligata, quam parenthesi significamus, esto terminus medius, vt sit æquatio $\frac{bd+fg}{h} = a$; sunto extremi termini h, & a, medius verò sit numerator, vnde fiat analogismus h; ℞ (b d $+$ f g); a; Quoniam enim est, vt h ad ℞ (b d $+$ f g) ita ℞ (b d $+$ f g) ad $\frac{bd+fg}{h}$; hæc autem est fractio æqualis ipsi a; erunt proportionales ob id termini, vt suprà; & ita de alijs æquationibus intellige, &c. Vt si foret $\frac{sb \sim rd}{s \sim r} = a$; fiet analogismus s $\sim$ r; ℞ (s b $\sim$ r d); a. *Quando numerator fractionis nõ est resolubilis quid agendum. Exemplum.*

Obseruetur autem perpetuò homogeneorum natura; si enim fuerit $\frac{cd^2}{b}$ sic instituenda est analogia, vt b, & c sint antecedentes, vnde fiat, vt b ad c ita d^2 ad aliud planum; illudque sit f^2, & sic de ceteris. *Obseruanda.*

Quandoque euenit, vt per analogismum vltimo loco habeatur ignota quantitas non seorsim, sed vel affecta per negationem notæ quantitatis, vel per affirmatio- *Quando per analogismum vltimo loco habetur ignota quantitas*

nem per negationem, ſi fuerit, vt b — c ad c ita 2 d ad a — d vbi quarto loco extat a — d. Hoc autem nihil eſt, nam certum eſt ex tribus cognitis quantitatibus b — c; c, & 2 d; quartam quãdam innoteſcere, hęc autem non eſt æqualis a ſed a minus d. Si igitur adinuentę quantitati addatur nota illa quantitas d conſurget quantitas quæſita æqualis a.

Per affirmationem. Ita per affirmationem, ſi fuerit, vt r + s ad s, ita 2 b ad b + a in quarto loco eſtat quantitas ignota, ſed non ſeorſim, verùm, vt ea innoteſcat, ſatis ſuperque eſt ex tribus illis terminis notis r + s; s; 2 b, colligere quartam quantitatem, nam hæc erit ęqualis non quidem a, ſed b + a, quare ſi ex inuenta per analogiſmum quantitate auferatur nota quantitas b, quę relinquitur nota, fiet ęqualis a.

Animaduertenda quadã. Illud porrò animaduertiſſe oportet, per alium analogiſmum fieri poſſe notam ſeorſum quantitatem, quęſitam, qua de re paulo infra ſermo redibit.

Equationem per modum. Æquationes igitur prædictis modis ad proportiones ſibi reſpondentes, reuocantur. Vnde

Æridegiſmi ad proportionem reuocantur, & contra. Si fuerit b a = c d, erit per congruam ἀνάλυσιν atq; reſolutiuo ordine procedendo vt b ad c ita d ad a. Vel etiam permutando erit, vt b ad d ita c ad a: Vel contra ex proportione colligitur æquatio per αἰθυποχώρησιν.

Exemplum II Et ſi fuerit b a ∽ c a = d f facto paraboliſmo, proueniet $\frac{df}{b \backsim c}$ = a fiet autem analogiſmus, vt b ∽ c ad d ita f ad a; vel etiam permutatim, vt b ∽ c ad f ita d ad a, vel contra ex proportione, &c.

Exemplũ III. Nec diſſimiliter ſi fuerit b a = c d ∽ d f facto paraboliſmo, per b, erit $\frac{cd \backsim df}{b}$ = a. Atque adeo fiet, vt b ad c ∽ f ita d ad a vel permutatim, vt b ad d ita c ∽ f ad a. Vel contra ex proportione, &c.

Exemplũ IV. Si fuerit b a ∽ c a = d f ∽ e f facto paraboliſmo nempe omnibus applicatis ad b ∽ c fiet $\frac{df \backsim ef}{b \backsim c}$ = a fit autem analogiſmus, vt b ∽ c ad d ∽ e ita f ad a, vel permutatim, vt b ∽ c ad f ita d ∽ e ad a. Vel contra ex proportione colligitur æquatio.

Exemplum V Si fuerit b a = $c^2 - d^2$ per paraboliſmum fit $\frac{c^2 - d^2}{b}$ = a. vnde analogiſmus, vt b ad c + d ita c — d ad a vel permutatim, vt b ad c — d ita c + d ad a. Vel contra ex proportione colligitur ęqualitas.

Exemplũ VI. Si fuerit b a = c^2 + c a per antitheſin fiet b a — c a = c^2 facto paraboliſmo, omnibus videlicet applicatis ad b — c fiet $\frac{c^2}{b-c}$ = a. Vnde fit analogiſmus, vt b ad c ita c + a ad a, & diuidendo, vt b — c ad c ita c ad a. Vel contra ex proportione fit gradus ad æqualitatem.

Exemplũ VII. Si fuerit b a = c^2 — c a per antitheſin fiet b a + c a = c^2 inſtituto paraboliſmo, nempe omnibus applicatis ad b + c fiet $\frac{c^2}{b+c}$ = a.

Vnde analogiſmus, vt b ad c ita c — a ad a, & componendo, vt b + c ad c ita c ad a.

ExemplũVIII Si fuerit b a — b d = c a per antitheſin et b a = c a + b d, & rurſus b a — c a = b d inſtituto paraboliſmo, omnibus ſcilicet applicatis ad b — c fit $\frac{bd}{b-c}$ = a.

Vnde analogiſmus, vt b ad c ita a ad a — d, & diuidendo, vt b — c ad c ita d ad a — d, & per compoſitionem rationis contrariè factam, vt b — c ad b, ita d ad a. Vel contra ex analogia fit proceſſus ad ęqualitatem, &c.

ExẽplũVIIII. Si fuerit b a — b d = c a + c d per antitheſin fiet b a = c a + c d + b d & rurſus b a — c a = c d + b d, & per paraboliſmum fit $\frac{cd + bd}{b-c}$ = a.

Quando quãtitas quæſita non prouenit ſeorſum ſed affecta per affirmationem vel negationem nata quantitatis. Vnde analogiſmus, vt b ad c ita a + d ad a — d, & diuidendo, vt b — c ad c ita 2 d ad a — d ex hoc analogiſmo colligitur, & de qua quæritur quantitas, & ſi non ſeoſim exhibita, hoc enim nihil refert, nam vt ſuperiùs quoque tetigimus, quarta per analogiſmum, quantitas, allata ſi augeatur nota quantitate; qua per negationem, ignota quantitas afficitur, ipſa quantitas ignota comparabitur.

Alia, & ſi longiori diſcurſu, via ſupereſt, per quam procedens analyſta, ſeorſim quantitatem ignotam conſequetur, quod etiam ſuperiùs adnotauimus; Si enim fuerit, vt b ad c ita a + d ad a — d, inuertendo quidem erit, vt c ad b ita a — d

ad

ad a † d, & componendo contrariè tamen, fiet vt c ad c † b ita a — d ad 2 a, erat autem, vt b — c ad c ita 2 d ad a — d, modo eſt vt c ad c † b ita a — d ad 2 a erit, vt b — c ad c † b ita 2 d ad 2 a, vel ita d ad a, quod ex æqualitate colligitur; vnde quantitas ignota, quæ ſupponebatur a, hoc analogiſmo deprehenditur ſeorſim ab omni alia ſeiunćta quantitate, vti perſpicuè conſtat.

Si fuerit b d † b a ═ c d — c a per antitheſin fiet b d ✠ b a † c a ═ c d, & rurſus b a ✠ c a ═ c d — b d, facto paraboliſmo fiet $\frac{cd - bd}{b + c}$ ═ a æqualitate ad proportionem reuocata, fiet, vt b ad c ita d — a ad d ✠ a, & componendo, vt b ✠ c ad c, ita 2 d ad d ✠ a. Deinde cum ſit, vt b ad c ita d — a ad d ✠ a, inuertendo erit, vt c ad b ita d ✠ a ad d — a, & per conuerſionem rationis, vt c ad c — b ita d ✠ a ad 2 a quare cum b ✠ c, † c, c — b ſint proportionales, quemadmodum 2 d, d ✠ a, 2 a, ſuntque bonæ acceptæ in eadem ratione proinde, ex æqualitate erit, vt b ✠ c ad c — b ita 2 d ad 2 a ſeu d ad a; Contra verò ex analogiſmo infertur æquatio. *Exemplū X.*

Si fuerit b a ✠ b d ═ c a — c d per antitheſin fiet b a ✠ b d ✠ c d ═ c a, & rurſus b d ✠ c d ═ c a — b a Inſtituto paraboliſmo, fiet æquatio $\frac{bd + cd}{c - b}$ ═ a erit proinde, vt c ad b ita a ✠ d ad a — d, & diuidendo, vt c — b ad b ita 2 d ad a — d. Rurſus cùm ſit, vt c ad b ita a ✠ d ad a — d, erit inuertendo, vt b ad c, ita a — d ad a ✠ d, & per contrariam compoſitionem rationis, vt b ad b ✠ c ita a — d ad 2 a. Cum itaque ſit, vt c — b ad b ita b ✠ c ad b, & inſuper, vt 2 d ad a — d, vt a — d ad 2 a; ſuntque fine acceptæ in eadem ratione, proinde ex æqualitate erit c — b ad b ✠ c ita 2 d ad 2 a ſiue d ad c. Contra verò ex analogiſmo infertnr æquatio. *Exemplū XI.*

Si fuerit b d — b a ═ c a ✠ c d per antitheſin fiet b d ═ c a ✠ b a † c d, & rurſus b d — c d ═ c a ✠ b a. Inſtituto paraboliſmo, fiet $\frac{bd - cd}{c + b}$ ═ a. Proinde, vt c ad b, ita d — a ad a ✠ d, & componendo, vt c — d c ✠ b ad b; ita 2 d ad a ✠ d. Rurſus cùm ſit, vt c ad b, ita d — a ad a ✠ d erit inuertendo, vt b ad c ita a ✠ d ad d — a, & per conuerſionem rationis, vt b ad b — c ita a ✠ d ad 2 a. Quarto cum ſitit proportionales c ✠ b b b —, & 2 d a ✠ d 2 a ſuntque finæ acceptæ in eadem ratione proinde ex æqualitate erit, vt c ✠ b ad b — c ita 2 d ad 2 a ſeu d ad a. Contra verò ex analogiſmo, infertur æqualitas, &c. *Exēplū XII.*

Si fuerit b a — b d ═ c d — c a per antitheſin fiet b a ═ c d ✠ b d — c a, & rurſus b a † c a ═ c d † b d. *Exēplū XIII.*
Inſtituto paraboliſmo omnibus nimirum applicatus ad b ✠ c prouenit a ═ d. Proinde erit, vt b ad c ita d — a ad a — d, quare fiet d æqualis a, neque enim maior, neque minot eſſe poteſt.

Si fuerit b d — b a ═ c a — c d per antithebn fiet b d ═ b a ✠ c a — c d & rurſus fiet b d ✠ c d ═ b a ✠ c a. Inſtituto paraboliſmo, omnibus ſcilicet applicatis ad b ✠ c fit d ═ a proinde erit, vt b ad c ita a — d ad d — a, atque hinc concluditur d æqualis a. *Exēplū XIIII.*

Hìc porrò non eſt cur amplius immoremur, ex hactenus enim dictis exiſtimo cuique perſpectum futurum qua arte vti oporteat ad huiusmodi μεταμορφωσιν perficiendam, eſt autem operę pretium ſe ſe ad hanc pragmatiam adijcere cùm inde maximè pendeat æquationum explicatio, & cuiuſcunque Theorematis, vel Problematis, analyſis, atque ſyntheſis; quamobrem non grauabitur Analyticæ Diſciplinæ ſtudioſus tradita, quæ ſunt hucuſque præcepta memorię committere, vt cùm opus fuerit, obuia ſit de quo quæritur reſolutio, & via pateat ad quamcunque reſolutionem, compoſitionemque inſtituendam. *Quanti fieri debeat in re analytica doctrina hactenus tradita.*

De æquationum natura atque conſtitutione dignoſcenda.

CAPVT XVII.

Multum conducit ad explicationem æquationum, earum habere perſpectam naturam.

NOn parum conducit ad æquationis explicationem ipſius naturam habere perſpectam; niſi enim quiſpiam introſpexerit eius principia, atque adeo naturam fuerit aſſecutus haud poterit artificioſè illam explicare; propterea hoc in loco nobis incumbit onus tradendi methodum, qua æquationes ipſæ recognoſci poſſint, & qua induſtria earundem primordia, atque conſtitutiones deprehendi queant.

Æquationes plerumque præparatione indigent ante quam explicari queant.

Quoniam autem non rarò hę præparatione indigent, antequam feliciter explicari poſſint, pręſertim cum de magnitudinibus homogenis poteſtates negatur, vel ita mixtim homogeneæ magnitudines de poteſtatibus ipſis negantur, & affirmantur, vt affectiones negatæ prępolleant affirmatis, poſtremò cùm affectiones fractis, vel aſymmetris numeris exhibentur; propterea ſupereſt hìc diſſerendum de æquationum origine, primaque conſtitutione, vt nimirum his cognitis ſternatur via, methoduſque paretur ad earum explicationem, ad quod vt dicebamus multum refert cognoſcere, vnde nam æquationes ſuum ortum ducant. Id porrò pluribus modis aſſequi licet, & primum ex Ζητησεῖ *Zeteſi*. Hāc autem indagandi conſtitutionem ęquationum Viam primus Vieta deſignauit, quæ cùm regia ſit, ommittenda non eſt, illam primò calcare, aliam, ſi quæ ſupererit non negligentes operę pretium duximus Ζήτησις *Zeteſis* inquiſitionem ſignificat, nomen enim græcum eſt, ſignificans apud illos idem, quod apud Latinos, inquiſitio quamobrem πρόβλημα Ζητητικὸν, *Problema Zeteticon*, idem ſignificat, ac Problema quæſitorium, ſiue inquiſitorium, vt enim Ζήτημα, nempe quęſtio, à verbo Ζητέω, quod Græcis ſignificat quęro, ita Ζήτησις vnde Ζητητικοὶ Philoſophi dicuntur οἱ ἐφεκτικοὶ καὶ σκεπτικοὶ teſte Laertio, qui nihil aſſeueranter enunciabant, ſed ſemper quærebant, rei veritatem inueſtigantes, vt συζητητὴς curioſus, & naturę ſcrutator dicitur. Ita fit, vt duplex problema ſit Ζητητικὸν, Zeteticum vnum, & ἀναλυτικὸν Analyticum alterum; illud quęſitiuum, hoc autem reſolutiuum diceres, ἀναλυτικῷ opponitur συνθετικὸν, nempe compoſitiuum.

Præcipuus modus inquirendi æquationū primordia, eſt ex Zeteticis.

Hic vnus, & quidem præcipuus ex modis, quibus inquirere licet ęquationum primordia, alij quoque extant de quibus infra, ſed hinc par erat exordiri cognita autem ęquationum natura fit obuia, ad earum explicationem, in quo totum huius Artis momentum eſt Vieta celebris Analyſta vſus Zeteticis ad indagandam æquationum naturam, atque conſtitutionem; nec immeritò, nam vt ex ſequentibus apertè conſtabit cognita ęquationis natura ex Zetetico, ſtatim ad eius explicationem via aperitur, quò fateamur neceſſe eſt magni faciendam eſſe methodum ex Zeteticis deſumptam. Noſtra verò inuenta hac in re poſtmodum afferemus.

Authoris inuenta inferius habentur.

Quāuis hac de re multa dicēda ſupereſſēt; ea tamē iuuat præterire ſilentio, nam id ſolùm eſt nobis in animo, neceſſaria tractare quæ nimirum ad oblatum quodcunque reſoluendum Problēma conducunt, idque præſtiturum Deo adiuuante crediderim, ſi diligenter adnotauerim, quæ in Problematum reſolutione hactenus expertus ſum, multum enim conducit ad Artem aliquam, vel primò inueniendam, vel inuentam illuſtrandam, ac promouendam expertum eſſe quę ad illam pertinent; propterea quod facilè quiſque notat vlterioribus opus eſſe pręceptis, nec vniuerſam Artem iam traditis eſſe comprehenſam; cùm non pauca eueniant, quę maiorem induſtriam requirant. Et ſi igitur ab alijs diſciplinam adinuentam tractandam ſuſceperim,

peri de quo veteres, ſapientię proceres meritò gloriari poſſunt, tamen illud laudis nobis obtigiſſe ſatis, ſuperque ſit, illam eò deduxiſſe, vt quæ olim dificillima, ac inextricabilia, vel Theoremata demonſtratu, vel Problemata ſolutu credebantur modo ſua ſponte quaſi dixerim, occurrant.

Vtiliſſimè Zeteſis inſtituitur ad æquationũ naturam indagandam

Haud ἀτέχνως, Zeteſis innſtituitur, nec εικῆ quidem, vt præclariſſimus Analyſta dicebat, cum pura à puris, affecta verò, ex affectis, ratio dictet proficiſci; quapropter ad deprehendendam conditionem æquationum pertinentium ad puras poteſtates, Artifex ex datis duobus lateribus poteſtates inquiret; Ad ęquationes poteſtatum ſimpliciter affectarum, ex data differentia, ſummaue laterum inueſtigabit, vel ſuorum graduum vna cum dato ſub ijs, vel eorum gradibus paribus, vel diſparibus facto ex lateribus alterutrum; Atque demum ad æquationes multipliciter affectarum affectionē adiunget affectioni ſub diuerſis gradibus parodicis laterum, Vel ſe non adiget Analyſta vni quæſtionum formulę, ſed ſub Zeteticis, ſub quocumque efficto, vel dato themate debebit ſe exercere, admonendus eſt verò ille, vt recordetur, quæ Geometrico operi eſt apraturus latera ad extremas lineas rectas referri in ſerie continuè prodortionalium, facta verò ſub lateribus, & laterum paribus, vel diſparibus gradibus ad poteſtates aliquarum ex medijs; cumque in æquationem incidet ſuo benè obuiam μηχανικῶ de illo πρόβλημα condet, ſimile cuiuſcumque ęqualitatis ϛυϛατικὸν, hoc eſt çompoſitiuum, & ἐκθετικον ſeu ἐξηγητικον, hoc eſt expoſitiuum.

Problema ſyſtaticum quid, et quid exegeticum

Similes æquationes, quæ dicantur.

Quid autem ad æquationum ſimilitudinem requiratur, ſupereſt, vt videamus. Æquatio dicitur ęquationi ſimilis, cùm par eſt vtrobique poteſtas, ſeu æque alta, & ipſa affecta, vel afficiens ſub pari gradu, vel eadem affectionis nota. Vnde duas æquationes non immeritò ſimiles eſſe dicemus, cùm in vtraque idem eſt poteſtatis gradus, eędem ſunt affectiones, ac ob id ſi omnes termini, ex vna parte reperiantur ęquales nihilo, tunc æquationes ſimiles erunt, cùm in vtraque idem eſt primus terminus, & reliqui termini in vtraque ſimiliter ſunt affecti, & ſi in vna, aliquis terminus, defuerit, is quoque deſit in alia; ſupponendum autem ſimilium ſcilicet æquationum, eandem eſſe conſtitutionem.

Simplex æquationum genus.

Cæterum, vt alibi etiam adnotatum fuit, triplex æquatio eſt, καταφατικὴ cataphatica, ἀποφατικὴ, apophatica, ἀμφίβολος, amphibola; hoc eſt affirmatiua, negatiua, & ambigua. Quę autem dicta ſunt facilè ex infra dicendis cognoſcentur, interim perſpicuum illud eſto, vt pote ratione deprehenſum, affecta quidem ab affectis originem ducere, quemadmodum pura à puris, atque adeo ad dignoſcendam conditionem æquationum pertinentium ad puras poteſtates operæ pretium eſſe ex duobus datis lateribus poteſtates inquirere, & ad ęquationes affectarum ſimpliciter poteſtatum ea opus eſſe perficere, qnæ paulò ſuperiùs innuimus.

Quadraticarũ æquationum conſtitutio.

Supereſt autem, vt ad quadraticarum æquationum conſtitutiones ex Zeteticis gradum faciamus; Huius inuenti auctor Vieta eſt ſed hìc multa alia, ad idem ſpectantia non ſine magno Artis incremento ſubijciemus, prædictarum igitur æquationum conſtitutiones, ſunt, ad eum, qui ſequitur in modum.

Quadraticarum æquationum natura, ac conſtitutio ex Zeteticis aperitur.

De çonſtitutiuis igitur quadraticarum æquationum ex Zeteticis hìc differendum, ea verò ſunt, quæ ſequuntur.

Prima ex æquationibus quadraticis

Si ſit æquatio $a^2 + b a = z^2$, ſunt tres proportionales radices, quarum media eſt z, extremarum differentia eſt b; ſit autem a, minor extrema hoc Vieta deduxit ex Zetetico.

Zeteticum.

Data media trium rectarum linearum proportionalium, & extremarum differentia, repreire minorem extremam.

Media è tribus proportionalibus magditudinibus ſit z, at verò b ſit extremarum data differentia. Minor extrema eſto a; maior igitur erit $a + b$; rectangulum autem ſub his eſt $a^2 + b a$, & quoniam factum ſub extremis in ſerie tiium proportionalium æquale eſt quadrato medię; proinde $a^2 + b a$ æquabitur z^2; hoc autem eſt, quod ſuperiùs ordinabatur; conſtat igitur huius æquationis quadraticæ conſtitutio, hinc enim ęquatio ipſa originem trahit, conſtitutionemque ſortitur.

Hacte-

Numeris hactenus dicta declarantur.

Hactenus verò dicta numeris etiam explicari possunt; propterea.

Sit æquatio 1 Q + 48 R = 324; erit ℞ 324, hoc est 100 media inter extremas, quarum differentia erit 400, & fit 1 R minor extrema è serie trium proportionalium *6*, 100, 54, & ita quidem est, nam quadratum ex *6* est *36*, cui si addideris 288, scilicet radicum pretium, fiet 324, constat igitur propositum.

Alijs modis prædictarum æquationum natura declarabitur infrà, præsertim modo, quẽ Auctor adinuenit.

Huius autem ęquationis, vt & sequentium natura alijs quoque infrà dicendis modis deprehendetur, interim ex Zetesi primo loco, visum est illam inquirere,

Sit æquatio $a^2 - b a = z^2$. Sunt tres radices proportionales, quarum est media z, & extremarum differentia est b, fit autem a, maior extrema, hoc autem Vieta deduxit ex Zetetico.

Zeteticum.

Data media trium proportionalium, atque differentia inter extremas reperire maiorem extremam.

Maior extrema esto a, ergo minor erit a — b; rectangulum sub his est $a^2 - b a$, & ob rationem superiùs allatam erit æquatio $a^2 - b a = z^2$. Hoc est autem, quod priùs ordinabatur. Numeris autum eandem hanc æquationem sic explicabimus.

Sit æquatio 1 Q + 48 R = 324, est ℞ 324 hoc est 18, media inter extremas, quarum differentia est 48, & fit 1 Q maior extrema è serie trium proportionalium *6*, 18, 54, & ita est, namque, si radicis pretium est 54, eius quadratum erit *2916*; à quo si auferatur *2592*, pretium radicum, remanebit 324 comparationis homogeneum.

Hinc igitur huius æquationis natura, ac primaria origo deprehenditur.

Sit æquatio $b a - a^2 = z^2$. Sunt tres radices proportionales, quarum est media z, & extremarum aggregatum b; & fit a minor, vel maior extrema; hoc autem Vieta deduxit ex Zetetico.

Zeteticum.

Data media trium proportionalium, & aggregato extremarum reperire alterutram de extremis.

Data sit media z, & aggregatum extremarum sit b; Oporteat reperire alterutram de extremis. Minor extrema esto a; erit ob id maior b — a, quapropter erit æquatio $b a - a^2 = z^2$ ob eam; quam superiùs rationem attulimus.

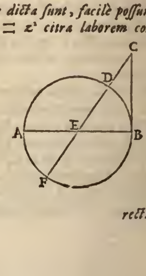
Sit maior extrema a; ergo b — a erit minor extrema; ac proinde $b a - a^2$ ęquabitur z^2; quamobrem a vel de minori, vel de maiori ipsarum extremarum poterit enunciari; quandoquidem amphibola cum hæc sit æquatio duplicem habet radicem; ex Zetetico itaque huius æquationis primordia innotescunt. Numeris verò superius dict[a] sic poterunt declarari.

Sit æquatio *6*0 R — 1 Q = 324; media quidem inter extremas, quarum aggregatum est *60*, erit ℞ 324, & fit 1 R minor, vel maior extrema ex serie trium proportionalium *6*, 18, 54, erit enim *6*, & 54, superioris æquationis radix.

S C H O L I O N.

Superiùs dicta Geometria co sensu e demóstrantur.

Qvæ hactenus de quadraticarum istarum constitutione dicta sunt, facilè possunt Geometricè demonstrari. Si enim sit æquatio $a^2 + b a = z^2$ *citra laborem constabit esse tres proportionales quantitates, quarum media sit* z, *& extremarum differentia sit* a, *fiat verò* a, *minor extrema. In apposito diagrammate coefficiens esto* A B, *& ad extremum* B *punctum erigatur perpendicularis* B C, *quæ possit comparationis homogeneum; mox autem* A B, *bifariam diuisa in* E, *centro* E, *internallo* E A; *vel* E B, *describatur circulus* A D B F; *deinde à puncto* C *per* E, *centrum agatur* C D E F; *quæ à peripheria primò secetur in* D. *deinde terminetur in* F, *erit quadratum ex* C D, *plus*

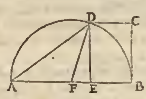


rectna-

rectangulo C D F, *hoc est plus rectangulo comprehenso sub* C D, *&* D F, *hoc est* A E *coefficiente, æquale rectangulo* F C D, *hoc est quadrato* C B; *præterea* C B, *poterat comparationis homogeneum; suntque* C D, C B, C F, *proportionales, adeo vt media sit* C B, *extremarum differentia* D F, *patet igitur propositum.*

Ita etiam si sit æquatio $a^2 - b\,a \sqsupset z^2$ *media trium proportionalium est* z, *extremarum differentia est* b; *& sit* a, *maior extrema, idque constat, namque in superiori schemate, si* A B, *seu* F D, *sit coefficiens, at verò* B C *possit comparationis homogeneum. Quadratum ex* C F *minus rectangulo* C F D *æquale est rectangulo* F C D; *hoc est quadrato ex* B C, *est igitur radix* C F, *erat enim* D F *coefficienti æqualis; at verò* C B *poterat comparationis homogeneum, & quadratum ex* C F, *minus rectangulo* C F D, *æquale est quadrato rectæ* B C; *suntque* C D, D B *proportionales, quarum minor extrema* C D, *maior autem* C F *media verò* B C; *quæ poterat comparationis homngeneum; extremarum differentia coefficiens* E F. *Patet igitur propositum.* Explicatur æquatio apothatica.

Ita demum sit æquatio $b\,a - a^2 \sqsupset z^2$. *Ostendemus ex tribus qroportionalibus mediam esse* z; *extremarum autem aggregatum* b, *fierique* a, *minorem, vel maiorem extremam. In adiuncto enim Schemate recta* A B, *sit coefficiens, supra quam descriptus sit semicirculus* A D B; *ex puncto verò* B, *erecta sit perpendicularis* B C, *potens comparationis homogeneum, à puncto autem* C, *acta* C D *paralella ipsi* A B *occurrat peripheriæ in* D; *à puncto* D *agatur* D E *perpendicularis ad* A B; *cum igitur rectangulum* A B E *minus quadrato ex* E B *hoc est rectangulam* A E B, *æquale sit quadrato ex* D E, *seu* B C, *&* A B *erat coefficiens;* B C *verò poterat comparationis homogeneum, erit* D E *radix, suntque proportionales* E B, E D, E A *quarum media est* E D, *siue* B C, *exextremarum autem aggregatum* A B: *ad radicem igitur minorem quod attinet patet propositum. Constabit etiam de miaori, est enim rectangulum* B A E *minus quadrato ex* A D, *æquale rectangulo* E B A, *hoc est quadrato ex* D E, *siue* B C; *proinde radix erit* A E.



Supradictarum autem æquationum natura, atque constitutio aliter quoque deprehenditur nimirum, vt superiùs quoque monuimus per Εἰκασίαν τῶν ὁμοίων. *Si tamen id præ oculis habeatur, quod in sequentibus fusè tractabitur, nempe vniuscuiusque æquationis dari duas, vel plures radices, si etiam sermo sit de æquationibus affectis, & quidem duas cùm æquatio fuerit quadratica, tres si fuerit cubica, tot, nimirum, quot dimensiones sunt potestatis affectæ; quadratum enim duarum est dimensionum, propterea quadratica æquatio duplicem habet radicem, cubus trium est dimensionum; ob id æquatio cubica tres radices habet, & ita deinceps; illud porrò est animaduertendum, quòd in æquatione quadratica è duabus radicibus sæpe accidit, vt vna sit falsa, hoc est minor quàm nihil, altera autem vera; hac de re tamen fusè in seqeentibus differendum erit; interim tamen hoc in loco iuuat animaduertisse, quod etiam in prima parte tetigimus, & hac de re multa quidem scripsimus.* Supradictarũ æquationum.

Ad hanc autem alteram viam, qua natura, atque constitutio æquationum compositarum indagatur, earum nempe, quæ ad hoc primum genus pertinent præstat facilitatis gratia per antithesin, sic æquationem ipsam parare, vt ex vna æquationis parte nihil existat, atque adeo cum nihilo instituatur ἀντίθεσις, *priùs tamen aliquid de simplicibus dicendum.*

Aliæ quædam, & primò simplicium, deinde compositarum Æquationum constitutiones.

SI proposita sit æquatio $a^2 - g^2 \sqsupset o$. Ortum ducit à duabus, æquationibus sequentibus $a - g \sqsupset o$, & $a + g \sqsupset o$ ex harum enim multiplicatione mutua fit $a^2 - g^2 \sqsupset o$. Ipsius igitur duæ sunt radices, vna quidem vera, nempe g, altera Cõstitutio simplicis æquationis ex duabus quarum vna est vera, altera falsa.

Q itidem

itidem eadem g, ſed falſa, quarum ſcilicet vtraque æqualis eſt ipſi g. Hunc olim conſtitutionis modum attigerat Beaune, auxit Eraſmius, & nos adiecimus, quę peropportuna ad abſolutam argumenti tractationem videbantur.

Proponitur origo, aut æquatio vnde conſtitutio deprehenditur.

Si fuerit $a^2 + ba = bc$. Huius ęquationis ea eſt originalis ęquatio, quæ per multiplicationem quadraticam è radicibus binomijs ortum ducit; in hac enim factum ex radicibus multiplicatis, radicibus ipſis multiplicandis ſub ipſa forma tantummodo multiplicationis ordinatis, æquatur. Hinc autem originem trahit ſuperior ęquatio; ſi enim a æquatur b; vtique $a - b$ ęquabitur o; poſito igitur, quod a æquetur b; etiam radices multiplicandę $a - b$, & $a + c$ ſub forma multiplicationis tantummodo ordinatæ, æquabuntur o; at verò hiſce radicibus binomijs multiplicandis factum ex multiplicatis, nempe $a^2 - ba + ca - bc = o$ (hoc autem fit, ſi ęquatiò $a - b = o$ ducatur in æquationem $a + c = o$) ęquabitur, & per antitheſin $a^2 - ba + ca$ æquabitur $+ bc$. Retentis autem omnibus terminis ex vna æquationis parte facilitatis gratia, ita vt ex altera exiſtat o, cui ſupradicti termini comparentur; atque adeo ſint nihilo æquales; propoſita æquatio erit ad hanc formam redacta $a^2 {}^{-b}_{+c}\, a - bc = o$, quæ à binomijs prędictis, tanquam à radicibus originem trahit, è quibus vna nimirum $a - b$ radix eſt vera, altera verò ſcilicet $a + c$ eſt falſa, vnde b, eſt vera, at verò c, eſt falſa. His ſuppoſitis.

Proponitur æquatio cuius conſtitutio inquiritur, & eſt cataplatica.

Propoſita ſit æquatio $a^2 + da - g^2 = o$. Ex hypotheſi quod c, maior ſit quàm b æquatio iam dicta ſimilis erit ſuperiori, vt patet, eiuſdem propterea ſunt naturæ, atque conſtitutionis, facta igitur mutua earum comparatione, ac vtriuſque ſecundis terminis inuicem collatis, innoteſcit $c - b$ æquari d; cumque c foret radix falſa, b autem vera, coefficiens ſublateralis, nempe d deprehenditur æqualis differentiæ inter c, & b, atque adeo inter radicem falſam, & veram; hanc eandem coefficientem oriri ex applicatione differentię poteſtatum, ad aggregatum laterum in ſequentibus oſtendemus. Intelligimus quoque cognita c, falſa, veram b, ęqualem eſſe $c - d$, vt cognita vera b, falſam c, æqualem eſſe $b + d$, addiſcimus itidem collatis vltimis terminis g^2, ęquari bc, nempe rectangulo ſub ipſis radicibus vera, & falſa, vnde falſa c, cognita, veram b ęquari $\frac{g^2}{c}$, & cognita vera b, falsam c æquari $\frac{g^2}{b}$.

Sic igitur ſe habet, huius æquationis conſtitutio, vnde quàmmaximè patet aditus, vt ex ſequentibus peſpicuum fiet ad eiuſdem explicationem.

Coherentia cum ſuperioribus, & hanc conſtitutionē cum præcedentibus coherere oſtenditur.

Cohærent hęc autem cum præcedentibus; ſunt enim tres proportionales magnitudines, è quibus extremæ duę ſunt radices, vna quidem vera, altera verò falſa in ęquatione, in qua quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, dataque coefficientę longitudine, vnde in ſuprapoſito ſchemate infra repetito, BC poteſt comparationis homogeneum iuxta priorem ęquationis formam, quod iuxta poſteriorem vltimus eſt eius terminus; DC radix eſt vera, cuius quadratum afficitur adiunctione plani ſub latere, &c. Radix falſa eſt FC, differentia FD, coefficiens eſt ſublateralis longitudo; ex vera radice DC, in falſam FC, fit rectangulum FCD, quod eſt æquale quadrato ex BC; in huiuſmodi igitur ęquatione perſpicimus coefficientem FD differentiam eſſe inter veram radicem DC, & falſam FC, atque cognita falſa FC, veram DC, ęqualem eſſe ipſi FC, minus FD, & cognita vera DC, falſam FC, eſſe ęqualem ipſi DC, plus FD, & quadratum BC, ęquale eſſe rectangulo FCD, ſub falſa, & vera radice, & cognita falſa FC, veram DC, ęqualem eſſe magnitudini ortiuæ ex applicatione quadrati BC, ad FC, cognita autem DC, falſam FC, ęqualem eſſe magnitudini ortiuę ex applicatione quadrati BC, ad veram radicem DC.

Proponitur originaria æquatio vnde conſtitutio deprehenditur.

Si fuerit $a^2 - ba = bc$. Huius æquationis ea eſt originalis æquatio, quæ per multiplicationem è radicibus binomijs ortum ducit, in hac enim factum ex radicibus multiplicatis, radicibus ipſis multiplicandis ſub ipſa forma tantummodo multiplicationis, ordinatis ęquatur. Hinc autem òriginem trahit ſuperior æquatio. Si enim a, æquetur b, vtique $a - b$ æquabitur o, quod ſi $a - b$ æquetur o ergo factum ex $a - b$ in $a + c$ æquabitur o, poſito igitur quòd a, æquetur b; etiam radices multiplicandæ $a - b$, & $a + c$, ſub forma multiplicationis tantummodo ordinatæ æquabuntur o, at verò hiſce radicibus binomijs multiplicandis, factum

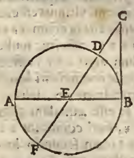
ex multiplicatis, nempe $a^2 - b\,a + c\,a - b\,c$ (hoc autem fit, si æquatio $a - b = o$ ducatur in æquationem $a + c = o$) æquabitur ; & per antithesin $a^2 - b\,a + c\,a$ æquabitur $+ b\,c$. Retentis autem omnibus terminis ex vna æquationis parte, facilitatis gratia, itaut ex altera existat o, cui supradicti termini comparentur, atque adeo sint nihilo æquales, proposita æquatio erit ad hanc formam redacta $a^2 {}^{-b}_{+c}\, a - b\,c = o$, quæ à binomijs prædictis, tanquam à radicibus originem trahit, è quibus nimirum $a - b$ radix est vera, altera verò scilicet $a + c$ est falsa, vnde b, est vera; at verò c, est falsa. His suppositis.

Proponitur æquatio apophatica.

Proposita sit æquatio $a^2 - d\,a - g^2 = o$, ex hypothesi, quòd b, maior sit quàm c, æquatio iam dicta similis erit superiori, vt patet, eiusdem propterea sunt naturę atque constitutionis, facta igitur mutua earum comparatione, ac vtriusque secundis terminis inuicem collatis, innotescit $c - b$ ęqualem esse $- d$, vel d, æqualem esse $b - c$; eiusdem coefficientis ortum alium, in sequentibus ostendemus; cumque c, foret radix falsa; b autem vera, coefficiens sublateralis, nempe d, deprehenditur ęqualis differentiæ inter c, & b atque adeo inter radicem falsam, & veram; Intelligimus quoque cognita falsa c, veram b, æqualem esse $d + c$; cognita vera b, falsam c, æqualem esse $b - d$. Vltimisque terminis collatis.

Addiscimus itidem g^2 æquari $b\,c$, nempe rectangulo sub ipsis radicibus, falsa, & vera, ac ob id cognita falsa c, in æquatione proposita, veram b, ęquari $\frac{g^2}{c}$, & cognita vera b falsam c, æquari $\frac{g^2}{b}$.

Sic igitur se habet, huius æquationis constitutio, vnde quammaximè patet aditus vt ex sequentibus perspicuum fiet, ad eiusdem explicationem.



Cohęrent hæc autem cum præcedentibus, sunt enim tres proportionales magnitudines, è quibus extremæ duę sunt radices, vna quidem vera, altera autem falsa in æquatione, in qua quadratum afficitur negatione plani sub latere, dataque coefficiente longitudine ; vnde in suprapofito schemate hìc repetito B C, potest comparationis homogeneum iuxta priorem ęquationis formam, quod iuxta posteriorem vltimus est eius terminus, at F C est radix vera, cuius quadratum afficitur abiunctione plani sub latere, radix falsa est D C, differentia F D, est coefficiens longitudo sublateralis ; ex vera radice F C in falsam D C, fit rectangulum F C D, quod est ęquale quadrato B C. In huiusmodi igitur æquatione perspicimus coefficientem F D, esse differentiam inter veram radicem F C, & falsam D C, atque deprehendimus cognita falsa radice D C, veram F C, æqualem esse F D, plus D C, & cognita vera F C, falsam D C, equalem esse F C, minus F, D quadratum verò ex B C, esse æquale rectangulo F C D, sub vera, & falsa radice, cognita autem falsa D C, veram F C ęqualem esse magnitudini ortiuę ex applicatione quadrati B C, ad D C, cognita vera F C, falsam D C ęqualem esse magnitudini ortiuę ex applicatione quadrati B C, ad veram radicem F C.

Originaria æquatio vnde amphibola.

Si fuerit $b\,a - a^2 = b\,c$. Huius ęquationis ea est originalis æquatio, quæ per multiplicationem decentem è radicibus binomijs ortum ducit, in hac enim factum ex radicibus congruè multiplicatis, radicibus ipsis multiplicandis sub ipsa forma tantummodo multiplicationis ordinatis, æquatur. Hinc autem originem trahit superior æquatio si enim a, æquetur b, vtique $a - b$ æquabitur o; vel si ponatur a æquari c vtique $a - c$ æquabitur o. Si itaque a ęquetur d vel c, etiam radices multiplicandæ $a - b$, & $a - c$ sub forma multiplicationis tantummodo ordinatę ęquabuntur o, at vero hisce radicibus binomijs multiplicandis, factum ex multiplicatis nempe $a^2 - b\,a - c\,a + b\,c$ (hoc enim, fit si ęquatio $a - b = o$ congruè ducatur in æquationem $a - c = o$) æquabitur; & per antithesin $a^2 - b\,a - c\,a = + b\,c$.

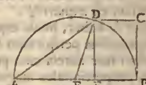
Retentis autem omnibus terminis ex vna æquationis parte facilitatis gratia, itaut ex altera existat o, cui supradicti termini comparentur, atque adeo sint nihilo æquales, proposita æquatio erit ad hanc formam redacta nimirum $a^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{-b}{-c} a - b\,c = o$ quæ a binomijs prædictis tanquam a radicibus originem trahit, è quibus vna nimirum $a - b$ radix est vera, altera vero $a - c$ itidem vera. His verò suppositis.

Proponatur æquatio cuius inquiritur constitutio.

Proposita sit æquatio $a^2 - d\,a + g^2 = o$. Hæc æquatio persimilis erit superiori vt patet, eiusdem propterea sunt naturæ, atque constitutionis facta igitur mutua earũ cõparatione, ac vnius terminis cũ alterius secundis terminis collatis innotescit $b + c$ æquari d, cumque tam b, quàm c, radix sit vera, coefficiens sublateralis, nempe d deprehenditur æqualis aggregato, ex b, & c atque adeo ex vtraque radice vera. Intelligimus quoque si vna ipsarum fuerit cognita, nempe c reliquam b æqualem esse $d - c$, & cognita b, reliquam c æquari $d - b$. Vltimisq; terminis collatis; Addiscimus quoque g^2 æquale esse $b\,c$, nempe rectangulo sub duabus veris radicibus, ac ob id alterutra cognita, vtputa b, alteram c æqualem esse $\frac{g^2}{b}$, & cognita c alteram b æqualem esse $\frac{g^2}{c}$.

Sic igitur se habet huius æquationis constitutio, vnde quammaximè patet aditus, vt ex sequentibus perspicuum fiet ad eiusdem explicationem.

Quæ hucusq; dicta sunt cũ præcedentibus cohærent.



Cohærent autem hæc cum præcedentibus sunt enim tres proportionales magnitudines, è quibus, vtraque extremarum est radix in æquatione, in qua planum sub latere, dataque coefficiente longitudine afficitur multa quadrati, vnde in suprapositio schemate hìc repetito, B C potest comparationis homogeneum iuxta priorem æquationis formam, & iuxta posteriorem, vltimus est eius terminus; at E B, radix vna, altera etiam, A E vtraq; vera; & rectangulum A E B, afficitur multa quadrati E B, rectangulum verò B A E, afficitur multa quadrati A E aggregatum ex A E, E B radicibus est æquale coefficienti longitudini; ex radice E B, & radice A E, rectangulum æquale est quadrato E D, seu B C. In huiusmodi igitur æquatione perspicimus coefficientem A E. esse æqualem aggrato vtriusque radicis, atque deprehendimus cognita radice A E, fieri cognitam E B, & contra, &c.

Quæ tamen secundo loco attulimus ad prædictarum æquationum constitutionem indagandam, per σύγκρισιν indagantur; vnde non est cur aliquis è Neotericis id sibi arroget, cum iam prædicto modo ea fuerint comparata. Quod ita planum fiet.

Cõstitutio eadẽ per syncrisin deprehenditur.

Proponatur $a^2 + b\,a = z$ pl., & rursus $e^2 - b\,e = z$ pl. cum igitur quæ vni æquantur sint inter se æqualia $a^2 + b\,a$ æquabitur $e^2 - b\,e$, & per antithesin $e^2 - a^2$ quabitur $b\,e + b\,a$, omnibusque per $e + a$ diuisis, fiet æquatio $\frac{e^2 - a^2}{e + a}$) id est $e - a = b$. Igitur b coefficiens sublateralis est differentia duorum laterum, quorum vnum est falsum, alterum autem verum, oriunda ex applicatione differentiæ quadratorum ad aggregatum laterum prædictorum, & quia $a^2 + b\,a$ æquatur z plano in locum ipsius b subrogetur agnitus eius valor, nempe $\frac{e^2 - a^2}{e + a}$ ergo $a^2 + \frac{e^2 - a^2}{e + a}\,a$ æquabitur z plano, hoc est omnibus ritè ordinatis $\frac{a^2 e + e^2 a}{e + a}$) id est $e\,a$; æquabitur z plano; est enim $e\,a$, æquale huic fractioni $\frac{a^2 e + e^2 a}{e + a}$, si namque diuidatur $a^2 e + e^2 a$ per $e + a$ orietur $e\,a$ pro quotiente; Vnde addiscimus z planum fieri ex mutua multiplicatione duorum prædictorum laterum, hæc superiùs intendebãtur. Quæ vt meliùs intelligi queant, numeris explicare non pigebit.

Hactenus dicta numeris explicantur.

Proponatur $1\,Q + 12\,R = 85$, & rursus $1\,A\,Q - 12\,A = 85$, erit æquatio $1\,Q + 12\,R = 1\,A\,Q - 12\,A$, & per antithesin $1\,A\,Q - 1\,Q = 12\,R + 12\,A$ omnibusque diuisis per $1\,A + 1\,R$ erit æquatio $\frac{1\,A\,Q - 1\,Q}{1\,A + 1\,R} = 12$, & quia $1\,Q + 12\,R$ æquatur 85, in locum ipsius 12 subrogetur cognitus eius valor $\frac{1\,A\,Q - 1\,Q}{1\,A + 1\,Q}$, & erit æquatio $1\,Q\ \frac{+1\,A\,Q - 1\,Q}{1\,A + 1\,R}$) $1\,R = 85$, & omnibus ritè ordinatis, fiet $\frac{+1\,A\,Q \text{ in } A + 1\,Q \text{ in } 1\,R}{1\,A + 1\,R}$. Id est $1\,A$ in $1\,R$ æquabitur 85.

Vnde

Explicantur hactenus tradita.

Vnde hactenus tradita colligimus cum veritate consentire namque radix 1 R est 5, & A est 17, illa vera; hæc autem falsa, quod ex multiplicatione deprehenditur, si enim ducatur $a + 17 \sqsupset 0$ in $a - 5 \sqsupset 0$ fit productnm $a^2 + 12\,a - 85 \sqsupset 0$. Agnitum etiam est comparationis homogeneum, nempe 85, fieri ex multiplicatione falsæ radicis 17 in veram 5. De his tamen fusè in sequentibus disserendum. Interim illudadnotetur, puta laterum prædictorum, nempe 17, & 5, quadrata esse 289, 25 quorum differentia est 264, quę si applicetur ad 22, aggregatum eorundem laterum; oritur coefficiens sublateralis 12.

$$\begin{array}{r} a + 17 \sqsupset 0 \\ a - 5 \sqsupset 0 \\ \hline - 5\,a - 85 \\ a^2 + 17\,a \\ \hline a^2 + 12\,a - 85 \sqsupset 0 \end{array}$$

Quæ de superiori æquatione dictasunt de cæteris quoque &c.

Quæ verò de superiori æquationis, diximus genere, suo debito modo de alijs duobus generibus, nempe apophatica, & amphibola intelligenda sunt, vt cumulatè in sequentibus explicabimus.

Implicatioribus præferenda simpliciora.

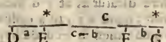
Si implicatioribus, præferenda simpliciora sunt, non nihil spei mihi blanditur futurum, vt hæc, quæ nos excogitauimus quadraticarum æquationum primordia aliquo digna plausu æxistimentur. Harum autem principia sunt, à quibus ipsę fiunt, sunt, & cognoscuntur, cùm hæc sit ipsius principij ratio, sed quoniam hæ non transcendunt planorum limites, planorum autem principia immediata sunt latera; quorum ductu producuntur, harum igitur æquationum immediata principia erunt; at ex lateris dissectione, non nisi latera oriuntur; hinc istarum æquationum primordia, latera ipsa dicenda existimauimus. Ad primam igitur æquationem, quod attinet, in qua quadratum afficitur adiunctione plani sub latere, dataque coefficiente longitudine, constitutio sic se habet per διαίρεσιν τῆς γραμμῆς ὀρθῆς.

Quadraticarum æquationum principia sunt latera.

Cõstitutio superioris æquationis ab Auctore adinuenta traditur ac explicatur vbi sine Zeteticis, & sine collatione æquationis cũ alia omnia haberi posse ostẽditur.

Sit recta D G secta vtcunque in E secta verò sit F G æqualis ipsi D E, manifestum est, quadratum ex D E, vnà cum rectangulo D E F; æquari rectangulo D F G, est enim quadratum ex D E, vnà cum rectangulo D E F æquale rectangulo F D E, hoc est D E G, si itaque D E, fuerit radix; E F, verò coefficiens quidem sublateralis; cùm quadratum ex D E, vna cum rectangulo D E F, nempe quadratum radicis plus homogeneo sub latere, & coefficiente longitudine, æquale sit rectangulo, D E G, erit rectangulum D E G, seu E G F, homogeneum datę mensuræ; itaque D E erit radix vna, cui æquatur F G, quamobrem D E, minus F G, æquabitur o; nempe nihilo, vnde D E erit radix vera, & E G, radix falsa, illa enim plus E G æquabitur o; harum differentia E F, est ipsa coefficiens longitudo. Hinc addiscimus differentiam duarum radicum, quarum vna est vera; altera falsa in æquatione de qua loquimur esse coefficientem longitudinem, atque cognita radice vera D E, seu F G, per additionem coefficientis longitudinis E F fieri cognitam radicem falsam E G; vt contra cognita falsa E G, per subtractionem eiusdem coefficientis longitudinis E F fieri cognitam radicem veram F G, seu D E, & comparationis homogeneum puta rectangulum D E G, seu E G F, fieri ex radice quidem vera D E, seu F G, in falsã E G quamobrem si D E, fuerit a, & E G fuerit c, & F G, denique b, comparationis homogeneum nempe rectangulum D E G, seu E G F erit b c, est autem a — b ęqualis o cùm a æquetur b, & E F, est c — b. proinde fiet ęquatio $a^2 \; {}^{-\,b}_{+\,c}\; a \sqsupset b\,c$ quod si placet fieri comparationem inter positiuum, & negatiuum erit $a^2 \; {}^{-\,b}_{+\,c}\; a - b\,c \sqsupset 0$. Hic aduerte cum c sit maior quã b; per additionem ipsius + c ad — b fieri æquationem affirmatiuam, Vides igitur quã simplex sit huius æquationis cõstitutio, & quomodo absque, Zeteticis, vel collatione cum alia æquatione, propositæ æquationis primordia comparentur.

D E est a; F G est b E G est c; & E F est c — b.

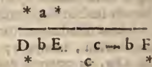


Si

Alia instituitur hypothesis.

Si placet potest etiam eadem recta appellari a, & b; cum enim a supponatur æqualis b, vnde a — b est æqualis o, propterea eadem dici potest a, & b, vnde adhuc a — b, æquabitur o. Tunc verò schema se haberet, vt hìc. Manifestum est quadratum ex D E, vnà cum rectangulo D E F æquari rectangulo F D E. Si itaque D E fuerit radix, E F, verò coefficiens sublateralis erit. Cùm igitur quadratum ex D E vnà cum rectangulo D E F, nempe quadratum radicis plus homogeneo sub latere, & coefficiente longitudine, æquale sit rectangulo F D E; rectangulum F D E, erit homogeneum datæ mensuræ. Erit igitur D E radix vera, & D F radix falsa; hæc enim plus D E æquabitur o; harum autem differentia E F, erit coefficiens longitudo. Hinc addiscimus differentiam duarum radicum, quarum vna est vera, altera falsa in æquatione, de qua loquimur esse coefficientem longitudinem, atque cognita vera radice D E per additionem coefficientis E F, fieri cognitam radicem falsam D F, vt cognita falsa D F, per subtractionem eiusdem coefficientis longitudinis E F fieri cognitam radicem veram D E, & comparationis homogeneum, puta rectangulum, F D E, fieri ex radice quidem vera D E, & falsa D F; quamobrem, si D E fuerit a, & eadem sit b, & D F sit c; comparationis homogeneum, nempe rectangulum F D E, est b c; est autem a — b æqualis o; cùm a æquetur b, imò sit eadem, & E F est c — b; proinde fiet æquatio aa + ba ≖ b c seu aa + ba — b c ≖ o.

D E, est a itemq; b; D F, est c, & E F, est c — b.

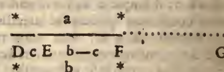


Proponitur secundum æquationis quadraticæ genus.

Sequitur æquatio, in qua quadratum afficitur multa plani sub latere, dataque coefficiente longitudine, cuius constitutio hæc est.

Bifariam institui potest hypothesis, vel protracta D F in G, itaut F G sit æqualis ipsi D F, & hæc dicatur a; at F G dicatur b; vel supposito, quod D F, sit a eademque dicatur b; quia tamen in secunda hypothesi adhuc a — b, æquatur o, non minùs, quàm in prima, & eadem currit demonstratio, vt in antecedenti licet aduertere, propterea secundam hypothesin amplectemur; ergo.

D F, est a, itemque b, & foret etiã b, ipsa F G. D E est c, & E F, est b — c.



Sit recta D F, secta in E, vtcumque, manifestum est quadratum ex D F multatum rectangulo D F E, æquari rectangulo F D E, est enim quadratum ex D F, æquale rectangulo D F E, vnà cum rectangulo F D E, vnde quadratum ipsum ex D E, multatum rectangulo D F E, æquabitur rectangulo F D E, si itaque D E sit radix, erit E F coefficiens sublateralis, cùm itaque quadratum ex D F, minus rectangulo D F E, nempe quadratum lateris minus homogeneo sub latere, & coefficiente longitudine, æquale sit rectangulo F D E, rectangulum F D E erit homogeneum datæ mensuræ, itaque D F erit latus vnum, cui cùm æquetur eadem D F, erit D F, minus D F, æqualis o, nempè nihilo, vnde D F erit radix vera, & D E radix falsa, illa enim plus D E æquabitur o, harum differentia E F est ipsa coefficiens longitudo. Hinc addiscimus differentiam duarum radicũ, quarum vna est vera, altera falsa in æquatione, de qua loquimur, esse coefficientem longitudinem, atque cognita radice vera, D F per subtractionem coefficientis longitudinis E F fieri cognitam radicem falsam D E, & cognita falsa radice D E per additionem eiusdem coefficientis, fieri cognitam radicem veram D F, & comparationis homogeneum, puta rectangulum F D E, fieri quidem ex radice vera D F in falsam D E, quamobrem si D F, fuerit a itemque b, & D E fuerit c, comparationis homo-

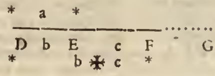
homogeneum, nempe rectangulum F D E est b c, est autem a — b æqualis o, cum a, æquetur b, & E F est b — c, proinde fiet æquatio $a^2 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a = b\,c$, quod si placet fieri comparationem inter positiuum, & negatiuum erit $a^2 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a - b\,c = o$.

Hic aduerte cum b, sit maior, quàm c, per additionem ✱ c ad — b fieri æquationem negatiuam.

Superest ad extremum æquatio, in qua homogeneum sub latere dataque coefficiente longitudine afficitur multa quadrati, cuius constitutio hæc est. *Æquationis amphibolæ cõstitutio apud Auctorem.*

Bifariam institui potest hypothesis, vel protracta D F, in G, itaut F G, sit æqualis D E, & hæc dicatur a at F G, dicatur b, vel supposito, quòd D E dicatur a, & eadem dicatur b, quia tamen in secunda hypothesi adhuc a — b æqnatur o, non minus quàm in prima, & eadem currit demonstratio, vt in prima huius licuit aduertere; propterea secundam hypothesin amplectemur, ergo.

D E, est a, itemq; b, & foret etiam b, ipsa F G; E F, est c. D F est b ✱ c.



Sit recta D F, vtcunque secta in E; Manifestum est rectangulum F D E minus quadrato D E æquari rectangulo D E F; quare ablato quadrato ipsius D E, ex rectangulo F D E, remanebit rectangulum D E F est igitur rectangulum F D E, minus quadrato ipsius D E, æquale rectangulo D E F. Si itaque D E, sit radix, erit D F, coefficiens sublateralis longitudo; cùm itaque rectangulum F D E, nempe homogeneum sub latere, & coefficiente longitudine, minus quadrato ipsius D E, scilicet radicis æquale sit rectangulo D E F, erit rectangulum D E F, homogeneum datæ mensuræ. Itaque D E, erit radix vna; cui cum æqualis sit b, imo est eadem, erit D E, minus D E, æqualis o nempe nihilo, vnde D E, erit radix vera, & quia idem contingit de E F; proinde, E F, erit altera radix vera, quarum aggregatum est D F; Hinc addiscimus aggregatum duarum radicum, quarum vtraque est vera in æquatione de qua loquimur, esse coefficientem longitudinem, atque cognita radice vna, fieri cognitam alteram per subtractionem ipsius à coefficiente longitudine, & contra altera, &c. & comparationis homogeneum puta rectangulum D E F, fieri quidem ex radice D E, in E F; quamobrem si D E fuerit b atque D E fuerit c, comparationis homogeneum, nempe rectangulum D E F, erit b c; est autem a — b æqualis o; cùm a, æquetur b, imo sit eadem, & D F, erit b ✱ c proinde fiet æquatio $\begin{smallmatrix}+b\\+c\end{smallmatrix} a - a^2 = b\,c$ seu facta comparatione inter positiuum, & negatiuum; erit $a^2 \begin{smallmatrix}-b\\-c\end{smallmatrix} a$ ✱ $b\,c = o$.

Cubicarum æquationum, in quibus affectiones existunt sub latere natura, atque constitutio ex Zeteticis aperitur.

Hactenus explicuimus constitutionem æquationum quadraticarum, nunc proximum est, vt æquationum cubicarum naturam explicemus, earum nimirum in quibus affectiones existunt sub latere, harum autem natura tum ex Zeteticis, cùm etiam alijs modis innotescit; primò de constitutiuis ex Zeteticis verba faciemus. *Æquationum cubicarum constitutio ex Zeteticis.*

Et sit æquatio a^3 ✱ $b^2 a = b^2 d$. Sunt quatuor quantitates proportionales, quarum prima, maior, vel minor inter extremas est b, & aggregatum ex secunda, & quarta est d, sit autem a, secunda, quod cum Vieta ex Zetetico deprehendemus. Inferiùs tamen in scholio demonstrationem intueberis. *Proponitur æquatio cataphatica.*

Data prima, & aggregato ex secunda, & quarta in serie quatuor continuè proportionalium, secundam reperire. *Zeteticum.*

Secunda esto a; ob id quarta erit d — a, at verò cubus è secunda æquatur solido sub quadrato primæ, & quartæ. Sunt enim proportionales termini hi hoc modo, vt quadratum primæ ad quadratum secundæ ita secunda ad quartam; proinde ducatur b^2, nempe quadratum primæ in d — a, quartam, & fiet solidum, $b^2 d - b^2 a$, atque adeo, vt dicebamus cubus è secunda, nempe a^3, æquabitur $b^2 d - b^2 a$,

& per

& per antithesin fiet æquatio huiusmodi $a^3 + b^2 a = b^2 d$. Hoc autem priùs ordinabatur. Numeris hæc eadem hunc in modum poterunt explicari.

Sit æquatio 1 C + 25 R = 1250. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima maior inter extremas est ℞ 25, hoc est 5; & aggregatum ex secunda, & quarta est $\frac{1250}{25}$ hoc est 50, & fit 1 R secunda ex serie quatuor continuè proportionalium 5, 10, 20, 40. Et ita quidem est; nam si radix est 10, cubus est 1000; cui si addideris 250, pretium nimirum radicum, fiet 1250, comparationis homogeneum.

Si sit æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima minor inter extremas, est b, & differentia inter secundam, & quartam est d, & fit a, secunda ex Zetetico.

Zeteticum.

Data prima inter extremas, & differentia inter secundam, & quartam in serie quatuor continuè proportionalium, reperire secundam.

Data sit b, prima inter extremas, & differentia inter secundam, & quartã sit d; oporteat reperire secundam. Secunda esto a: ergo quarta erit $a + d$; & quia solido facto sub primæ quadrato, & quarta, æqualis est cubus ex secunda; proinde si ducamus b^2, nempe quadratum primæ in $a + d$ nimirum quartam, fiet solidum $b^2 a + b^2 d$, cui æquabitur cubux ex secunda, nempe a^3; & per antithesin fiet æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$; quod prius ordinabatur. Numeris autem hunc in modum.

Numeris explicatur superior æquatio.

Sit ęquatio 1 C — 25 R = 750; sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima est ℞ 25, idest 5; differentia verò inter secundam, & quartam est $\frac{750}{25}$ hoc est 30; & fiet 1 R secunda ex serie quatuor continuè proportionalium, 5, 10, 20, 40.

Sit æquatio $b^2 a - a^3 = b^2 d$; Sunt quatuor quantitates continuè proportionales, quarum prima maior inter extremas est b, differentia verò inter secundam, & quartam est d, & fit a, secuuda ex Zetetico.

Zeteticum.

Data prima maiors inter extremas, & differentia inter secundam, & quartam in serie quatuor continuè proportionalium, reperire secundam.

Prima maior inter extremas esto b; differeatia verò inter secundam, & quartam data sit d; oporteat reperire secundam; ipsa autem secunda sit a; ergo quarta erit $a - d$, & quia cubus è secunda æqualis est solido facto sub quadrato primę, & quarta, nimirum quadratum primæ in $a - d$, nempe quartam fit solidum $b^2 a - b^2 d$, cui ęquabitur cubus è secuda, nempe a^3, & per antithesin fiet æquatio $b^2 a - a^3 = b^2 d$ numeris autem hoc modo.

Numeris explicatur superior æquatio.

Sit æquatio 256 R — 1 C = 1535, sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima est ℞ 256 id est 16 differentia verò inter secundam, & quartam est $\frac{1536}{256}$ id est 6, & fit 1 R secunda ex serie quatuor continuè proportionalium 16, 8, 4, 2, ipsa autem secunda duplex esse potest, siquidem hæc ęquatio duplicem habet radicem ob suam, qua laborat, ἀμφιβολίαν.

Notanda quædam.

Cæterum animaduertendum, quoniam data est maior inter extremas quæsita verò est minor; ob id secunda, minus differentia. æqualis est quæsitæ. Secùs verò si data fuisset minor, & maior in quęstione foret. Tunc enim minor plus differentia æquaretur quartæ.

S C H O L I O N.

Hactenus tradita magis explicatur.

HActenus dicta circa æqualitatum quadraticarum constitutionem ex Zeteticis, eo constant, quia in serie trium proportionalium laterum, factum sub extremis, æquale est quadrato medij, vt ex Elementis constat.

At cubicarum æquationum constitutio itidem ex Zeteticis, ex eo planè colligitur, quòd in serie quatuor proportionalium laterum, cubus è secundo æqualis est solido à quadrato primi in quartum, quod primo Analyticè, deinde Geometricè demonstrabimus Ideo esto.

THEO-

THEO*rema paulo post ostendendum.*

Hic aduertenda quædam.

Cæterum cùm habetur sermo de quatuor continuè proportionalibus particulam *continuè* aliquando neglectam, subintelligendam volumus; vt cùm opus est exprimere num minor, vel maior sit prima inter extremas, subaudienda particula est *minor*, vel *maior* prout res ipsa postulat, &si aliquando vel emanuensis, vel Typographi incuria fuerit omissa.

Alexander Andersonus allucinatus est existimans æquationes esse solidas, eo quod in ijs solida comparentur ad inuicem. Explicatur solidarum æquationum natura.

Hic non prætereo, quendam alioquin in rebus Mathematicis haud mediocriter versatum, allucinatum fuisse, existimans esse solidas æquationes, in quibus solida æquantur solidis, vnde si foret b $a^2 =$ z solido, non ob id solida dicenda est æquatio, quamuis solido, solidum sit æquale; est enim instituendus parabolismus, omnia scilicet applicando ad b, magnitudinem, vt proueniat ordinata æquatio $a^2 = \frac{z\ solido}{b}$. Ita si b $a^2 +$ d plano a, æquetur z solido, solida æquatio non est, cùm omnia debeant applicari ad b, vt fiat æquatio $a^2 + \frac{d\ pl.}{b}\ a = \frac{z\ solido}{b}$, & ita de consimilibus, quæ planæ sui natura dicendæ sunt, quamuis solidæ per ascensum dici possint; siquidem plana in æquationibus ritè ordinatis ad solida ascendunt planorum eorundem ductu in longitudinem b, vel aliam consimilem, prout æquatio fuerit speciebus instituta. Solidæ verò dici non possunt cùm æquationes à potestate nomenclaturam sortiantur, at in huiusmodi æquationibus, altior potestas, non ascendit ad tres dimensiones, quod ad solidum requiritur, & quamuis inter solida fiat comparatio, nihil refert, id enim prouenit, quia non dum ipsæ ritè sunt ordinatæ secundum Artis præcepta instituendus enim superest parabolismus, vt altior gradus potestatis nomen sibi vendicet, & ex ea æquatio subsistat, quod accidit, cùm per eum, qui parabolismus instituitur, altior potestas emergit, vt itaque solidæ dici mereantur æquationes, oportet, vt in ijs altior potestas, trium sit dimensionum, vnde cubum esse necesse est, reliqua verò homogenea naturam eiusdem consequuntur. Hæc innuisse non aliendum duximus ab instituto, cùm de æquationum natura dissseratur. Illud insuper se se offert considerandum, nempe cubicarum æquationum, naturam, atque constitutionem ex alijs quoque Zeteticis indagari. Vnde

Alia quoque Zetetica sunt è quibus depromitur cubicarum æquationum natura. Proponitur æquatio cubica affirmatiua.

Si sit $a^3 + b^2 a = b^2 d$. Sunt duo latera, quorum vnum est indiuisum; nempe b; alterum autem d, in duo sagmenta diuisum, vt quadratum ipsius b, ad quadratum vnius segmenti rationem habeat, quam prædictum segmentum ad aliud segmentum eiusdem, sit autem a, primum segmentum ex Zetetico.

Zeteticum.

Datis duobus lateribus, vnum eorum ita diuidere, vt quadratum indiuisi, ad quadratum è segmento diuisi eam habeat rationem, quam segmentum idem, ad segmentum reliquum.

Data sint latera b, & d oporteat &c. Segmentum vnum esto a, alterum erit d — a, vt autem est b^2 ad a^2, ita debet esse a, ad d — a, & multiplicatis extremis, ac medijs proueniet æquatio $a^3 = b^2 d - b^2 a$, & per antithesin fiet $a^3 + b^2 a = b^2 d$.

Proponitur æquatio cubica negatiua.

Sit æquatio $a^3 - b^2 a = b^2 d$. Duo sunt latera, quorum vnum b, alterum d, augendum cremento, vt quadratum illius ad quadratum crementi rationem habeat, quam crementum, ad latus cremento adauctum, sit autem a, crementum ex Zetetico.

Zeteticum.

Datis duobus lateribus, vnum eorum ita augere, vt quadratum alterius ad quadratum crementi, rationem habeat, quam crementum ipsum, ad latus cremento adauctum.

Latera sint b, & d, oporteat &c. Lateri d, fieri debeat additio, cremento, quod dicatur a, ergo adauctum erit d + a, vt autem est b^2 ad a^2 ita debet esse a ad d + a multiplicatis extremis, & medijs fiet æquatio $a^3 = b^2 d + b^2 a$, & per antithesin fiet $a^3 - b^2 a = b^2 d$.

Proponitur æquatio cubica amphibola.

Sit æquatio $b^2 a - a^3 = b^2 d$. Duo sunt latera, quorum vnum b, alterum d, minuendum de alio; ad cuius quadratum, quod fit ex priori quadratum, rationem habet, vt idem latus ad residuum, sit autem a, illud quod minutionem patitur ex Zetetico.

Zeteticum.

Datis duobus lateribus vnum eorum ex alio quodam auferre, vt quadratum prioris ad huiusmodi lateris quadratum rationem habeat, quam idem latus ad residuum.

Latus vnum, sit, b, alterum auferendum d, oporteat &c. Quæsitum latus esto a, ergo residuum erit a — d, vt autem b^2 ad a^2, ita debet esse a, ad a — d multiplicatis extremis, & medijs, fiet $a^3 = b^2 a - b^2 d$, & per antithesin fiet $a^3 + b^2 d = b^2 a$, & rursus fiet $a^3 - b^2 a = b^2 d$.

THEOREMA.

SI sint quatuor latera continuè proportionalia: cubus à secundo æqualis est solido facto à quadrato primi in quartum.

Analyticè.

SIt a, primum in serie quatuor continuè proportionalium, secundum esto b; erit ob id $\frac{b^2}{a}$ tertium, vt patet, ex huius Artis Elementis; si enim b ducatur in se quadraticè fit b^2 quo applicato ad a; primum, fit $\frac{b^2}{a}$; deinde si $\frac{b^2}{a}$ ducatur in se quadraticè, fit $\frac{b^4}{a^2}$ quo applicato ad b, secundum, fit $\frac{b^4}{a^2 b}$; ergo quartum erit $\frac{b^4}{a^2 b}$ sunt igitur quatuor latera continuè proportionalia a, b, $\frac{b^2}{a}$, $\frac{b^4}{a^2 b}$. Ducatur a, primum in se, & fit a^2 quo ducto in quartum $\frac{b^4}{a^2 b}$, fit productum $\frac{a^2 b^4}{a^2 b}$. Hoc autem æquatur b^3, vt patet ex diuisionis præceptis. Nam si diuidatur $a^2 b^4$ per $a^2 b$, prouenit b^3, quod multiplicatione comprobatur, si enim $a^2 b$ ducatur in b^3 fit $a^2 b^4$, vt constat.

Geometricè.

SInt quatuor latera continuè droportionalia A, B, C, D. Dico cubum ex secundo B, æqualem esse solido facto à quadrato, ex A primo in quartum D. Quoniam enim iam dicta latera sunt continuè proportionalia, ergo, & eorum quadrata continuè proportionalia erunt. Itaque, vt est quadratum ex A, ad quadratum ex B, ita erit quadratum ex B, ad quadratum ex C, & vt est quadratum ex B, ad quadratum ex C, ita quadratum ex C, ad quadratum ex D, sed, vt quadratum ex C, ad quadratum ex D, vt patet ex Elemẽtis ita est B ad D, ergo erit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt B ad D; atque adeo factum sub extremis nempe factum sub quadrato ex A, & latere D æquale erit facto sub medijs, nempe sub quadrato ex B, & eodem latere B, sed factum sub quadrato ex B, & eodem latere B, est cubus eiusdem B, & factum sub quadrato ex A, & latere D, est solidum, sub quadrato primi lateris comprehenso, & latere quarto; ergo si fuerint quatuor latera continuè proportionalia; cubus è secundo æqualis est solido à quadrato primi, in quartum. Quod erat ostendendum.



A B C D

Numeris supradicta declarantur.

Hæc facilè numeris declarantur, nam si sint quatuor numeri continuè proportionales, vt 8, 12, 18, 27, si multiplicemus 64 quadratum ex 8, per 27 numerum quartum, reperiemus, fieri numerum 1728, quantum sanè facit secundus numerus 12, si cubicè multiplicetur.

Cùm itaque sit prima b, in æquatione illa a^3 ✱ $b^2 a$ ⊐ $b^2 d$, secunda verò a aggregatum autem ex secunda, & quarta sit d, certè ipsa quarta erit d — a, & ex antea dictis cubus è secunda, vt a^3 æquabitur solido, à quadrato primę b, in quartam d — a; quadratum ex b est b^2 solidum verò iam dictum erit $b^2 d - b^2 a$, huic autem æquabitur a^3; ob id per antithesin fiet a^3 ✱ $b^2 a$ ⊐ $b^2 d$.

Proponitur alia cubicarum æquationum constitutio ex Zeteticis; singularis tamen est, &c.

Alia quoque est cubicarum æquationum constitutio, ex Zeteticis, earum scilicet, in quibus affectio est sub latere; siquidem æquatio fuerit *καταφατικὴ*, & *αποφατικὴ*; singularis tamen est, cùm videlicet quadruplus cubus à triente coefficientis plani, cedit quadrato solidi datæ mensuræ, hoc est comparationis homogenei Vnde.

Si fuerit æquatio $a^3 + 3$ b pl. a $=$ d sol. Tunc b planum, est quod fit sub lateribus, à quibus, qui fiunt cubi differunt per d solidum, fit autem a, differentia laterum, quod ex Zetetico deprehenditur.

Æquatio in qua cubus afficitur adiunctione solidi sub latere dato que coefficiente plano.

Data differentia cuborum, & rectangulo sub lateribus, differentiam laterum reperire.

Zeteticum.

Vides igitur quæ sint huius æquationis constitutiua, & quo pacto se habeat eius constitutio, quod si numeris placeat explicare Si 1 c + 6 R æquatur 7 erit $\frac{6}{3}$ hoc est 2 rectangulum sub lateribus, quorum cubi differunt per 7, & fit 1 R laterum differentia 1, suppositis lateribus 1, & 2. Vel si 1 c + 36 R æquatur 208, erit $\frac{36}{3}$ hoc est 12 rectangulum sub lateribus, quorum cubi differunt per 208, & fit 1 R laterum differentia 4, suppositis lateribus 2, & 6, & quidem cubus ex 2, est 8, at ex 6 est 216, quorum differentia est 208, at si 4, differentia laterum 2, & 6, cubicè multiplicetur, producitur 64, cui addito 144 producto ex 36, plano coefficiente in 4, radicis pretium, fit summa 208, æqualis comparationis homogeneo.

Numeri. exempla explicantur.

Si $a^3 - 3$ b plano a, æquetur d solido. At verò d, solidi quadratum præstet quadruplo b plani cubo; est b planum, rectangulum sub lateribus, quorum cubi componunt d solidum, & fit a, aggregatum laterum, quod Vieta ex Zetetico deprehendit.

Æquatio in qua cubus afficitur multa solidi sub latere, dato que coefficiente plano.

Dato rectangulo sub lateribus, & aggregato cuborum, inuenire latera.

Zeteticum.

Hæc inferiùs ostendentur. Numeris autem hoc modo.

Si 1 C $-$ 6 R æquetur 9 est $\frac{6}{3}$ hoc est 2, rectangulum sub lateribus, quorum cubi aggregati faciunt 9, & fit 1 R aggregatum laterum ex hypothesi quod latera sint 1, 2. Vel

Numeris tradita explicantur.

Si 1 C $-$ 36 R æquetur 224; est quidem $\frac{36}{3}$ hoc est 12, rectangulum sub lateribus, quorum cubi simul additi, faciunt 224; fitque 1 R, 8, laterum aggregatum, suppositis lateribus 2, & 6.

Si $a^3 + 3$ b plano a, æquetur b plano d, sunt quatuor lineæ proportionales, sub quarum medijs, vel extremis fit b planum, differentia verò extremarum est d, & fit a differentia mediarum, quod Vieta desumpsit ex Zetetico.

Æquatio in qua cubus afficitur itidem adiunctione solidi sub latere, &c.

Data differentia extremarum, & rectangulo sub medijs, vel extremis in serie quatuor continuè proportionalium, mediarum differentiam reperire.

Zeteticum.

Hæc inferiùs constabunt. Numeris autem hoc modo.

Si 1 C + 24 R, æquetur 56, sunt quatuor continuè proportionales, sub quarum medijs, vel extremis, quod fit planum, æquale est $\frac{24}{3}$ hoc est 8, differẽtia verò extremarum est $\frac{56}{8}$ id est 7, & fit 1 R differentia mediarum ex serie continuè proportionalium 1, 2, 4, 8. Vel

Explicatio per numeros.

Si 1 C + 81 R æquetur 702, sunt quatuor continuè proportionales sub quarum medijs, vel extremis, quod fit planum est, æquale $\frac{81}{3}$ hoc est 27, differentia verò extremarum est $\frac{702}{27}$ hoc est 26, & fit 1 R differentia mediarum ex serie concontinuè proportionalium 1, 3, 9, 27.

Si $a^3 - 3$ b pl. a æquetur b plano d. Sit verò d semissis quadratum maius b, plano. Sunt quatuor proportionales lineæ rectæ sub quarum medijs, vel extremis fit b planum, aggregatum autem extremarum est d, fit verò a, aggregatum mediarum; hoc autem Vieta deduxit ex Zetetico.

Æquatio in qua itidem cubus afficitur multa solidi sub latere, &c.

Dato aggregato extremarum, & rectangulo sub medijs, vel extremis in serie quatuor continuè proportionalium, mediarum aggregatum adinuenire.

Zeteticum.

Hæc inferiùs perspicua fient Numeris autem hæc modo.

Si 1 C $-$ 24 R æquætur 72. Sunt quatuor continuè proportionales sub quarum medijs, vel extremis, planum quod fit æquatur $\frac{24}{3}$ hac est 8. Aggregatum extremarum est $\frac{72}{8}$ hoc est 9, & fit 1 R aggregatum mediarum ex serie quatuor continuè proportionalium, 1, 2, 4, 8. Vel

Explicatio per numeros.

Si 1 C $-$ 81 R æquetur 756, sunt quatuor continuè proportionales sub quarum medijs, vel extremis, planum quod fit æquatur $\frac{81}{3}$ hoc est 27, aggregatum extremarum est $\frac{756}{27}$ hoc est 28, & fit 1 R aggregatum mediarum ex serie quatuor continuè proportionalium 1, 3, 9, 27.

SCHOLION.

Proponitur, quod ostendendum superest.

Illud est ostendendum, Si $a^2 + 3\, b$ plano a æquetur d solido; esse b planum, quod sit sub lateribus, à quibus, qui fiunt cubi differunt per d solidum; sitque a differentia laterum, in cuius gratiam esto.

THEOREMA.

Cubus differentiæ laterum, plus solido à triplo rectangulo sub ijsdem lateribus, atque differentia eorundem, æqualis est differentiæ cuborum ab ipsis.

Analyticè.

Latus vnum esto a, & quidem maius, alterum verò b, nempè minus, horum differentia est $a - b$, huius cubus est $a^3 - 3\, b\, a^2 + 3\, b^2\, a - b^3$, huic si addatur $3\, b\, a^2 - 3\, b^2\, a$, solidum, nempe factum per multiplicationem differentię laterum, scilicet $a - b$ in triplum rectangulum sub lateribus, nimirum $3\, b\, a$, fiet $a^3 - b^3$. Huius autem generis sunt æquationes istę $1\, c + 48\, R = 504$, cuius radicis pretium est 6; altera erit $1\, c + 72\, R = 1720$, cuius radicis valor est 10; Prioris quidem radix erat 6, differentia laterum, quæ nimirum supponebantur 2, & 8; posterioris est 10, ex hypothesi, quòd latera sint, 2, & 12.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline - b\, a + b^2 \\ a^2 - b\, a \quad \\ \hline a^2 - 2\, b\, a + b^2 \\ a - b \\ \hline - b\, a^2 + 2\, b^2\, a - b^3 \\ a^3 - 2\, b\, a^2 + b^2\, a \quad\quad\quad \\ \hline a^3 - 3\, b\, a^2 + 3\, b^2\, a - b^3 \\ 3\, b\, a^2 - 3\, b^2\, a \quad\quad \\ \hline a^3 - b^3 \quad\quad \end{array}$$

Geometricè.

Hoc autem Geometricè facilè est ex Elementis ostendere.

$$\begin{array}{r} a - b \\ 3\, b\, a \\ \hline 3\, b\, a^2 - 3\, b^2 a \\ 3\, b\, a^2 - 3\, b^2 a \end{array}$$

Cùm verò diceremus; si $a^2 - 3\, b$ plano a æquetur d solido, dummodo tamen d solidi quadratum præstet quadruplo b plani cubo, hoc est quadratum solidi datæ mensuræ præstet quadruplo cubo à triente coefficientis plani, esse quidem b planum rectangulum sub lateribus à quibus, qui fiunt cubi, componunt d solidum, sitque a, laterum aggregatum. Id verò constat; in cuius gratiam esto, quod sequitur Theorema.

Aduertenda quædam.

Illud autem est animaduertendum scilicet in huiusmodi demonstrationibus, a nobis veritatem spectari, non autem attendi symbola, siue species, quibus magnitudines designantur, quæ scilicet, apprimè respondeant ijs quas in Zeteticis adhibuimus, hoc enim puerile duximus; vnde si ibi, in serie quatuor cōtinuè proportionaliū primum lacum obtineat b, secundum verò a, hic non idem attendimus, cùm ad rem non faciat, sed naturali ordine procedentes, primum locum a, secundum verò b, concedimus, quod aduertisse iuat., etiam in gratiam eorum, quæ deinceps futura sunt.

THEOREMA.

Cvbus aggregati laterum, minus solido facto à triplo rectangulo sub lateribus in aggregatum laterum, æqualis est aggregato cuborum ab ijsdem lateribus. Analyticè.

Latus vnum esto a, aliud verò sit b, laterum aggregatum est $a + b$, cuius cubus est $a^3 + 3\,ba^2 + 3\,b^2a + b^3$, solidum autem factum à triplo rectangulo sub lateribus in laterum aggregatum est $3\,b\,a^2 + 3\,b^2a$, quo dempto ex cubo iam dicto, remanet $a^3 + b^3$. Huius generis æquatio est illa $1c - 48R = 520$; cuius radix est 10; ex hypothesi laterum 2, & 8, à quibus cubi additi conficiunt 520.

$$\begin{array}{c} a + b \\ 3ba \\ \hline 3ba^2 + 3b^2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline ba + b^2 \\ a^2 + ba \\ \hline a^2 + 2ba + b^2 \\ a + b \\ \hline + ba^2 + 2b^2a + b^3 \\ a^3 + 2ba^2 + b^2a \\ \hline a^3 + 3ba^2 + 3b^2a + b^3 \\ 3ba^2 + 3b^2a \\ \hline a^3 + b^3 \end{array}$$

HÆc autem Geometricè nullo labore ex Elementis ostendi possunt. Geometricè.

Deinde, ad illam æquationem, quod attinet cum diceremus si $a^3 + 3\,b$ pl. a æquetur b plano d, esse quatuor cõtinuè proportionales magnitudines, sub quarũ medijs, vel extremis fieri b planum, differentiam extremarum esse d, fierique a, mediarum differentiam, constat ex eo, quod mox sequitur.

THEOREMA.

Si sint quatuor latera continuè proportionalia, cubus à differentia mediorum, plus solido facto ex triplo rectangulo sub medijs, vel extremis, & eadem differentia mediorum æqualis est solido, à rectangulo simplo prædicto in differentiam extremorum.

Analyticè. ostenditur Theorema.

Sunto latera continuè proportionalia a, b, $\frac{b^2}{a}$; $\frac{b^4}{ba^2}$ differentia mediorum est $b - \frac{b^2}{a}$ huius cubus est $b^3 - 3\frac{b^4}{a} + 3\frac{b^5}{a^2} - \frac{b^6}{a^3}$. At verò rectangulum sub medijs est $\frac{b^3}{a}$, cuius triplum est $3\frac{b^3}{a}$ quo ducto in $b - \frac{b^2}{a}$ differentiam mediorum laterum, producitur $3\frac{b^4}{a} - 3\frac{b^5}{a^2}$ quo addito ad cubum iam dictum, fit $b^3 - \frac{b^6}{a^3}$. Hoc idem autem euenit, si multiplicetur $\frac{b^3}{a}$, rectangulum sub medijs, per $a - \frac{b^4}{ba^2}$; differẽtiã extremorũ, & prouenit $\frac{b^3a}{a} - \frac{b^7}{ba^3}$ hoc est $b^3 - \frac{b^6}{a^3}$. Cæterum supposuimus a, maius esse extremum ex quatuor lateribus proportionalibus, proinde b, maius est quàm $\frac{b^2}{a}$, quamobrem differentia mediorum laterum est $b - \frac{b^2}{a}$ quemadmodum differentia extremorum est $a - \frac{b^4}{ba^2}$. Id autem eueniet, eodemque modo demonstrabitur si supponamus a, extremum minus.

$$\begin{array}{r} b - \frac{b^2}{a} \\ b - \frac{b^2}{a} \\ \hline - \frac{b^3}{a} + \frac{b^4}{a^2} \\ b^2 - \frac{b^3}{a} \\ \hline b^2 - 2\frac{b^3}{a} + \frac{b^4}{a^2} \\ b - \frac{b^2}{a} \\ \hline - \frac{b^4}{a} + 2\frac{b^5}{a^2} - \frac{b^6}{a^3} \\ b^3 - 2\frac{b^4}{a} + \frac{b^5}{a^2} \\ \hline b^3 - 3\frac{b^4}{a} + 3\frac{b^5}{a^2} - \frac{b^6}{a^3} \\ 3\frac{b^4}{a} - 3\frac{b^5}{a^2} \\ \hline b^3 - \frac{b^6}{a^3} \end{array}$$

Quod attinet ad constitutionem æquationum cubicarum in quibus affectiones existũt sub quadrato, quid oporteat ostendere, inferiùs dicemus.

Si

Æquationum cubicarum coſtitutio proponitur indagãda.

Si indaganda ſit cubicarum æqnationum conſtitutio hæc non vna eſt, quia non vna æquatio cubica, alia enim eſt in qua affectio exiſtit ſub latere, alia in qua affectio exiſtit ſub quadrato, alia denique in quaduobus prædictis modis affectio contingit, nempe ſub latere, & per τὴν ευκασίαν τῶν ομοιων cum neoterico, aliam deinde quam nos excogitauimus longè ſimpliciorem allaturi, vt in quadraticis, haud infel iciter credimus præſtitiſſe.

Ad primum æquationis genus, quod attinet, in quo affectio eſt ſub latere tantum.

Proponitur æquatio cũ qua inſtituenda eſt cõparatio.

Si fuerit æquatio $a^3 * + d^2 a - g^3 = 0$. Huius igitur conſtitutio ſuperiori modo ſic ſe habet. Sint duæ ęquationes $a^2 + b a + c^2 = 0$, & $a - b = 0$ multiplicatis inter ſe, fiet $a^3 \begin{smallmatrix} -b^2 \\ +c^2 \end{smallmatrix} a - b c^2 = 0$. Ex hypotheſi verò quod c^2 præſtet b^2 hæc erit natura perſimilis ſuperiori; facta itaque collatione terminorum, qui tertio ſunt loco habiti, erit $c^2 - b^2$, æquale d^2; quare ſi vera radix b cognoſcitur, conſtat c^2 æquale fore $d^2 + b^2$, quo ſubſtituto in locum ipſius c^2, cum prius eſſet $a^2 + b a + c^2 = 0$ erit vtique $a^2 + b a + d^2 + b^2 = 0$. Hæc autem æquatio ad duas reliquas radices reſpicit cum vera radice b, concurrens ad efformandam propoſitam æquationem, Vltimis verò terminis inuicem collatis fiet $g^3 = b c^2$, quare c^2 æquabiur $\frac{g^3}{b}$; atque cognita vera radice b, æquationem hanc $a^2 + b a + \frac{g^3}{b} = 0$ ad duas quoque reliquas radices reſpicere, atque cum vera b, concurrere ad efformandam æquationem propoſitam fit manifeſtum.

Æquatio, cuius conſtitutio per comparationem inſpicitur.

Si verò fuerit æquatio $a^3 * - d^2 a - g^3 = 0$; eius conſtitutio ita ſe habet, ſint duæ æquationes $a^2 + b a + c^2 = 0$, & $a - b = 0$, multiplicatis adinuicem producitur æquatio $a^3 \begin{smallmatrix} -b^2 \\ +c^2 \end{smallmatrix} a - b c^2 = 0$. Ex hypotheſi autem, quod b^2, præſtet c^2, erit hæc natura perſimilis ſuperiori propoſitæ æquationi. Facta igitur mutua iſtarum duarum æquationum comparatione, collatiſque terminis vtriuſque tertio loco habitis, erit $b^2 - c^2 = d^2$. Vnde deprehenditur c^2 eſſe æquale $b^2 - d^2$, quo ſubſtituto in locum ipſius c^2, cum priùs eſſet $a^2 + b a + c^2 = 0$ erit vtique $a^2 + b a + b^2 - d^2 = 0$. Hæc autem æquatio ad duas reliquas radices reſpicit cum vera b, concurrens ad efformandam propoſitam æquationem. Vltimis verò terminis inuicem collatis, fiet $g^3 = b c^2$ quare c^2 æquabitur $\frac{g^3}{b}$; cognita autem vera radice b æquationem hanc $a^2 + b a + \frac{g^3}{b} = 0$ ad duas reliquas radices reſpicere fit manifeſtum.

Proponitur æquatio cum qua inſtituenda eſt comparatio.

Si fuerit æquatio $a^3 * - d^2 a + g^3 = 0$, eius conſtitutio ſic ſe habet; fiant duæ æquationes $a^2 + b a - c^2 = 0$, & $a - b = 0$, multiplicentur inter ſe, vt fiat $a^3 \begin{smallmatrix} -b^2 \\ -c^2 \end{smallmatrix} a + b c^2 = 0$. Hęc natura perſimilis eſt priori; facta igitur mutua earum comparatione, collatiſque terminis vtriuſque tertio loco poſitis, habebimus $b^2 + c^2 = d^2$, vnde fit manifeſtum c^2 æquale eſſe $d^2 - b^2$, atque cognita vera radice b; hanc æquationem $a^2 + b a + b^2 - d^2 = 0$, ad duas reliquas radices reſpicere. Vltimis verò terminis adinuicem collatis, habebimus $g^3 = b c^2$, atque adeo $c^2 = \frac{g^3}{b}$ quamobrem cognita vera radice b; fit manifeſtum hanc æquationem $a^2 + b a - \frac{g^3}{b} = 0$, à duabus reliquis radicibus concerni.

Summa ſupra dictorum.

Et hæc eſt apud nonnullos ſupradictarum æquationum conſtitutionis ratio.

Supradictarũ æquationum apud Auctorem conſtitutio.

Mihi prædictarum æquationum cubicarum longè aliter, & quidem per ſimpliciora procedens eſt conſtitutio per διαίρεσιν τῆς γραμμῆς ὀρθῆς.

Solidarum æquationum principia.

Sunt autem immediata ſolidi principia planum, & latus; cùm itaque nos inquiramus cubicarum æquationum conſtitutionem, atque adeo conſtitutiua; duo ſunt illa, quæ immediatè concurrunt, à nobis recognoſcenda primordia, at ſi recta diuidatur in partes, vtrumque fit obuium, illud multiplicatione partium, hoc verò diuiſione totius in partes.

Proponitur æquatio, cuius conſtitutio inquiritur.

Si fuerit æquatio in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub latere, datoque coefficiente plano.

Suppoſitio duplex, & hic ea proponitur quæ eſt amplẽda.

Sit recta quidem DF, vtcunque diuiſa in E, poteſt autem hypotheſis bifariam inſtitui, vel ſcilicet protracta DF, in G, itaut FG, ſit æqualis ipſi DE, & DF, dicatur a, atque FG, dicarur b. Quemadmodum ſuperiùs etiam dicebamus, cùm ageremus de huiuſmodi ratione indagandi æquationum primordia atque adeo naturam.

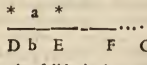
Vel ſupponendo DF, eſſe a, itemque b.

Quia

Quia tamen si supponatur eadem dici a; dicique b, adhuc $a - b$, æquabitur o, non minus quàm si b, foret distincta ab a, eadem verò currit demonstratio; propterea secundam amamplectemur hypothesin.

Sit ergo recta D F, secta vtcunque in E, Manifestum est cubum ex D E, adauctum solido a plano D E F, in latus D E, æquari solido à plano F D E, in D E, latus.

D E est a, itemque b, foret etiam b, ipsa F G, rectangulum F D E, est c planum; rectangulum D E F, est c plan. $- b^2$.



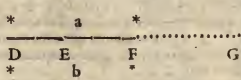
Si itaque D E, sit radix; erit planum D E F, coefficiens planum sublaterale; cum igitur cubus ex D E, plus solido à plano D E F, in D E, hoc est radicis cubus, plus homogeneo sub latere, & coefficiente plano, æqualis sit solido à plano F D E, in D E, latus, solidum à plano F D E, in D E, latus; erit homogeneum datæ mensuræ. Itaque D E, erit radix, cui cum æquetur ipsa D E, imo sit eadem, erit D E, minus D E, æqualis o, nempe nihilo, vnde D E, erit radix vera, at coefficiens sublaterale erit planum F D E, minus quadrato ex D E. Hinc addiscimus differentiam duorum planorum, quorum vnum est quadratum à radice vera, alterum autem planum proueniens ex applicatione homogenei datæ mensuræ ad eandem veram radicem, esse in ęquatione de qua loquimur, planum coefficiens sublaterale. Quamobrem si D E, fuerit a, itemque b, planum autem ortiuum iam dictum sit c planum; homogeneum datę mensurę erit solidum, nempe b c planum; est autem $a - b$ æqualis o; cùm a, æquetur b, & eadem quantas sit a, itemque b, planum ortiuum est c planum, si ex c plano, auferatur b^2, prouenit c planum $- b^2$; in quod si ducatur a, fit c planum $a - b^2 a$, quo addito ad a^3, nempe cubum eiusdem a, fiet $a^3 +$ c plano $a - b^2 a$, quod æquabitur solido à b in c planum, vnde oritur æquatio $a^3 {}^{-b^2}_{+c\,plan.} a = b$ c plano, quod si c planum intelligatur ad quadratum redactum fiet æquatio $a^3 {}^{-b^2}_{+c^2} a = b c^2$. At facta comparatione inter positiuum, & negatiuum erit $a^3 {}^{-b^2}_{+c^2} a - b c^2 = o$.

Huius æquationis radix vera est b, nempe lateralis, altera plana, falsa, vt $a^2 + b a + b^2$. Vnde sunt duæ æquationes vna vera altera impossibilis, a quarum mutuo ductu superior oritur æquatio; est autem æquatio vera $a - b = o$ at impossibilis est $a^2 + b a + c^2 = o$.

Si fuerit æquatio in qua cubus afficitur multa solidi sub latere, datoque coefficiente plano, mihi per διαρισω τῆς γραμμῆς ὀρθῆς constitutio sic se habet. *Proponitur æquationis negatiua constitutio ab Auctore itidem inuenta.*

Sit recta quidem D F, vtcunque diuisa in E potest autem hypothesis bifariam institui. Vel scilicet protracta D F, in G, itaut F G sit æqualis ipsi D F, vnde hęc dicatur a, illa verò b,. Vel supposito, quòd D F, sit a, eademque dicatur b; quia tamen in secunda hypothesi adhuc $a - b$; æquatur o; nempe nihilo, non minus, quàm in prima, & eadem currit demonstratio; propterea secundam hypothesin amplectemur, ergo recta D F, secta sit vtcunque in E; Manifestum est cubum ex D F, minus solido abs D F, in rectangulum D F E, ęquari solido abs D F, in rectangulum F D E.

D F, est a, itemque b, at etiam F G foret b, D F quadratum est b^2, & rectangulum F D E, est c pl. rectãgulum D F E est $b^2 -$ c pl.



Si itaque D F, sit radix, rectangulum D F E. erit planum coefficiens sublaterale; Cùm igitur cubus ex D F minus solido abs D F, in rectangulum D F E, hoc est minus homogeneo sub latere, & coefficiente plano, æqualis sit solido à, plano F D E, in D F, latus, solidum à plano F D E, in D F, latus erit homogeneum datæ mensurę. Itaque D F, erit radix; cui cùm ęquetur ipsa D F, imo sit eadem, erit D F, minus

D F,

D F, æqualis o; nempe nihilo. Vnde D F erit radix vera, at coefficiens sublaterale erit quadratum D F, minus rectangulo F D E. Hinc addiscimns differentiam duorum planorum, quorum vnum, nempe maius est quadratum veræ radicis; at minus est planum proueniens ex applicatione homogenei datę mensuræ ad ipsam veram radicem in æquatione de qua loquimur esse coefficiens planum sublaterale quamobrem si D F, fuerit a, itemque b; planum ortiuum iam dictum F D E, sit c planum, homogeneum datæ mensuræ erit solidum, nempe b c planum; est autem a — b æqualis o; cùm a, æquetur b; eadem quantitas est a, itemque b, planum ortiuum est c planum; si ex b^2 auferatur c planum, prouenit b^2 — c plano in quod si ducatur a, fit $b^2 a$ — c plano a, quo subtracto ex a^3, remanet $a^3 - b^2 a \dagger$ c pl. a; quod æquabitur solido abs b^2 in c planum, vnde oritur æquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\+c\,pl.\end{smallmatrix} a = b$ c plano, quod si c planum intelligatur redactum ad quadratum, fiet ęquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\+c^2\end{smallmatrix} a = b\,c^2$. Et facta comparatione inter positiuum, & negatiuum fiet $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\+c^2\end{smallmatrix} a - b\,c^2 = o$.

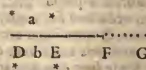
Huius æquationis radix vera est b, nempe lateralis, altera plana falsa, vt $a^2 \dagger b\,a \dagger c^2$. Vnde sunt duæ ęquationes, vna vera, altera impossibilis, è quarum mutuo ductu superior oritur æquatio, est autem æquatio vera a — b = o at impossibilis est $a^2 \dagger b\,a \dagger c^2 = o$.

Proponitur æquatio cubica Amphibola, cuius constitutio, & Auctoris sententia inquiritur.

Si fuerit æquatio in qua cubus negatur de homogeneo sub latere, datoque coefficiente plano, nobis hæc est constitutio per διαιρεσιν τῆς γραμμῆς ὀρθῆς.

Sit recta D F, vtcunque secta in E, potest autem hypothesis bifariam institui, vel scilicet protracta D F, in G, itaut F G, sit æqualis D E, vnde hæc dicatur a, illa verò b.; Vel supposito, quòd D E, sit a, eademque b; quia tamen in secunda hypothesi adhuc a — b, æquatur o, nempe nihilo, non minus quàm in prima, & eadem currit demonstratio, propterea secundam amplectemur hypothesin.

D E, est a, itemque b, vt F G, æqualis ipsi DE, foret b, & rectangulum D E F, est c planum, rectangulum verò F D E, est $b^2 \dagger$ c plano,



Sit ergo D F, vtcunque secta in E; Manifestum est solidum ex D F, in quadratum D E, minus cubo eiusdem D E, æquari solido abs D E, in rectangulum D E F; si itaque D E, sit radix, rectangulum F D E erit planum coefficiens sublaterale, cùm igitur solidum ex D E, in rectangulum F D E, minus cubo ipsius D E, æquale sit solido ab eadem DE, in rectangulum D E F, solidum ab ipsa D E, in rectangulum D E F, erit homogeneum datæ mensurę. Itaque D E, erit radix, cui cùm æquetur ipsa D E, imo sit eadem, erit D E, minus D E, æqualis o, nempe nihilo; quare D E, erit radix vera, & rectangulum F D E, coefficiens planum sublaterale. Hinc addiscimus planum proueniens ex applicatione homogenei datę mensuræ ad radicem, plus quadrato ex eadem vera radice esse, in æquatione de qua loquimur, coefficiens planum sublaterale; quamobrem, si D E, fuerit a, itemque b, planorum aggregatum iam dictum erit rectangulum F D E, scilicet b^2 ✠ c plano; homogeneum datæ mensurę erit solidum, nempe b, c planum; est autem a — b æqualis o; cùm a, æquetur b, & eadem quantitas est a, itemque b, planum ortiuum est c planum, si b^2 addatur c plano, prouenit b^2 ✠ c plano, in quod si ducatur a, fit $b^2 a$ ✠ c plano a, quo si auferatur a^3, remanebit $b^2 a$ ✠ c plano a — a^3, quod æquabitur solido abs b in c planum, vnde oritur æquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\-c\,pl.\end{smallmatrix} a = b$ c plano, quod si c planum intelligatur redactum ad quadratum erit $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\-c^2\end{smallmatrix} a = b\,c^2$, & facta comparatione inter positiuum, & negatiuum, fiet $a^3 \begin{smallmatrix}-b^2\\-c^2\end{smallmatrix} a - b\,c^2 = o$.

Huius æquationis radix vera est b; nempe lateralis, altera plana, videlicet a^2 ✠ b a — c^2. Vnde sunt duæ ęquationes, vna vera altera item possibilis, è quarum mutuo ductu superior oritur æquatio, est autem æquatio vera a — b = o at item possibilis est a^2 ✠ b a — c^2 = o.

[illegible] de [illegible] tionibus [illegible] affectis sub quadrato

Cubicarum æquationum in quibus affectiones existunt sub quadrato natura, atque constitutio ex Zeteticis, aperitur.

Hucu-

Quid deinceps agendum proponitur.

Hucuſque agentes de æquationibus cubicis, naturam, atque conſtitutionem explicuimus ex Zeteticis, alijſque modis; at verò earum tantummodo in quibus affectiones exiſtunt ſub latere, nunc idem prçſtabimus, in conſtitutione earum, in quibus affectiones exiſtunt ſub quadrato, & primò quidem ex Zeteticis, deinde alijs, modis prçſertim eo, quem nos adinuenimus.

Proponitur æquatio affirmatiua.

Si ſit æquatio $a^3 + b a^2$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima minor inter extremas eſt b; differentia verò inter ſecundam, & quartam, eſt d. Fit autem a, differentia inter primam, & tertiam, quod cum Vieta ex Zetetico cognoſcemus.

Zeteticum.

Data prima minore inter extremas, & differentia inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium, reperire differentiam inter primam, & tertiam.

Data ſit b; prima in ſerie quatuor continuè proportionalium, eademque minor inter extremas, differentia verò ſecundæ, & quartç ſit d, Oporteat reperire differentiam inter primam, & tertiam.

Explicatio.

Quæſita differentiam eſto a; ergo tertia erit $a + b$; eſt autem vt a, ad d, ita b ad $\frac{bd}{a}$; ergo $\frac{bd}{a}$ erit ipſa ſecunda, cùm ſit vt differentia primæ, & tertiæ ad differentiam ſecudæ, & quartç, ita prima, ad ſecundam, At verò rectangulum ſub prima, & tertia, æquale eſt quadrato ſecundæ; proinde $b a + b^2$ rectangulum ſub prima, & tertia, çquabitur $\frac{b^2 d^2}{a^2}$ nempe ſecundæ quadrato; omnia verò ducantur in a^2; & per b, diuidantur, & fiet æquatio $a^3 + b a^2 = b d^2$, quod priùs ordinabatur.

Numeris ſuperiora tractantur.

Sit æquatio $1 C + 2 Q = 288$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima minor inter extremas eſt 2; differentia verò inter ſecundam, & quartam eſt ℞ $\frac{288}{2}$ hoc eſt 12; & ſit 1 R differentia primæ, & tertiç, &c. ex ſerie proportionalium 2, 4, 8, 16.

Proponitur æquatio negatiua.

Si ſit æquatio $a^3 - b a^2 = b d^2$; Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima, maior, vel minor inter extremas eſt b, aggregatum verò ſecundç, & quartç eſt d, & ſit aggregatum primæ, & tertiç ex Zetetico.

Zeteticum.

Data prima, & aggregato ex ſecunda, & quarta in ſerie quatuor continuè proportionalium, reperire aggregatum primæ, & tertiæ.

Data ſit prima b, maior, vel minor inter extremas, aggregatum autem ex ſecunda, & quarta ſit d; in ſeriç quatuor continuè proportionalium Oporteat reperire aggregatum çx prima, & tertia.

Explicatio.

Huiuſmodi aggregatum ſit a, ergo tertia erit $a - b$; eſt autem, vt a ad d; ita b ad $\frac{bd}{a}$ quamobrem $\frac{bd}{a}$ erit ſecunda, cùm ſit, vt aggregatum primæ, & tertiç, ad aggregatum ſecundæ, & quartæ, ita prima ad ſecundam; rectangulum verò ſub prima, & tertia çquatur quadrato ſecundæ; quare erit, æquatio $b a - b^2 = \frac{b^2 d^2}{a^2}$ nempe rectangulum ſub prima b; & tertia $a - b$, hoc eſt $b a - a^2$, çquabitur quadrato è ſecunda $\frac{bd}{a}$ hoc eſt $\frac{b^2 d^2}{a^2}$. Omnia ducantur in a^2 atque diuidantur per b, fiet æquatio $a^3 - b a^2 = b d^2$, quod prius ordinabatur.

Numeris ſuperiora tractantur.

Sit æquatio $1 C - 2 Q = 800$. Sunt quatuor continuè proportionales prima quarum inter extremas eſt 2; aggregatum autem ex ſecunda, & quarta eſt ℞ $\frac{800}{2}$ id eſt 20, & ſit 1 R aggregatum primç, & tertiæ, ex ſerie proportionalium 2, 4, 8, 16, & quidem ſi 1 R valet 10, aggregatum ex prima 2, & tertia 8; eius cubus eſt 1000; a quo ſi ſubtrahatur 200; radicum pretium, remanet 800, comparationis homogeneum.

Proponitur æquatio ambigua.

Si ſit çquatio $b a^2 - a^3 = b d^2$. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima eſt maior inter extremas b; differentia verò ſecundæ, & quartæ eſt d, ſit autem a, differentia primç, & tertiæ ex Zetetico.

Zeteticum.

Data prima maiori inter extremas, & differentia ſecundæ, & quartæ in ſerie quatuor continuè proportionalium, reperire differentiam primæ, & tertiæ.

Data ſit b, prima in ſerie quatuor continuè proportionalium eademque maior inter exxtremas differentia autem ſecundç, & quartç ſit d; Oporteat reperire differentiam primæ, & tertiæ.

Explicatio.

Quæſita differenaia eſto a, itaque tertia erit $b - a$, vt autem eſt a ad d, ita

b, ad $\frac{b^4}{a}$ ob id $\frac{b^4}{a}$ erit ſecunda, cùm ſit vt differentia primæ, & tertię ad differentiam ſecuudę, & quartę: ita prima ad ſecundam; at verò rectangulum ſub prima, & tertia, ęquale eſt quadrato ſecundæ; proinde erit æquatio $b^2 - b\,a = \frac{b^2 d^2}{a^2}$. Omnia ducantur in a^2, & diuidantur per b; fiet æquatio $b\,a^2 - a^3 = b\,d^2$, & id ordinabatur,

Numeris explicantur ſuperiùs tradita

Sit æquatio 16 Q — 1 C = 576. Sunt quatuor continuè proportionales, quarum prima maior inter extremas eſt 16; at differentia ſecundæ, & quartæ eſt ℞ $\frac{576}{16}$ id eſt 6, ſit autem 1 R differentia primæ, & tertię ex ſerie proportionalium 16, 8, 4, 2

S C H O L I O N.

Aduertenda quædam.

Circa ſuperiùs dicta illud occurrit tantummodo conſiderandum, quod veluti demonſtratum aſſummebatur, nempe differentiam inter primam, & tertiam, ad differentiam, inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium, eſſe, vt prima, ad ſecundam, vel vt ſecunda ad tertiam, vel vt tertia ad quartam; vnde eſto.

T H E O R E M A.

Analyticè.

Differentia inter primam, & tertiam ad differentiam inter ſecundam, & quartam in ſerie quatuor continuè proportionalium, eſt vt prima ad ſecundam; atque adeo, vt ſecunda ad tertiam, & vt tertia ad quartam.

Sit prima a, ſecunda b, tertia erit $\frac{b^2}{a}$, vt patet ex ſupra traditis, & quarta erit $\frac{b^4}{aab}$ igitur ſunt in continua ractione, vt verò differentia inter primam, & tertiam eſt $\frac{b^2}{a} - a$ ita quidem differentia inter ſecundam, & quartam eſt $\frac{b^4}{aab} - b$, Oſtendendum eſt ita eſſe $\frac{b^2}{a} - a$ ad $\frac{b^4}{aab} - b$, vt a ad b. Quoniam enim ſi ſint proportionales $\frac{b^2}{a} - a$; $\frac{b^4}{aab} - b$; a, & b erit factum ſub extremis æquale facto ſub medijs; propterea $\frac{b^3}{a} - a\,b$ ęquabitur $\frac{ab^4}{aab} - a\,b$, at ita ſe habet, nam $\frac{b^3}{a} - a\,b$ idem eſt quod $\frac{b^3 - aab}{a}$ at verò $\frac{ab^4}{aab} - a\,b$ idem eſt, quod $\frac{ab^4 - a^3b^2}{aab}$ ſunt autem $\frac{b^3 - aab}{a}$ & $\frac{ab^4 - a^3b^2}{aab}$ inter ſe æqueles, huius enim numeratore, & denominatore diuiſo per a, fit $\frac{b^4 - a^2b^2}{ab}$, & diuiſione inſtituta per b fit $\frac{b^3 - aab}{a}$ ſunt igitur ęquales $\frac{b^3}{a} - a\,b$, & $\frac{ab^4}{aab} - a\,b$, quare proportionales erunt hæ magnitudines videlicet, vt a ad b, ita $\frac{b^2}{a} - a$, ad $\frac{b^4}{aab} - b$. Quod nobis erat iniunctum demonſtrare.

Geometricè.

Sint continuè proportionales A, B, C, D. Dico eſſe differentiam inter A, & C, ad differentiam inter B, & D, vt A, ad B, &c. Quoniam enim A, B, C, D, ſunt ex hypotheſi proportionales, erit, [a] vt A, ad C, ita B ad D, proinde inuertendo [b] erit, vt C ad A, ita D ad B, itaque diuidendo, [c] vt C, minus A ad A, ita D, minus B, ad B, atque adeo, [d] vt C, minus A, hoc eſt differentia primę, & tertię ad D, minus B, id eſt differentiam ſecundæ, & quartæ; ita A, ad B, hoc eſt prima ad ſecundam, &c. ac proinde contra, vt B, ad A, ſecunda ad primam, ita erit D, minus B ad C, minus A, &c.



A B C D

a 16. quinti. b 4 quinti. c 17. quinti. d 16. quinti.

THEO-

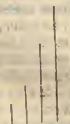
THEOREMA.

IN ſerie quatuor continuè proportionalium, vt eſt prima, ad ſecundam, &c. ita aggregatum primæ, & tertiæ ad aggregatum ſecundæ, & quartæ.

SIt prima a, ſecunda b, tertia erit $\frac{b^2}{a}$, & quarta $\frac{b^4}{a^2 b}$ aggregatum ex prima, & tertia eſt $a + \frac{b^2}{a}$ aggregatum ex ſecunda, & quarta eſt $b + \frac{b^4}{a^2 b}$ vt autem eſt a, ad b, &c. ita eſt $a + \frac{b^2}{a}$ ad $b + \frac{b^4}{a^2 b}$, quod multiplicalione comdrobatur, multiplicatis enim exrremis, & medijs, fiunt producta æqualia, ducatur a in $b + \frac{b^4}{a^2 b}$ fit $ab + \frac{a b^4}{a^2 b}$; hoc eſt $ab + \frac{b^3}{a}$; ducatur b in $a + \frac{b^2}{a}$ fit $ab + \frac{b^3}{a}$ ſunt ergo in eadem ratione. *Analyticè.*

SInt quatuor magnitudines A, B, C, D, continuè proportionales. Dico eſſe, vt prima ad ſecundam, vel vt ſecunda ad tertiam, vel vt tertia ad quartam ita, &c. Quoniam A, B, C, D, ſunt ex hypotheſi proportionales,[a] erit vt A, ad C, ita B, ad D, quare conuertendo,[b] vt C, ad A, ita D ad B, & componendo,[c] vt C, plus A, ad A, ita D, plus B, ad B, quare,[d] vt A, plus C, id eſt aggregatum primę, & tertię ad B, plus D, hoc eſt aggregatum ſecundę, & quartę, ita A, ad B, prima ad ſecundam. Quod aportebat oſtendere. *Geometricè.*

a 16. quinti. b 4. quinti. c 18. quinti. d 16. quinti.



Hoc numeris conſtat, ſi ſint enim continuè proportionales 2, 4, 8, 16, manifeſtum eſt eſſe 10, aggregatum primi, & tertij, ad 20, aggregatum ſecundi, & quarti, vt 2, ad 4, &c.

Alia etiam ratione huiuſmodi æquationum naturam apud quoſdam explorare licet.

Sit ęquatio $a^3 + d a^2 * - g^3 = 0$. Multiplicetur hęc æquatio $a^2 + c a + b c = 0$ per hanc $a - b = 0$, vt producatur hęc; puta $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * - b^2 c = 0$, ex hypotheſi verò, quod c, maior ſit quam b; hęc erit perſimilis priori, ciuſdem propterea naruræ; atque coſtitutionis; facta igitur mutua earum comparatione, & ſecundis vtriuſque terminis collatis, habebitur $c - b = d$; vel $c = d + b$. *Qua ratione earundem æquationũ natura inquiratur. Proponitur æquatio, cum qua inſtituenda eſt cõparatio Æquatio affirmatiua.*

Proinde conſtat cognita vera radice b, æquationem $a^2 \begin{smallmatrix}+b\\+d\end{smallmatrix} a + b^2 + b d = 0$, duas reliquas radices reſpicere. Vltimiſque terminis collatis, innoteſcit g^3 ęquari $b^2 c$ quare $\frac{g^3}{b^2}$ æquabitur c, itaque c, oritur ex applicatione g^3, ad quadratum radicis veræ, qua cognita, nempe b, conſtat æquationem $a^2 + \frac{g^3}{b^2} a + \frac{g^3}{b} = 0$, duas reliquas radices reſpicere.

Vbi aduerte in locum eorum, quæ in æquatione $a^2 + c a + b c = 0$, habentur, nempe c a, & b c, ſubrogari $b a + d a$, & $b^2 + b d$; illud fit ex a, in $b + d$, hoc autem ex b in $b + d$. *Aduertenda quædam.*

Sit æquatio $a^3 - d a^2 * - g^3 = 0$. Multiplicetur $a^2 + c a + b c = 0$ per $a - b = 0$, vt fiat æquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * - b^2 c = 0$. Suppoſito autem quod b, maior ſit quàm c, erit initio propoſitæ ſimilis, ciuſdem proinde erit naturæ; atque conſtitutionis, facta igitur mutua earum comparatione, & ſecundis vtriuſque terminis collatis, habebitur $b - c = d$. *Proponitur æquatio, cum qua inſtituenda eſt cõparatio Æquatio eſt negatiua.*

Vnde conſtat c, æqualem eſſe $b - d$, & cognita vera radice b, æquationem hanc $a^2 \begin{smallmatrix}+b\\-d\end{smallmatrix} a + b^2 - b d = 0$, duas reliquas radices reſpicere. Vltimis autem collatis terminis; fiet $g^3 = b^2 c$; Vnde ſequitur c. eſſe æqualem $\frac{g^3}{b^2}$, & ſi radix b, vera innotuerit, hanc æquationem $a^2 + \frac{g^3}{b^2} a + \frac{g^3}{b} = 0$ duas reliquas radices reſpicere.

Aduertenda quædam. Vbi aduerte in locum eorum, quæ in æquatione $a^3 + ca + bc = 0$ habentur, nempe c a, & b c, ſubrogari b a — d a, & b^2 — b d. Illud fit ex a in b — d hoc autem ex b, in b — d.

Proponitur æquatio cum qua ineunda eſt comparatio eſt autem æquatio affirmatiua. Sit æquatio $a^3 - d a^2 + g^3 = 0$ Multiplicetur $a^2 - ca - bc = 0$ per $a - b = 0$, vt fiat æquatio $a^3 \begin{smallmatrix}-c\\-b\end{smallmatrix} a^2 * b^2 c = 0$. Hæc erit initio propoſitæ perſimilis, eiuſdem propterea naturæ, atque conſtitutionis, facta igitur mutua earum comparatione, & vtriuſque ſecundis terminis collatis, habebitur $c + b = d$.

Hinc autem addiſcimus c, æqualem eſſe d — b, & ſi vera radix b, innotuerit, hanc æquationem $a^2 \begin{smallmatrix}-b\\-d\end{smallmatrix} a - b^2 - bd = 0$ duas alias radices concernere. Vltimis verò terminis comparatis, habetur $g^3 = b^2 c$, vnde ſequitur c, æquale eſſe $\frac{g^3}{b^2}$, & cognita vera radice b, hanc æquationem $a^2 - \frac{g^3}{b^2} a - \frac{g^3}{b} = 0$ reliquas duas radices reſpicere.

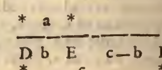
Aduertenda quædam. Vbi aduerte in locum eorum, quæ in æquatione $a^2 - ca - bc = 0$ habentur, nempe c a, & b c, ſubrogari d a — b a, & — b^2 — b d. Illud fit ex a, in d — b hoc autem ex b, in, &c.

Quæ nos hac in re excogitauimus ita ſe habent, & primò.

Ratio explorandi prædictarum æquationum naturam quam Auctor adinuenit. Sit æquatio, in qua cubus afficitur adiunctione ſolidi ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit recta D F, vtcunque ſecta in E, poſſet autem inſtitui hypotheſis eadem protracta, vt crementum ſit æquale ipſi D E, ſed, ob eas, quas attulimus cauſas, prima erimus hypotheſi contenti. Sit igitur, vt diximus D F, ſecta in E, Manifeſtum eſt cubum ex D E, plus ſolido ab eiuſdem quadrato in E F, eſſe æqualem ſolido, à quadrato eiuſdem D E, in D F; Si itaque D E, ſit radix, & E F, coefficiens ſubquadratica, cùm cubus ex D E, plus ſolido à quadrato eiuſdem in E F, nempe cubus radicis, plus homogeneo ſub quadrato, & coefficiente longitudine, æqualis ſit ſolido à quadrato ipſius D E, in D F, proinde ſolidum à quadrato D E, in longitudinem D F, erit homogeneum datæ menſuræ.

D E, eſt a, itemque b, at D F, eſt c, & E F eſt c — b.



Itaque D E, erit radix vna, cui cum æquetur D E, imo ſit eadem, propterea D E, minus D E, æquabitur o, nempe nihilo; Vnde D E, erit radix vera; differentia autem inter D E, & D F, nempe E F, erit coefficiens longitudo. Hinc addiſcimus differentiam prædictam in æquatione de qua loquimur eſſe coefficientem longitudinem, atque cognita vera radice D E, per additionem ipſius coefficientes longitudinis E F, fieri cognitam D F, & contra cognita D F, per ſubtractionem eiuſdem coefficientis longitudinis fieri cognitam veram radicem D E; Comparationis autem homogeneum eſſe ſolidum factum à quadrato veræ radicis D E, in ipſam D F.

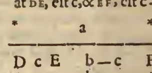
Hin etiam deprehendimus D F, oriri ex applicatione homogenei comparationis, ad quadratum veræ radicis, &c.

Itaque ſi D E, ſupponatur a, itemque b; at verò D F, dicatur c, vt E F, ſit c — b; proueniet æquatio, $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * = b^2 c$, quod ſi placet fieri comparationem inter poſitiuum, & negatiuum; erit $a^3 \begin{smallmatrix}-b\\+c\end{smallmatrix} a^2 * - b^2 c = 0$. Vbi aduerte ex hypotheſi, quòd c, ſit maior, quàm b, per additionem + c, ad — b, fieri æquationem affirmatiuam, &c.

Proponitur æquatio negatiua. Sequitur æquatio in qua cubus afficitur multa ſolidi ſub quadrato, dataque coefficiente longitudine.

Sit recta D F, ſecta in E, & quamuis poſſet aliter inſtitui hypotheſis, vt in ſuperioribus vidimus, hic eam adhibebimus, in qua radix vera, duplici ſymbolo inſignitur, vt diximus ſit D F, ſecta in E, Manifeſtum eſt cubum ex D F, minus ſolido à quadrato ipſius D F, in E F, longitudinem, eſſe æqualem ſolido ab eodem quadrato

D E, eſt a, itemque b, at D E, eſt c, & E F, eſt c — b.

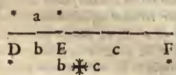


drato D F, in D E; si itaque D F; sit radix, & E F, coefficiens longitudo subquadratica, cum cubus ipsius D F, minus solido à quadrato eiusdem, in E F, nempe cubus radicis, minus homogeneo sub quadrato, & coefficiente longitudine, æqualis sit solido à quadrato eiusdem D F, in D E; Solidum à quadrato D F, in D E, erit homogeneum datæ mensuræ. Itaque D F, erit radix vna, cui cum æquetur D F, imo sit eadem, propterea D F, minus D F, æquabitur o, nempe nihilo. Vnde D F, erit radix vera, differentia autem inter D F, & D E, nempe E F, erit coefficiens longitudo. Hinc addiscimus differentiam prædictam in æquatione de qua loquimur esse coefficientem longitudinem. Atque cognita vera radice D F, per subtractionem ipsius coefficientis longitudinis E F, fieri cognitam D E; & contra per additionem eiusdem coefficientis longitudinis ad D E, fieri cognitam veram radicem D F, innotescit quoque comparationis homogeneum esse solidum factum à quadrato veræ radicis D F, in ipsam D E. Hinc etiam deprehendimus D E, oriri, ex applicatione homogenei comparationis, ad quadratum veræ radicis, &c. Itaque si D F, supponarur a, itemque b, at verò D E, dicatur c, vt E F, sit b — c proueniet æquatio $a^3 \frac{-b}{+c} a^2 * = b^2 c$, quod si placet fieri comparationem inter positiuum, & negatiuum, erit $a^3 \frac{-b}{+c} a^2 * - b^2 c = o$. Vbi aduerte, ex hypothesi, quod b, sit maior quàm c, per additionem + c ad — b, fieri æquationem negatiuam.

Sequitur tandem æquatio, in qua solidum sub quadrato, dataque coefficiente longitudine afficitur multa cubi. *Proponitur æquatio amphibola*

Sit recta D F, secta in E, manifestum est solidum, à quadrato D E, in D F, minus cubo eiusdem D E, æquale esse solido à quadrato eiusdem D E, in E F; Si itaque D E, sit radix, & D F, coefficiens subquadratica, cùm solidum à quadrato D E, in D F, minus cubo eiusdem D E, nempe homogeneum sub quadrato, & coefficiente longitudine, minus cnbo ipsius D E, æquale sit solido à quadrato eiusdem D E, in E F; solidum à quadraro D E, in E F, erit homogeneum datæ mensuræ, itaque D E, erit radix vna, cui cùm æquetur D E, imo sit eadem, propterea D E, minus D E, æquabitur o, nempe nihilo. Vnde D E, erit radix vera. Aggregatum autem ex D E, & E F, nempe D F, erit coefficiens longitudo. Hinc addiscimus aggregatum prædictum in æquatione de qua loquimur esse coefficientem longitudinem; atque cognita vera radice D E, per additionem ipsius E F, fieri cognitam D F, &c. Innotescit quoque comparatiouis homogeneum esse soliduim factum à quadrato veræ radicis D E, in E F. Hinc etiam deprehendimus E F, or ri ex applicatione comparationis homogenei, ad qnadratum veræ radicis. Itaqueesi D E, supponatur a, eademque b, at verò E F, dicatur c, & D F sit b + c prouiniet equatio $a^3 \frac{-b}{+c} a^2 * = b^2 c$; quod si placet fieri comparationem inter positiuum, & negatiuum, erit $a^3 \frac{-b}{+c} a^2 * - b^2 c = o$.

D E, est a, itemque b, & E F, est c, atque D F, est b † c.



S C H O L I O N.

IN alijs æquationum generibus non absimili modo procedendum erit, vt earum natura, atque constitutio comparetnr, qua de re multi doctissimè scripserunt, quos adire iuuabit Artificiosè igitur inquiritnr natura, atque constitutio æquationum trium dimensionum secundo, vel tertio, vel nullo termino carentium; & quidem tertio, vt $a^3 + d a^2 * - g^3 = o$. *&c. Vel si placet alias adhibere species, vt in vsu iam quibusdam positis, vti liceat pro æquationum radicibus, ita se habebit æquatio* $a^3 + l a^2 * - n^3 = o$. *Insuper* $a^3 - l a^2 * - n^3 = o$, *demnm in ordine harum erit* $a^3 - l a^2 * + n^3 = o$. *Insinuatur similibus modis procedendum esse in disquirenda natura cæterarū æquationum.*

Si fueriz $a^3 + l a^2 * - n^3 = o$. *Perficietur, vt diximus. Ducatur* $a^2 + c a + b c = o$ *in* $a - b = o$, *fit* $a^3 \frac{-b}{+c} a^2 * - b^2 c = o$. *Ex hypothesi autem, quod c, sit*

maior

maior quàm b, persimilis erit proposita; atque adeo eiusdem erunt naturæ; atque constitutionis, facta mutua earum comparatione, secundisque terminis inuicem collatis, reperiemus $c - b$ æquari l; siue c, æquari $l + b$. Vnde cognita vera radice b; fit manifestum æquationem $a^2 \, {}^{+b}_{+l} \, a + b^2 + b\,l = o$ duas reliquas concernere radices, & vltimis collatis terminis, constat n^3 æquari $b^2 c$; vnde fit vt c, æquetur $\frac{n^3}{b^2}$ atque cognita radice b, æquationem hanc $a^2 + \frac{n^3}{b} a + \frac{n^3}{b} = o$ duas reliquas radices respicere.

Proponitur æquatio negatiua.

Si verò fuerit $a^3 - l a^2 * - n^3 = o$. Ducatur $a^2 + c\,a + b\,c = o$ in $a - b = o$, fiet $a^3 \, {}^{-b}_{+c} \, a^2 * - b^2 c = o$. Ex hypothesi verò, quod b, sit maior quàm c; hæc persimilis erit proposita, atq; adeo eiusdem erunt naturæ, atque constitutionis; facta proinde mutua earum comparatione, secundisque terminis inuicem collatis, habebimus $b - c = l$. Vnde fit manifestum c, esse æqualem $b - l$, atque cognita vera radice b; hanc æquationem $a^2 \, {}^{+b}_{-l} \, a + b^2 - b\,l = o$ duas reliquas radices concernere. Vltimisque terminis collatis, perspicuum fit n^3, æquari $b^2 c$, vnde constat c, esse æqualem $\frac{n^3}{b^2}$, & cognita vera radice b; hanc æquationem $a^2 + \frac{n^3}{b^2} a + \frac{n^3}{b} = o$ duas reliquas respicere radices.

Proponitur æquatio amphibola.

Si fuerit $a^3 - l\,a^2 * + n^3 = o$. Ducatur æquatio $a^2 - c\,a - b\,c = o$ per hanc $a - b = o$, vt producatur $a^3 \, {}^{-c}_{-b} \, a^2 * + b^2 c = o$, hæc erit proposita persimilis, atque adeo eiusdem erunt naturæ atque constitutionis; facta mutua earum comparatione, secundisque terminis inuicem collatis, reperiemus, $c + b$ æquari l; vnde constat c, æquari $l - b$ & si vera radix b, cognita fuerit, innotescit æquationem $a^2 \, {}^{-b}_{-l} \, a - b^2 - b\,l = o$ ad duas reliquas radices respicere. Atque vltimis terminis inuicem collatis; habebimus $n^3 = b^2 c$, vnde constat c æquari $\frac{n^3}{b^2}$ atque cognita vera radice b; æquationem hanc $a^2 - \frac{n^3}{b^2} a - \frac{n^3}{b} = o$, ad duas reliquas radices inueniendes referri.

Cùm autem æquatio fuerit cubica, siue trium dimensionum septem quidem modis variari potest; propter totidem affectionum variationem per signa $+$, & $-$. Vt si fuerit $a^3 - l\,a^2 + m^2 a - n^3 = o$. Huius quidem natura inquiritur instituta multiplicatione inter $a^2 - c\,a + d^2 = o$, & $a - b = o$. Hinc enim prouenit æquatio $a^3 \, {}^{-b}_{-c} \, a^2 \, {}^{+d^2}_{+bc} \, a - b\,d^2 = o$ quæ eiusdem est naturæ cum proposita; ac proinde eiusdem constitutionis. Instituta autem comparatione inter ipsas, collatisque terminis secundis vtriusque, fit $b + c = l$ seu $c = l - b$, & ex comparatione terminorum, qui tertio sunt loco, fit $d^2 + b\,c = m^2$, &c. atque consimili modo, & huius, & cæterarum huius ordinis indagatur natura.

Supradictarũ imitatione cæterarum æquationum indagatur natura.

Ad horum imitationem inquirenda est natura æquationum quadratoquadraticarum, seu quatuor dimensionum; siue in ijs secundus, & tertius terminus desit, siue tertius, & quartus, siue secundus, siue quartus, siue tertius tantùm; siue nullus terminus desit, &c. De his tamen consulere iuuat alios, qui cumulatè, atque disertè hac de re locuti sunt; nobis enim sufficit, & aliorum modos retulisse, pro superioribus æquationibus, & nostram methodum tradidisse pro ijsdem; siquidem ex ijs, haud obscurè constabit, quid in reliquis agendum sit, vt earum natura comparetur, atque primordia explicentur. Vt ergo superiùs diximus; Alia præter hac æquationum genera perscrutari licet non dissimili arte ad earum indagandam naturam.

Non absimili modo aliarũ æquationum indagatur natura.

Vnde extant etiam æquationes cubicæ, seu trium dimensionum in quibus nullus terminus deest, insuper æquationes quatuor dimensionum, cuiusmodi sunt quadrato-quadraticæ, siue secundo, tertio termino, siue tertio, & quarto, siue secundo tantùm, siue quarto, siue tertio tantùm, siue nullo careant, quarum naturam explorare, tum methodis, quas, ex alijs tradidimus, cùm etiam, ea, quam nos proprio marte adinuenimus operosum non erit diligenter notatis ijs, quæ hactenus enarrauimus, ac explicuimus.

Superest modo, vt perpendamus vlteriùs, si quæ alia est ratio inquirendi ipsarum æquationum naturam, quod in sequentibus præstare conabimur.

Alia traduntur, vnde licet Artifici, æquationum constitutionem, atque naturam indagare.

CAPVT XVIII.

PRęstat hìc primùm differere de transmutandis æquationibus; & quidem hoc bifariam perfici posse, aliàs monuimus, vel nimirum alterata, vel inuariata radice, Alteratio plurifariam contingit, atque adeo radix de qua quæritur pluribus modis noua potest specie exhiberi. Primò fit per additionem; Secundò per subtractionem, Tertiò per multiplicationem; Quartò per diuisionem, Quintò per analogiam rationis, vt aiunt explicatæ, Sextò per analogiam rationis implicitę; Septimò per parabolicam hypostasin, & iterum in sequentibus de huiusmodi transmutatione sermo redibit. Illud verò non præteribo, nempe quomodocumque huiusmodi alteratio perficiatur, inter radicem primariam, & nouam, dari notam differentiam, vel rationem, itaut vna cognita, altera nequeat ignorari. *Quibus medijs præter supradicta liceat æquationum indagare naturam, et earundem æquationum primordia.*

Si primùm oporteat eam, quam dicebamus primam alterationem per additionem instituere, ita procedendum. Sit radix a, additione alteranda, ei addatur b, vt fiat $a + b$; At verò $a + b$ esto e, quare $e - b$ erit a; Si itaque cognoscamus magnitudinem e, cùm nota sit magnitudo b; non poterit quidem ignorari primæua radix a; Vt si b, fuerit 4, & cognoscamus e, esse 12, illico innotescet a; foret enim $e - b$, nempe 8; In huiusmodi autem opere, radix alterata, quæsititia conceditur esse æqualis alteri inquirendæ, ex hac enim concessione nouam induit speciem, sub qua æquatio primò posita dirrigitur, ac ordinatur; vt si proposita foret ęquatio $a^2 = z$ plano. Dicemus $a + b$ esse e, quoniam autem a^2 conceditur ęquari z plano, & $a + b$ ęquatur ipsi e, propterea $e - b$, æquabitur a; hinc noua ordinabitur æquatio hunc in modum. Quadratum ex $e - b$; æquabitur z plano; at huiusmodi quadratum est $e^2 - 2be + b^2$, quare fiet ęquatio $e^2 - 2be + b^2 = z$ plano, & per antithesin fiet $e^2 - 2be = z$ plano $- b^2$; Si placet adhibere z^2, loco ipsius z plani, proueniet $e^2 - 2be = z^2 - b^2$. *Primum proponitur.*

Alteratur æquationis radix modo iam explicato, itaque dicimus $a + b$ esto e, ergo $e - b$, æquabitur a; hac autem concessione, atque argumentatione, vt vides radix alteratur, & noua quadam exhibetur specie, & hic primus est modus. *Prima alteratio radicis.*

Secundus per subtractionem fiet alteratio radicis hac concessione, & argumentatione, Sit radix a; cui subducatur b; vt fiat $a - b$; at verò $a - b$, esto e, ergo $e + b$ erit a; Vbi vides subtrahendo b, ab a, primæuam ipsam radicem a, alterari, & noua quidem specie exhiberi. *Secunda alteratio radicis.*

Tertiò potest etiam radix alterari per multiplicationem hac scilicet concessione, & argumentatione, b a, esto e planum; ergo $\frac{e \text{ planum}}{b}$ erit a; Vides igitur qua arte radix, per multiplicationem, alterationem subeat; Si enim concedatur b a esse e planum, hoc vtique applicato ad b; fit $\frac{e \text{ planum}}{b}$, & ortiua magnitudo fiet a; hoc enim pacto, magnitudo ortiua ducta in metientem magnitudinem, facit magnitudinem applicatam. *Tertia alteratio radicis.*

Si verò loco ipsius e plani, symbolum quis adhibeat e^2, nempe accepta specie pro genere, expeditiùs pragmatiam instituet; vnde dicetur b a, esto e^2, ergo $\frac{e^2}{b}$ erit a.

Quartò per diuisionem quoque radix alteratur, hac scilicet concessione, & argumentatione $\frac{a \text{ planum}}{b}$ esto e; ergo b e erit a planum; si enim a planum applicetur ad b, *Quarta alteratio radicis.*

quod

quod fit $\frac{a\ planum}{b}$ dicatur e; manifestum est ortiuam magnitudinem ductam in metientem, debere efficere magnitudinem applicatam, quare b e, factum ex b in e, erit a planum.

Notanda quadam. Hic etiam licet, loco ipsius a plani, adhibere a^2, vt sit $\frac{a^2}{b}$ idem, quod $\frac{a\ planum}{b}$, vnde dicetur $\frac{a^2}{b}$ esto e, ergo b e erit a^2.

Quinta alteratio radicis. Quintò per analogiam explicatæ rationis, hoc pacto concedendo nimirum esse, vt b, ad g, ita a, ad c, deinde analogiam resoluendo, & arguendo $\frac{cb}{g}$ erit a, quandoquidem si sint quatuor latera proportionalia, quorum scilicet primum sit ad secūdum, vt tertium, ad quartum, siuè sint in proportione continua, siuè non, & rectangulum factum sub extremis, applicetur ad secundum ex eadem serie; magnitudo ortiua est latus tertium in eadem serie. Vt si sint 12, 6, 4, 2; & 24, numerus factus mutua multiplicatione 12, in 2, diuidatur per 6, terminum secundum, fit quotiens 2, qui est tertius terminus eiusdem seriei.

Sexta alteratio radicis. Sextò per analogiam rationis implicitæ, vt si concedatur esse vt a, ad b; ita g, ad e, deinde resoluatur analogia, & arguatur; ergo $\frac{bg}{e}$ erit a; Quandoquidem si fuerint, quatuor latera proportionalia, factum autem sub medijs, applicetur quarto orietur primum, cùm igitur sint quatuor proportionalia a, b, g, e, factum sub medijs, est b g; quare si applicetur quarto e, orietur primum a.

Septima alteratio radicis. Septimò alteratio radicis fit per parabolicam hypostasin in quibuscunque æquationum generibus, vtpatote in quadraticis æquationibus concedendo $e^2 + ae$ æquari d plano; quæ quidem æquatio est quadrati affecti affirmatè; mox arguendo $\frac{d\ planum - e^2}{e}$ erit a; Vel concedendo $e^2 - a\,e$ æquari d plano; quæ æquatio dicitur quadrati affecti negatè, & arguendo ergo $\frac{e^2 - d\ plano}{e}$ æquabitur a; Hæc autem operatio ea ratione perficitur; quia cùm fuerit $e^2 + a\,e = d$ plano, per antithesin fiet $a\,e = d$ plano $- e^2$, cùm autem factum ex a in e, æquetur d plano $- e^2$; si hoc fuerit applicatum ad vnum ex illis lateribus, orietur alterum; quare si applicatum fuerit ad e, orietur a; vnde $\frac{d\ planum - e^2}{e}$ æquabitur a.

Quod si concedatur $e^2 - a\,e$ æquari d plano; per antithesin fiet $e^2 = d$ plano $+ a\,e$, rursus $e^2 - d$ plano $= a\,e$; At si factum ex a in e, æquatur $e^2 - d$ plano hoc applicato ad vnum ex illis, aliud orietur, quare si applicetur $e^2 - d$ plano, ad e orietur a, propterea $\frac{e^2 - d\ plano}{e}$ æquabitur a.

Altera radicis alteratio. Tandem fit radicis alteratio concedendo $a\,e - e^2$ ęquari d plano; quæ quidem æquatio est plani sub latere de quo negatur quadratū, & arguēdo ergo $\frac{e^2 - d\ plano}{e}$ æquabitur a; Cum enim $a\,e - e^2$ æquetur d plano, ergo a e æquabitur d plano $+ e^2$ at verò factum ex a in e, æquatur d plano $+ e^2$ propterea hoc applicato ad vnum ex illis, alterum oriatur necesse est, vt superiùs dicebatur, quare $\frac{d\ planum + e^2}{e}$ ęquabitur a.

Obseruanda quadam. Cęterum obseruandum est, quamcumque speciem induat a; æquationem iuxta eam esse transformandam; atque nouam de e, quidem ordinandam, itaut si quæ enunciantur de a; in proposita æquatione, eadem enunciari debeant de noua illa specie, quam a, quidem induit, & in quam est transformata.

Alteratio radicis per additionem. Alteratur a, per additionem fingendo nimirum $a + b$ esse e, & hic est primus transmutandi modus, ex superiùs allatis; erit ob id $e - b$, idem, quòd a; cum ergo creabitur par potestas, ab $e - a$; quæ procreabatur ab a; similisque parodici gradus (vt inferiùs exemplis manifestum fiet) in quos ducantur coefficientes inuariandę; ad efficienda eadem affectionum homogenea; huiusmodi facta æquabuntur omnino proposito homogeneo, & procedendo iuxta Artis præcepta; de e; ordinetur æquatio; erit enim ęquatio trasmutata in nouam, enunciandam de e; hoc est ipsa a, producta cremento b.

Explicatio superadictorum. Supponatur a^2 æquari z plano: alteretur a per additionem fingendo $a + b$, esse e; & $e - b$, fieri a. At verò ab a, creatur, potestas a^2; par autem potestas creabitur ab $e - b$, nimirum $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, & tam hoc quadratum, quàm illud æquabitur z plano, & per antithesin fiet $e^2 - 2\,b\,e = z$ plano $- b^2$, & ita ęquatio illa primaria transmutata est in nouam, enunciandam de e, hoc est ipsa a, producta cremento b; & hoc alijs in modis locum habet.

Æquationes transmutantur alterata radice. Æquationes alterata radice transmutantur, vt vidimus, idem autem perficitur

ipsamet

ipſamet radice omnino inuariata, de quo nunc differendum.

Eſt autem ipſius ęquationis tranſmutatio, quæ fit inuariata radice, nil aliud quàm graduum in eadem æquatione depreſſio, quæ alioquin Græcè diceretur ὑποβιβασμὸς vel elatio, & Græcè ἀναβιβασμός; adeo vt inuariata radice æquationem ipſam tranſmutare nil aliud ſit, quàm eiuſdem æquationis gradum deprimere, vel attollere; fit igitur quidam deſcenſus, vel aſcenſus.

Traſmutatio, quæ fit inuariata radice.

Aſcenſus autem. vel deſcenſus climacticus, ſiue ſcalaris duplex, regularis videlicet, & irregularis.

Aſcenſus, vel deſcenſus climacticus duplex eſt.

Regularis fit climacticus aſcenſus, cùm vtraque pars æquationis propoſitæ ordinatè diſtributa ducitur quadraticè, cubicè, & vlteriùs climacticè.

Regularis aſcenſus climacticus.

Deſcenſus verò climacticus regularis eſt, cùm vtraque propoſitæ, æquationis pars ordinatè diſtributa diuiditur, ſubquadraticè, ſubcubicè, atque depreſſiùs ſubclimacticè ad id videlicet adſcito dato, vel inquirendo ſupplemento, multiplicatione, vel applicatione facta, omnia congruè ordinantur, Hæc autem exemplis illuſtrare iuuabit,

Deſcenſus regularis climacticus.

Si $a^2 + b\,a$ æqueturz pl. per antitheſin a^2, æquabitur z pl. $- b\,a$ ducatur vtraque æquationis pars quadraticè, a^4 æquabitur z pl.pl. $- 2\,b\,z$ plano $a + b^2 a^2$, recipit autem interpretationem affectio illa $b^2 a^2$ ex æquatione propoſita, vt inferiùs dicetur; propterea $a^4 + \overline{b^2 + 2\,b\,z\ pl.}\ a$ æquabitur z plano plano $+ b^2 z$ pl.

Proponitur æquatio.

De his tamen rurſus infra ſermo redibit.

De his infra ſermo redibit.

Irregularis autem aſcenſus fit, cum omnia ſingularia homogenea, quibus propoſita conſtat æquatio in eundem parodicum gradum ducuntur, ſiue purum, ſiue affectum à datis congruentibus magnitudinibus, vel eas etiam afficientem, atque ducta congruam interpretationem, & ordinationem accipiunt. Id autem exemplo hunc in modum illuſtrabimus.

Aſcenſus climacticus irregularis.

Si $a^2 + b\,a$ ęquatio z pl. fiet æquatio per antitheſin $a^2 = z$ pl. $- b\,a$; omnia ſi ducantur in a fiet $a^3 = z$ pl. $a - b\,a^2$; ſed hac de re iterum inferiùs.

Proponitur æquatio.

Deſcenſus fit cum omnia illa ſingularia homogenea applicantur; ſiue ad quæſititiam radicem, ſiue ad gradum radicis poteſtate inferiorem, vel purè, vel cum afficientibus, vel cum affectis datis magnitudinibus congeneribus; hoc eſt eiuſdem generis; & diuina ad id ſcilicet adcito ſupplemento dato, vel inquirendo congruam interpretationem, ac ordinationem accipiunt; hac tamen omnia faciliùs exemplis infrà à nobis in medium afferendis, intelligentur.

Deſcenſus climacticus irregularis.

Huc ſpectat πλάσις; vnde πλάστικος locum habet, vtile quidem πλάσμα eſt, & hac in re non inconſultò Analyſta τὸν πλασματίαν adibit; vt nimirum inquirat æquationum naturam.

Plaſmaticum opus declaratur.

Æquationibus autem πλασμα, ineſſe nos intelligimus, cùm poteſtates affectæ à puris, vel à minus affectis, ęquè tamen altis, vel etiam altiores à depreſſioribus deducuntur, itaque huic æquationi $e^2\ 2 - 2\,b\,e = z$ pl. $- b^2$; πλάσμα ineſt, cùm ab hac pura deducatur æquatione $a^2 = z$ pl. inſuper huic $e^3 \dagger 3\,b\,e^2 = z$ ſol. $+ 2\,b^3$; cùm ab hac deducatur $a^3 - 3\,b^2 a = z$ ſol. inſuper huic $a^4 + \overline{b^2 + 2\,b\,z\ pl.}\ a = z$ pl. pl, $\dagger\, b^2 z$ pl.

Æquationes, quibus plaſmaret eſt.

Plaſma ineſt, quoniam deducitur ab ea $a^2 + b\,a = z$ plano. Huius operationis præcipuus finis eſt, vt cognitæ æquationes plaſmaticæ, in ſimpliciores, à quibus eductæ ſunt, reſoluantur, per omnes autem modos inſtitui poteſt, quibus nimirum æquatiönum tranſmutatio fit diuiſione excepta, atque etiam climactico deſcenſu.

Quæ de cauſa æquationibus plaſma inſit.

Oportet autem aduertere, ſi aliqua poteſtas, affecta eſt, vel afficit ſub ſingulis gradibus, ad eam parodicis plaſmaticam eſſe per modum additionis, vel ſubtractionis; quandoquidem radix intelligitur affecta fuiſſe, cremento, vel decremento deſumpto ex coefficiente ſub gradu altiori ſecundum poteſtatis conditionem, atque naturam, Vt ſi ſit æquatio $e^2 + 2\,b\,e = z$ pl. $- b^2$, plaſmatica eſt per modum ſubtractionis; intelligitur enim radix affecta fuiſſe decremento quidem deſumpto ex dimidia coefficiente b; prout quadratum expoſcit; ſic etiam in alijs quadratis, &c.

Aduertenda quædam quando æquatio plaſmatica eſt per modum additionis vel ſubtractionis.

Si namque ſit æquatio $a^2 = z$ plano. Intelligatur a, affecta decremento b, ſitque

Proponitur æquatio.

a — b; & hoc erit idem quod e; nam $e^2 + 2\,b\,e$ æquabitur z plano — b^2.

Æquatio Plasmatica per modum substractionis.

Quod si fuisset æquatio $e^2 - 2\,b\,e =$ z plano — b^2, Plasmatica fuisset per modum additionis; intelligeretur enim radix affecta cremento desumpto ex dimidia coefficiente b. Si itaque esset æquatio $a^2 =$ z plano. Intelligatur a, affecta cremento b; & fit a + b; idem, quod e; quamobrem e — b æquabitur a; & ita $e^2 - 2\,b\,e$ æquabitur z plano — b^2.

In cubo quomodo intelligatur affecta radix, &c.

In Cubis verò intelligitur affecta radix triente coefficientis sub quadrato. In Quadratoquadratis, quadrante coefficientis sub cubo. In Quadrato-cubis quintante coefficientis sub quadratoquadrato, & ita deinceps.

Quamobrem Quadrata affecta sumunt originem à puris, vt $e^2 + 2\,b\,e =$ z plano — b^2, & $e^2 - 2\,b\,e =$ z plano — b^2 ducunt originem à pura æquatione $a^2 =$ z plano. Insuper cubi affecti sub quadrato, & latere, originem ducunt à cubis affectis sub latere, quemadmodum hæc æquatio $e^3 - 3\,b\,e^2 + \overline{3\,b^2 + d\ \text{plano}}\ e =$ z sol. + d pl. b † b^3 ducit originem ab hac alia a^3 † d pl. a = z sol. nimirum à cubo affecto sub latere; Intelligitur autem a, affici quidem b; quamobrem e — b; æquatur a; quod inferiùs exemplis illustrabimus. Quadratoquadrata verò affecta, sub cubo; quadrato, & latere, à Quadratoquadratis affectis sub quadrato, vel latere, aut tàm sub quadrato, quàm latere, & ita deinceps, de quibus inferiùs afferemus exempla.

Quando potestas est à radice plana.

Præterea si aliqua potestas est à radice plana, aut solida, vel homogenea ordinis vlterioris, plasmatica est per modum multiplicationis de quo supra verba fecimus, vel implicitæ analogiæ Vt $e^4 + b^2\,e^2 = b^2$ z plan. Plasmatica est per modum multiplicationis, & ducit originem abs a^2 + b a = z plano. Sic enim arguitur b a; esto e^2 ergo $\frac{e^2}{b}$ æquabitur a; si enim $\frac{e^2}{b}$ æquatur a, multiplicetur id quadraticè, vt fiat $\frac{e^4}{b^2}$ ducatur autem $\frac{e^2}{b}$ in ipsum b, fiet quidem productum e^2, quo addito ad $\frac{e^4}{b^2}$; fiet $\frac{e^4}{b^2} + e^2 =$ z plano; hoc est $e^4 + b^2\,e^2 = b^2$ z plan. Hac autem de re inferiùs cumulatè loquemur.

Quadratoquadratum affectum sub quadrato ducit originem à quadrato affecto sub latere.

Ita Quadratoquadratum, affectum sub quadrato, ducit originem, à quadrato affecto sub latere, quoniam omnia singularia homogenea, quibus æquatio constat, ducta sunt in quadratum coefficientis sub latere, atqueadeo radix effecti quadrato quadrati media intelligitur proportionalis inter coefficientem sublateralem, & eam radicem, quæ primò proponebarur, qua de re infra.

Quando cubocubus est affectus sub cubo.

Ita quoque Cubocubus affectus sub cubo, ducit originem à quadrato affecto sub latere, atqueadeo radix effecti cubocubi, secunda fit proportionalium continuè è quibus sublateralis coefficiens est prima, & radix primò proposita, est quarta. Itaque $e^6 + b^3\,e^3 = b^4$ z pl. ducit originem abs a^2 + b a = z pl. Insuper Cubocubus affectus sub quadratoquadrato, ducit originem à cubo affecto sub quadrato, omnibus singularibus homogeneis, quibus æquatio constat ductis in cubum coefficientis sub quadrato, & radix effecti cubocubi est media proportionalis inter coefficientem sub quadraticam, & primò propositam, & ita $e^6 + b^2\,e^4 = b^2$ z sol. ducit originem abs a^3 + b a^2 = z sol. vt ex infra dicendis, perspicuum fiet.

Omne quadratoquadratum est affectum sub gradu parodico, &c.

Omne autem Quadratoquadratum affectum sub gradu parodico ad illud, vno, vel pluribus plasmaticum est per ascensum climacticum, ducens originem à quadrato affecto sub latere, vt æquatio ista a^4 † $\overline{b^2 + 2\,b\ \text{z pl.}}$ a = z planopl. + b^2 z pl. ducit originem per climacticum ascensum abs a^2 + b a = z plano. Cùm itaque quadratoquadratum afficitur sub latere, æquatio affecti quadrati, à quo æquatio quadratoquadratica duxit originem, passa est distributionem singularium homogeneorum, quibus æquatio constat, itaut fecerit æquationis partem vnam symbolum quadrati, & planum sub latere, vna cum comparationis data magnitudine, alteram. Vt si sit æquatio a^2 + b a = z plano. Quoniam a^2 + b a, æquatur z plano; fiet per antithesin æquatio a^2 = z plano — b a, & ita quadrati symbolum constituit vnam æquationis partem, & planum sub latere, vna cùm, &c. vtraque verò parte ducta quadraticè, fiet æquatio, vt vides a^4 = z pl.pl. — 2 b z pl. a + b^2 a^2, & si interpretationem acceperit congruam, homogeneum sub quadrato, nempe $b^2\,a^2$, vt valeat b^2 z pl. — b^2 a, fiet æquatio $a^4 + \overline{b^2 + 2\,b\ \text{z pl.}}$ a = z pl. pl. + b^2 z pl.

Si

Si verò Quadratoquadratum afficitur, tam ſub quadrato, quàm ſub latere Plaſmatica eſt, eodem modo, vt æquatio iſta $a^4 + \overline{2\,d\,pl. - b^2}\,a^2 + 2\,b\,z\,pl.\,a = z\,pl.pl. - \overline{d\,planopl.}$ ducit originem ab $a^2 + b\,a = z\,pl. - z\,pl.$ etenim hæc fit per antitheſin $a^2 + d\,pl. = z\,pl. - b\,a$, & vtraque parte ducta quadraticè, ſit æquatio, vt ſupra facta nimirum ordinatione ſecundum Artem, &c. Itaque ſi Q Q; afficiatur, tàm ſub quadrato, quàm latere, ęquatio affecti quadrati à quo deducta eſt quadrataquadratica paſſa eſt diſtributionem ſingularium ſuorum homogeneorum, quibus ipſa conſtat itaut poteſtas quadratica, vna cum dieſi dati plani comparationis, vel eiuſdem productione fecerit vnam æquationis partem, at verò planum ſub latere, vna cùm apatome ſeu reſiduo dati plani comparationis, vel eodem producto conſtituat alteram partẽ, & vtraque parte ducta quadraticè omnia ordinẽtur, &c.

Quando quadratoquadratum afficitur tam ſub quadrato, quàm ſub latere, quo modo æquatio plaſmatica ſit

Poſtremò ſi Quadratoquadratum afficiatur ſub cubo, vt $a^4 + \frac{2\,b\,z\,pl. + b^3}{z\,pl. + b^2}\,a^3 = \frac{z\,pl.\,pl.pl.}{z\,pl. + b^2}$ ducit originem ab $a^2 + b\,a = z$ plano, & ita æquatio iſta affecti quadrati à quo quadratoquadratica deducta eſt, paſſa eſt deſtributionem ſuorum, quibus conſtat ſingularium homogeneorum, itaut quadrati ſymbolum, vna cùm plano ſub latere, fecerit vnam æquationis partem, vtrumque comparationis planum fecerit alteram, & ducta quadraticè vtraque parte tam homogenea ſub quadrato, quàm ſub latere, congruam acceperint interpretationem.

Quando quadratoquadratum afficitur ſub cubo, quo pacto plaſmatica ſit æquatio.

Atque etiam Cubica quæcumque æquatio deduci poteſt à quadraticis per climacticum irregularem aſcenſum; Vt ſi ſit $\overline{b^2 + z\,pl.}\,a - a^3 = b\,z\,pl.$ ducit originem ab $a^2 + b\,a = z\,pl.$ Quoniam enim eſt $a^2 + b\,a = z$ plano; ſi omnia ducantur in a, & adſcita interpretatione, quod a^2 ęquetur $z\,pl. - b\,a$, ad exprimendum valorem ſub b, nimirum in a^2 ſolidi confecti fiet $a^3 + b\,z\,pl. - b^2\,a = z$ plano a, omnibuſque ritè ordinatis fiet $\overline{z\,pl. + b^2}\,a - a^3 = b\,z\,pl.$

Æquatio cubica, quo pacto deduci poſſit à quadraticis per climacticum irregularem aſcenſum;

At verò in his non patet reductionis via ad primæuas æquationes, niſi per æquationem æquę altarum poteſtatum; quamuis inde conſtitutarum æquationum proprietas non mediocriter iuuet; Cæterum iam ſuperiùs inſinuauimus Plaſtices finem, eiuſdemque præcipuum vſum, cùm diceremus, ope ipſius æquationes Plaſmaticas agnitas in ſimpliciores, a quibus deductæ fuerunt haud inutiliter reſolui.

Finis Plaſtices ſuperiùs inſinuatus fuit.

S C H O L I O N.

In gratiam Tyronum, placet vnum vel alterum exemplum diligentèr explicare, Proponatur a^2 æquari z plano. Supponamus a, eſſe 6, & z planum eſſe 36; Dum alteratur a, per additionem fingendo $a + b$ eſſe e, quod eſt plaſma adhibere; Dicamus b, valere 4; proinde $a + b$, valebit 10; atque adeo e, erit 10; & conſequenter $e - b$ erit 6; atque adeo, etiam a, erit 6; at verò dum ab a, creatur poteſtas a^2; par poteſtas creatur ab $e - b$; & erit $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, quadratum illius reſidui $e - b$; Tam igitur illud, quadratum a^2, quàm hoc, nimirum $e^2 - 2\,b\,e + b^2$ dicebamus æquari z plano, & ita eſt, Nam ſi explicetur quadratum iſtud, comperiemus ſecundum præfixas æſtimationes valere 36; nam e^2 eſt 100; cui ſi addatur b^2, puta 16; fiet 116; à quo ſi auferatur 2 b e, nempe 80; remanet 36.

Multa in Tyronum gratiã aſſeruntur, vnde colligere licet, quæ alioquin obſcuriora videri poſſunt, atque hinc euidenter conſtat vis ipſius Plaſtices.

Si ſit æquatio $a^2 + b\,a = z$ plano. Dicebamus etiam eſſe equationem $a^4 + \overline{b^2 + 2\,b\,z\,pl.}\,a = z\,pl.pl. + b^2\,z\,pl.$ Poſita enim æquatione $a^2 + b\,a = z\,pl.$ dicebamus fieri $a^2 = z\,pl. - b\,a$; vtraque parte ducta quadraticè, fieri $a^4 = z\,pl.pl. - 2\,b\,z\,pl.\,a + b^2\,a^2$, & ita eſt; Supponamus a, valere 2; & b eſſe 10; at z pl. valere 24, itaut ſit 1 Q + 10 R = 24, per antitheſin, fiet 1 Q = 24 − 10 R; vtraque parte ducta quadraticè, fit 1 Q Q = 576 − 480 R + 100 Q; At verò 100 Q, nempe $b^2\,a^2$, valebunt 2400 − 1000 R, hoc eſt b^2 z pl. − b^2 a; quandoquidem ducta vtraque parte huius æquationis 1 Q = 24 − 10 R in 100, quadratum ex 10; fit 100 Q = 2400 − 1000 R. Itaque ſi loco illius 100 Q, ſubrogemus 2400 − 1000 R, hoc eſt ad 576 − 480 R, addamus 2400 − 1000 R; fiet ſumma 2976 − 1480 R, & erit 1 Q Q = 2976 − 1480 R, & ita eſt; Si quis enim exiguo labore ſecundum radicis æſtimationem omnia perpendat, rem aliter ſe habere non poſſe, comperiet.

Affectio $b_2\,a_2$ interpretationem accipiens ex æquatione propoſita; valet b_2 z plan. − $b_3\,a_2$ ergò fiet æquatio vt ſupra facta ordinatione ſecundum Artem.

De æquationibus deducendis.

CAPVT XIX.

Deductio maximè cōducit ad cognoscendam æquationum naturā; propterea non est silentio prætereunda; imò de ea copiosè tractādū.

Auctor de quibusdam magni momenti se acturum in suo Geometra Promoto pollicetur.

Æquatio superiùs generatim definita hic diuiditur.

Æquatio alia originalis, alia canonica, quæ vel absolutè est huiusmodi, vel quia ab ipsa deducitur canonica.

Canonicarum æquationum primaria species, vna, quid.

AD assequenda æquationum primordia, atque adeò ad earum naturam dignoscendam; plurimùm facit deductio, quæ Grçcè Καθοδηγία dicitur; propterea non grauabimur hìc de ratione deducendi æquationes magis compositas à simplicioribus tractationem instituere idque eò libentiùs faciendum arbitrati sumus, quia inde aperitur via ad æquationum reductionem, qua de re, paulò post nobis erit agendum non sine commodo Artificis, præsertim in Arithmeticis imò etiam in Geometricis non exiguæ est vtilitatis, quamuis alia via nos incedentes nulla fortè ad id quidem cogat necessitas, vt in nostro Geometra Promoto, manifestè constabit. Æquatio, quam generatim supra definiuimus quæ, vel à Quæstionum, siue Problematum, vtcunque propositorum terminis communiter deducitur, Communis appellari consueuit; vel Canonica dicitur, aut quatenus ex ea, alia quæ propriè huiusmodi est, deducitur, aut quia absolutè huiusmodi sibi vendicat nomenclaturam. Æquationes igitur illæ, quæ etsi Canonicæ non sint, quoniam tamen ab ijs, vt ab originalibus suis aliæ deducuntur, quæ propriè hoc nomine sunt insignitæ, propterea Canonicarum æquationum originales non iniuria nuncupantur. Hoc autem pacto æquationes illæ se habent, quæ per multiplicationem ex radicibus binomijs immediatè conficiuntur, in quibus producta ex multiplicatis radicibus æquantur radicibus multiplicandis sub forma tantummodo multiplicationis, ordinatis. Ab his, quibus minus benè accommodata est æquationis descriptio, duæ propriè deducuntur species Canonicarum, quarum vnam Primariam, alteram Secundariam appellant; Canonicæ fortasse nuncupatæ, cùm per earum applicationem, tanquam per canones radicum numerus in æquationibus communibus determinatur. Canonicarum igitur æquationum species primaria est, quæ ab originalibus per deriuationem constituuntur; reiecta siquidem formali radicum binomiarum ordinatione, obtinente alteram æquationis originalis partem, & ex alterius partis homogeneis, homogeneo dato per affectionis mutationem in situm reliquis oppositum translato; fit æquatio quam Primariam Canonicam dixerunt.

Canonica secūdaria, quid.

Secundaria autem earum est, quæ à primarijs per reductionem constituuntur ablato siquidem de medio vno ex parodicis primariæ æquationis gradibus, fit hçc de qua loquimur æquationis species Secundaria.

Æquatio Reciproca, quid.

Æquatio autem Reciproca, de qua sæpe in sequentibus mentio fit; ea est, cuius homogeneum datum facto ex coefficientibus, & reciprocè potestas facto è gradibus parodicis, æquatur.

Collaterales, quid.

Æquationes Correlatæ, quid.

Sunt etiam çquationes, quæ Collaterales appellantur, simplices illæ, in quibus fieri potest hypobibasmus, per depressionem gradus parodici, itaut facta æqua depressione tandem aliqua magnitudo solitariè existat, veluti homogeneum datç mensurç cui possint reliqua homogenea comparari, sunt igitur illæ, in quibus dignitates collaterales existunt; vt si ex vna çquationis parte existat quadratum, ex altera verò radix; Sunt etiam çquationes Correlatç, quç nimirum similes sunt, & ijsdem datis magnitudinibus constant, siue affectionum parabolis, siue affectionum homogeneis, de quo postea.

Auctor non dū tradit Speciosam algebram in Geometria sed etiam Arithmetica gratiam.

Hçc eo alacriùs tractanda suscepimus, quoniam in animo est ne dum Speciosam Algebram tradere, quatenus Geometricis effectionibus inseruit, & prout cuique licet

cet ea vti ad Geometrica resoluenda Problemata, sed etiam quatenus inde nos in Numerosa sic erudimur, vt huius penitiora introspicientes, assequamur, quæ hactenus in tenebris latitarunt.

At summopere decet nos esse sollicitos de huiusmodi deducendi ratione; propterea quod patefacta via tunc demum ad reductionem videtur, cum constauerit, vnde reducenda æquatio suam originem traxerit, & quidem, vt ab æquatione Pura, deducitur Affecta; ita contra & affecta ad puram reuocatur; sed quo pacto sint hæc vsurpanda ex infra dicendis exploratum erit.

Summopere decet nos esse sollicitos de ipsa deducendi ratione.

Neminem præterit ratio ordinandi binomias radices in multiplicationis formam. Hinc verò fit Διοχετεία, qua nimirum æquationes, cuiusque ordinis ab originalibus suis, deducuntur. Vnde cùm oblata fuerit Canonica quædam æquatio, ad quem ordinem pertineat inspecta potestatis natura considerandum est. Primò autem quadratici ordinis se se offerunt æquationes è quibus prima sit καταφατική.

Æquationes cuiusque ordinis, quomodo ab æquationibus suis deducantur.

Si igitur fuerit $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ + ca \end{smallmatrix}$ = † b c, supposito quòd b, æquetur a. Æquatio affirmatiua ab originali sua in qua factum ex radicibus binomijs multiplicatis æquale est ipsis multiplicandis radicibus sub forma tantummodo multiplicationis ordinatis, quæ quidem impropriè sibi æquationis vendicat nomen, atque rationem; ita se habet $\begin{smallmatrix} a - b \\ a + c \end{smallmatrix}$ = $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ + ca \end{smallmatrix}$ — b c. Si igitur supponamus b, æquari a; ex hac hypothesi, vtique a — b æquabitur o. Vnde si a, æquetur b; consequens est vt $\begin{smallmatrix} a - b \\ a + c \end{smallmatrix}$ æquatur o; erat autem $\begin{smallmatrix} a - b \\ a + c \end{smallmatrix}$ = $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ + ca \end{smallmatrix}$ — b c., ergò $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ + ca \end{smallmatrix}$ — b c, æquabitur o; & per antithesim $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ + ca \end{smallmatrix}$ æquabitur + b c. Hunc itaque in modum apud non nullos quadratici ordinis æquatio, ab originali sua deducitur.

Exemplum de æquatione affirmatiua.

Ne mireris autem, quòd ex a — b in a + c fiat productum æquale o; si namque a — b æquatur o; perinde est ducere a — b in a + c ac ducere o, in a + c; inde autem fit o; vt in multiplicatione vulgari contingit; si enim o, ducatur in a, vel alium quemcumque numerum fit o, de his tamen agentes de Maximis, & Minimis plura dicemus fusiori calamo scribentes.

Ex multiplicationis positiui in negatiuũ produci o, declaratur.

Nec dissimiliter si æquatio fuerit ἀποφατική. At si fuerit ἀμφίβολος. vt.

Si fuerit, æquatio $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ - ca \end{smallmatrix}$ = — b c; posito quòd b, vel c, æquetur a, deducitur ab originali. in qua factum ex radicibus binomijs multiplicatis, æquale est ipsis multiplicandis radicibus, sub forma, tantummodo multiplicationis ordinatis, quæ quidem impropriè sibi æquationis vendicat nomen, atque rationem; ita se habet $\begin{smallmatrix} a - b \\ a - c \end{smallmatrix}$ = $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ - ca \end{smallmatrix}$ + bc. Nam posito quòd b, vel c, æquetur a; ex hac hipothesi erit a — b æqualis o, vel si a, æquetur c; erit a — c, æqualis o. Si igitur supponamus a æquari b, vel c; erit quidem $\begin{smallmatrix} a - b \\ a - c \end{smallmatrix}$ = o. At verò $\begin{smallmatrix} a - b \\ a - c \end{smallmatrix}$ æquatur $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ - ca \end{smallmatrix}$ + bc propterea $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ - ca \end{smallmatrix}$ + b c æquabitur o; ergò & $\begin{smallmatrix} aa - ba \\ - ca \end{smallmatrix}$ æquabitur — b c.

Exemplum æquationis negatiuæ, non secus ac de affirmatiua.

Exemplum de æquatione amphebola.

Hunc itaque in modum supradictæ æquationes ab originalibus suis deducuntur:

Quòd si æquationes fuerint cubicæ, non absimilis est modus eas ab originalibus suis deducendi; vndè,

Modo iam explicatio æquationes ab originalibus suis deducuntur.

Si fuerit $\begin{smallmatrix} a^3 - b a^2 - b c a \\ + c a^2 - b d a \\ + d a^2 + c d a \end{smallmatrix}$ = + b c d posito quòd b, æquetur a, ab originali sua deducitur

in qua factum ex radicibus binomijs multiplicatis, æquale est ipsis multiplicandis radicibus in formam tantummodo multiplicationis ordinatis quę vendicat quidem impropriè sibi æquationis, nomen atque rationem.

Æquationes cubici ordinis

Et ita se habet $\begin{smallmatrix} a - b \\ a + c \\ a + d \end{smallmatrix}$ = $\begin{smallmatrix} a^3 - b^a - b c a \\ + c a^2 - b d a \\ + d a^2 + c d a - b c d. \end{smallmatrix}$ Ex hypothesi enim, quòd a, æquetur b;

Explicatur earum ab originalibus suis deductio.

erit quidem a — b, æqualis o. quare posito quòd a æquetur b, erit $\left.\begin{smallmatrix} a - b \\ a + c \\ a + d \end{smallmatrix}\right\}$ æqualis o.

Erat autem $\begin{smallmatrix} a - b \\ a + c \\ a + c \end{smallmatrix}$ = $\begin{smallmatrix} a^3 - b a^2 - b c a \\ + c a^2 - b d a \\ + d a^2 + c d a - b c d. \end{smallmatrix}$

Quamobrem

Quamobrem $\left.\begin{array}{l} a^3 - b a^2 - b c a \\ + c a^2 - b d a \\ + d a^2 + c d a - b c d \end{array}\right\}$ æquabitur o. Igitur.

$\left.\begin{array}{l} a^3 - b a^2 - b c a \\ + c a^2 - b d a \\ + d a^2 + c d a \end{array}\right\}$ ęquabitur $+ b c d$.

Quando æquationes fuerint Reciproca.

Nec dissimiliter aliæ quoque cubici ordinis ęquationes ab originalibus suis designatis, deducuntur.

Quòd si fuerint Reciprocæ cubici quidem ordinis, vt si fuerit $a^3 - b a^2 + c d a = + b c d$ posito quod b, æquetur a, deducitur ab originali sua designata, in qua factum à radicibus binomijs multiplicatis ęquale est ipsis multiplicandis radicibus in formam tantummodo multiplicationis ordinatis, quæ quidem impropriè sibi ęquationis nomen, atque rationem vendicat, & ita se habet $\begin{smallmatrix} a-b \\ a+c \\ a+d \end{smallmatrix}$) $= a^3 - b a^2 + c d a - b c d$; ex hypothesi igitur, quòd b, ęquetur a; erit $a - b$ ęqualis o, si itaque, b ęquetur a, etiam $\begin{smallmatrix} a-b \\ a+c \\ a+d \end{smallmatrix}$ æquabitur o. At verò $\begin{smallmatrix} a-b \\ a+c \\ a+d \end{smallmatrix}$ ęquatur $a^3 - b a^2 + c d a - b c d$, ergo $a^3 - b a^2 + c d a - b c d$ ęquabitur o; ergo per antithesin $a^3 - b a^2 + c d a$ ęquabitur $+ b c d$.

Nec dissimiliter cætera æquationes huius ordinis ab originalibus suis deducuntur.

Atque hunc in modum cæterę ęquationes huius ordinis Reciprocæ ab originalibus suis deducuntur.

Nec absimili modo ac supra, cùm de cubicis ęquationibus loqueremur, procedendum in æquationibus ordinis quadratici, semper ex hypothesi, quòd a, ęquetur b modo enim consimili ab originalibus suis deducuntur; quemadmodum etiam si huius ordinis ęquationes extiterint Reciprocę, prout de Reciprocis ad cubicum ordinem spectantibus, paulo antea dictum est, & ita de cęteris, &c.

Æquationes affecta à puris deducuntur. Exemplum.

Deducuntur autem æquationes affectæ, ab ijs, quę puræ dicuntur. Itaque.

Si sit æquatio $a^2 =$ z plano; $a - b$ esto e; & erit $e^2 + 2 b e =$ z pl. $- b^2$ Cùm enim sit æquatio $a^2 =$ z plano; sitque $a - b$ æqualis radici e; ergo $e + b$ ęquabitur a; si itaque $e + b$ subeat eandem multiplicationis affectionem, quam subit a, fiet quadratum ex $e + b$, æquale quadrato ex a, est autem ex hypothesi a^2 æquale z plano; ergo quadratum ex $e + b$, ęquabitur z plano; at, vt patet ex genesi, quadratum ex $a + b$, est $e^2 + 2 b e + b^2$, hoc igitur ęquabitur z plano, cùm itaque $e^2 + 2 b e + b^2$ æquetur z plano; per antithesin fit, vt supra $e^2 + 2 b e =$ z pl. $- b^2$; hoc autem ordinabatur, Vides igitur qua industria, ex pura æquatione, affecta deducatur. Hęc est per decrementum deductio.

Exemplum.

Si sit æquatio $a^2 =$ z plano. Hinc affectam æquationem deducemus hoc pacto. Supponamus $a + b$ esse e; ex hac autem hypothesi proueniet æquatio $e^2 - 2 b e =$ z pl. $- b^2$. Cùm enim sit æquatio $a^2 =$ z plano; sitque $a + b$ æqualis radici e; ergo $e - b$; æquabitur a, radici; si itaque $e - b$, subeat eandem affectionem, multiplicationis, quam subit a; fiet quadratum ex $e - b$, æquale quadrato ex a; est autem ex hypothesi a^2, æquale z plano, ergo quadratum ex $e - b$, æquabitur z plano. At vt patet ex genesi, quadratum ex $e - b$, est $e^2 - 2 b e + b^2$ hoc igitur æquabitur z plano; cùm itaque $e^2 - 2 b e + d^2$ æquetur z plano; per antithesin fiet, vt supra $e^2 - 2 b e =$ z pl. $- b^2$ hoc autem ordinabatur. Vides igitur qua arte ex pura ęquatione deducatur affecta; quod Vieta, ingeniosè explicauit. Hæc est per crementum deductio.

Exemplum.

Si sit æquatio $a^2 =$ z plano; $b - a$, vel $a + b$ esto e; & $2 b e - e^2$ æquabitur $b^2 -$ z plano. Siquidem a^2 supponitur æquari z plano, & $b - a$; æqualis est radici e; ergo $b - e$ æquabitur a; & $b^2 - 2 b e + e^2$ hoc est quadratum ex $b - e$ æquabitur z plano, & facta ordinatione, fiet ęquatio, ad eum qui sequitur modum $2 b e - e^2 = b^2 -$ z pl.

Exemplum.

At si $a + b$; ęquetur e; ergo $e - b$; æquabitur a, & $e^2 - 2 b e + b^2$ hoc est quadratum abs $e - b$ æquabitur z plano, & per antithesin fiet $2 b e - e^2 = b^2 -$ z pl.

SCHO-

SCHOLION.

HActenus tradita numeris explicari possunt, & in grattam Tyronum; exemplum afferemus.

Supponamus 1 Q = 144 itaut z pl. valeat 144 loco autem b intelligatur numerus 4, atque 1 R + 4 fit 1 A hoc est vna secunda radix, ergo quoniam 1 R + 4; æquatur 1 A; erit ob id æquatio inter 1 A — 4, & 1 R proinde quadratum abs 1 A, — 4 nempe A Q — 8 A + 16 æquabitur 144, vtrinque ablatis 16; remanet 1 A Q — 8 A = 128; cuius æquationis radix est 16, at si ex 16, auferatur 4; nempe crementum, remanebit 12, valor ipsius R.

Hactenus tradita numeris explicantur Antiqua Algebra explicantur.

Sed de his quoque Vieta; Nobis æquationum affectarum à puris eiusdem ordinis ita se habet deductio.

Alia Auctoris est Deductionis ratio.

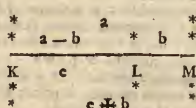
Primò siquidem illud se offert considerandum à solinomia radice, puram æquationem oriri, cùm autem binomia euaserit, tunc se prodit affectio; vnde eadem magnitudo, & solinomia sit, & binomia; illa puræ æquationi hæc autem affectę primordium est; Non ibimus inficias, etiam solinomiam affectæ ęquationi inseruire, cùm ad libitum sit latus assumere, & ex eo potestatem cuiusque generis effingere, quæ deinde, vel affecta esse poterit homogeneo sub vno ex parodicis gradibus, vna siue multiplici affectione, prout homogenea ipsa pro diuersitate parodicorum graduum plura, vel pauciora fuerint, & affectio diuersimode se se habere potest, siue potestas afficiatur, vt diximus, siuè sit afficiens. Tamen hìc sermo est de affecta æquatione, quæ ductu potestatis in se affectionem consequitur, collata cum homogeneo datæ mensurę. Hoc itaque pacto res se se habet.

A solinomia radice pura oritur æquatio.

Sit æquatio $a^2 = z$ plano.

Proponitur æquatio affirmatiua quadratica, vnde affecta deducitur.

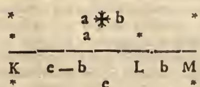
Recta KM, diuisa sit in L; & quidem ipsa KM, esto a; & LM sit b, ergo KL, erit a — b; quæ dicatur e; si igitur KL, puta a — b, est e; ergo KM, erit e + b quæ cùm sit a; proinde e + b, æquabitur a; Manifestum est autem, quadratum KM, æquale esse quadrato KL, plus duplo rectangulo KLM; vna cum quadrato LM; hoc est $e^2 + 2\,b\,e + b^2$; hoc igitur æquatur a^2, seu z^2, hoc est z plano; vnde per antithesin $e^2 + 2\,b\,e$, æquabitur z pl. — b^2.



Sit ęquatio $a^2 = z$ pl.

Rursus pura æquatio proponitur, vnde affecta deducitur.

Recta KL, poducta sit cremento LM; sit autem KL; idem, quòd a, at verò LM, sit b; ergo KM, erit a + b, quæ dicatur e, si igitur KM, puta a + b; est e, ergo KL, erit e — b; quæ cùm sit a; propterea e — b ęquabitur a, Manifestum est autem, quadratum KL; æquari quadrato KM, minus duplo rectangulo KML, plus quadrato LM; hoc est $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, hoc igitur ęquatur a^2, seu z^2, vel z plano; quare per antithesin $e^2 - 2\,b\,e$, æquabitur z pl. — b^2.



Sit æquatio $a^2 = z$ plano.

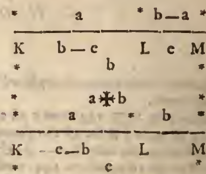
Recta KL, subducta sit rectę KM, aut KL; aucta sit cremento LM; Sit autem KL, idem, quod a; at verò KM, vel LM, sit b; sed LM, vel

Proponitur iterum æquatio pura vnde æquatio affecta deducitur.

KM,

Supradictorũ demonstratio.

KM, erit c; cui quidem ęquatur $b - a$, vel $a + b$, & KL erit $b - c$, & eadem erit $c - b$ vtraque dicitur a; proinde $b - c$ ęquabitur a; cui etiam æqualis erit $c - b$; Manifestum est autem quadratum KM, vel LM minùs duplo rectangulo KML; vna cum quadrato LM, vel KM æquari quadrato KL; ergo $b^2 - 2\,b\,c + c^2$ æquabitur a^2, seu z^2 vel z plano; ergo $2\,b\,c - c^2$ ęquabitur $b^2 - z$ plano. Itaque ex ęquationibus puris eiusdem ordinis, æquationes affectæ deductæ sunt.



Æquationes in quibus cubus afficitur sub quadrato.

Æquationes autem in quibus Cubus afficitur sub quadrato ab ijs in quibus affectio est sub latere, deducuntur, quę quidem deducendi ratio multum momenti habet, vt ex sequentibus planum fiet.

Proponitur æquatio cubica.

Si sit æquatio $a^3 - 3\,b^2 a = z$ solido; $a - b$ esto c; & erit $c^3 + 3\,b\,c^2 = z$ sol. $+ 2\,b^3$.

Quoniam enim $a^3 - 3\,b^2\,a$ æquatur z solido, & est $a - b$ ęqualis radici c; ergo $c + b$ æquabitur a, quamobrem cubus ex $a + b$ multatus solido abs $3\,b^2\,c$ in $c + b$ æquabitur z solido. At verò cubus ex $a + b$ est $c^3 + 3\,b\,c^2 + 3\,b^2\,c + b^3$, & solidum affectionis est $- 3\,b^2 c - 3\,b^3$, ergo facta ordinatione secundum Artem, erit $c^3 + 3\,b\,c^2 = z$ solido $+ 2\,b^3$.

Vel si $a^3 - 3\,b^2\,a$ æquetur z solido $a + b$ esto c, & $c^3 - 3\,b\,c^2$ æquabitur z solido $- 2\,b^3$ Quoniam enim $a^3 - 3\,b^2\,a$ æquatur z solido, est autem $a + b$ radici c, æqualis ergo $c - b$, æquabitur a. Proinde cubus ex $c - b$, multatus solido abs $3\,b^2$ in $c - b$ æquabitur z solido, & non dissimiliter, ac supra procedendum, &c.

Proponitur æquatio altera cubica.

Si sit æquatio $3\,b^2\,a - a^3 = z$ sol, $b - a$ esto c, & erit quidem $3\,b\,c^2 - c^3 = 2\,b^3 - z$ solido.

Cùm enim $3\,b^2\,a - a^3$ æquetur z sol. sitque $b - a$ radici c, ęqualis; ergo $b - c$ ęquabitur a, quapropter solidum factum ex $3\,b^2$ in $b - c$ minus cubo ex $b - c$ ęquabitur z sol. at verò solidum illud affectum constat $3\,b^3 - 3\,b^2\,c$, & cubus negatus de solido, constat $- b^3 + 3\,b^2 c - 3\,b\,c^2 + c^3$, ergo omnibus ritè ordinatis, proueniet ęquatio $3\,b\,c^2 - c^3 = 2\,b^3 - z$ solido.

Proponitur æquatio cubica &c.

Vel sit eadem æquatio, vt priùs $3\,b^2\,a - a^3 = z$ sol. Itaque $b + a$ esto c, & erit $3\,b\,c^2 - c^3 = 2\,b^3 + z$ solido.

Cum enim $3\,b^2\,a - a^3$ æquetur z sol. sit autem $b + a$ radici c æqualis, ergo $c - b$ æquabitur a; ergo solidum ex $3\,b^2$ in $c - b$; minus cubo ex $c - b$ æquabitur z solido. Solidum autem illud affectum constat $3\,b^2\,c - 3\,b^3$, & cubus negatus de solido iam dicto constat $- c^3 + 3\,b\,c^2 - 3\,b^2\,c + b^3$ quamobrem facta ordinatione secundum Artem, fiet æquatio $3\,b\,c^2 - c^3 = 2\,b^3 + z$ solido.

Cum affectio est sub quadrato, & latere.

Si sit æquatio $a^3 + 3\,b^2\,a = z$ solido; & quidem $a - b$ esto c, ergo; $c^3 + 3\,b\,c^2 + 6\,b^2\,c$ æquabitur z solido $- 4\,b^3$.

Proponitur æquatio altera cubica.

Quoniam enim $a^3 + 3\,b^2\,a$ æquatur z solido, est autem $a - b$, radici c, ęqualis ergo $c + b$ æquabitur a; quare cubus ex $c + b$, adscito solido abs $3\,b^2$ in $c + b$; æquabitur z solido. At verò cubus ex $c + b$, constat $c^3 + 3\,b\,c^2 + 3\,b^2\,c + b^3$ solidum autem affectionis constat $3\,b^2\,c + 3\,b^3$, propterea facta ordinatione secundum Artem, fiet ęquatio, vt supra $c^3 + 3\,b\,c^2 + 6\,b^2\,c = z$ sol. $- 4\,b^3$. Vel,

Rursus eadẽ proponitur.

Si sit æquatio, vt supra $a^3 + 3\,b^2\,a = z$ solido, & quidem $a + b$ esto c, ergo $c^3 - 3\,b\,c^2 + 6\,b^2\,c$ ęquabitur z solido $+ 4\,b^3$.

Quoniam enim $a^3 + 3\,b^2\,a$ ęquatur z solido; est autem $a + b$ radici c, ęqualis; ergo $c - b$ æquabitur a, quare cubus ex $c - b$ adscito solido abs $3\,b^2$ in $c - b$ æquabitur z solido. At verò cubus ex $c - b$ constat $c^3 - 3\,b\,c^2 + 3\,b^2\,c - b^3$ solidum verò affectionis $3\,b^2\,c + 3\,b^3$; propterea facta ordinatione secundum Artem, fiet æquatio, vt supra $c^3 - 3\,b\,c^2 + 6\,b^2\,c = z$ solido $+ 3\,b^3$. De hoc infra.

SCHO-

SCHOLION.

HAEC vt melius intelligantur. Supponamus modo cubicam illam æquationem affirmatiuam a^3 † 3 b^2 a ⊐ z sol. Si igitur intelligamus radicem a, *multari quantitate nota* b; *fiet residuum* a, — b, *quod appellemus* e, *cum igitur* a — b, *æquetur* e; *ergò per antithesim* e ✣ b, *æquabitur* a, *& quia erat æquatio* a^3 † 3 b^2 a ⊐ z *sol. hic verò sumitur* e † b, *loco ipsius* a; *propterea, debet* e ✣ b, *subire multiplicationem, vt* a; *igitur ducatur* e ✣ b, *in se cubitè; & fiet* e^3 † 3 b e^2 ✣ 3 b^2 e † b^3 *& quoniam* a, *ducebatur in* 3 b^2 *cum esset solidum afficiens* 3 b^2 a; *faciendum est igitur solidum ex* e ✣ b, *in* 3 b^2 *facta multiplicatione; prouenit* 3 b^2 e ✣ 3 b^3 *vt patet; cum verò potestas foret affecta per adiunctionem huiusmodi solidi, propterea solidum hoc est addendum potestati, nempe cubo iam dicto ex* e ✣ b, *fit autem aggregatum* e^3 ✣ 3 b e^2 ✣ 6 b^2 e † 3 b^3 ⊐ z *solido; separentur autem ignotæ quantitates à notis, vt fiat æquatio, apta ad exhibendam quæsitam radicem, & proueniet per antithesin æquatio* e^3 ✣ 3 b e^2 † 6 b^2 e ⊐ z *sol.* — 4 b^3 *vt constat; neque dissimili modo ratiocinandum de cæteris æquationibus hactenus traditis ad hunc ordinem pertinentibus, & hunc in modum variatio fit radicis cremento, vel decremento quantitatis notæ; de quo etiam in sequentibus redibit sermo.*

Multa hoc in loco considerātur vnde plurimū supradicta elucescunt.

Obseruandum est autem, affectionem, in subrogatis attendi penes affectionem solidorum in æquatione, quod magnopere considerandum est; inde siquidem non modica suboriri potest æquiuocatio. Vnde si homogeneum sub gradu parodico, in primæua æquatione afficiatur symbolo † idem, quoque adhibendum in subrogatis; & si afficiatur nota —, idem retinendum.

Obseruanda quædam non exigui momenti.

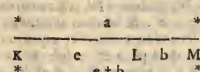
Ad maiorem illustrationem possumus numeros adhibere, si fuerit æquatio a^3 ✣ 3 b^2 a ⊐ *z solido ex hypothesi, quod* a — b *æquetur* e, *vnde sequitur* e ✣ b, *æquari* a; *Supponamus* a *esse* b; *&* b; *esse* 2; *ergò æquatio illa erit* 1 c ✣ 12 R ⊐ 288. *Sic autem* a — b *valebit* 4; *quamobrem eius cubus erit* 64, *&* 3 b e^2 *valebit* 96; *insuper* 6 b^2 e, *valebit itidem* 96, *horum summa est* 256; *at si ex* 288, z *solido, auferantur* 4 b^3, *quorum pretium est* 32 *remanebit pariter idem numerus* 256.

Superiora illustrantur.

Præter ea, quæ apud Vietam leguntur, nobis licebit alia in medium afferre deductionis gratia.

Proponitur æquatio cubica affirmatiua affecta sub latere.

Sit æquatio a^3 ✣ 3 b^2 a ⊐ z solido.



Deductio, quā Auctor instituit suprapositis æquationibus inseruiens Deducitur æquatio affecta tam sub latere quàm quadrato.

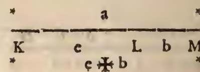
Recta KM, diuisa sit in L, & ipsa quidem KM, dicatur a, at LM sit b, segmentum KL, sit e, proprerea eadem KM, quæ dicitur a, erit e ✣ b. Ex hypothesi verò KM, cubus plus, triplo solido à quadrato LM in KM longitudinem æquatur z solido. Manifestum est autem cubum ex KM, æqualem esse cubo segmenti KL, plus triplo solido à quadrato KL in LM, plus triplo solido à quadrato LM, in KL, vna cùm cubo eiusdem LM, at solidum triplum à quadrato LM in KL. vna cum triplo cubo ex LM, additum cubo iam dicto ipsius KM; facit cubum ex KL, plus triplo solido à quadrato KL, in LM, longitudinem, plus triplo solido à quadrato LM, in KL, longitudinem. vna cum cubo eiusdem LM, plus triplo solido à quadrato LM, in longitudinem KL, vna cum triplo cubo ipsius LM; quæ simul quidem æquantur KM, cubo, plus triplo solido abs LM, quadrato in KM, sed hoc æquatur z solido, ergo e^3 ✣ 3 b e^2 ✣ 3 b^2 e ✣ b^3 ✣ 3 b^2 e ✣ 3 b^3 æquatur z solido, & per antithesin e^3 ✣ 3 b e^2 ✣ 6 b^2 e æquabitur z solido — 4 b^3. Hæc tamē est cubica æquatio affecta sub quadrato, & latere.

Sit æquatio a^3 — 3 b^2 a ⊐ z solido.

Proponitur æquatio cubica negatiua affecta sub latere.

Recta KM, multata sit segmento LM, at ipsa quidem KM, dicatur a; & LM, sit b, segmen-

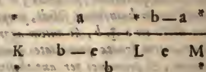
segmentum verò KL, esto e; propterea eadem KM, quæ dicebatur a, erit e † b; Manifestum est autem cubum ipsius KM, æqualem esse cubo segmenti KL, plus triplo solido à quadrato KL, in LM, plus triplo solido à quadrato LM, in KL, vna cum cubo eiusdem LM; At solidum triplum à quadrato LM, in KL,



vna cum triplo cubo ex LM, subtractum ex iam dicto cubo relinquit cubum ipsius KL, plus triplo solido à quadrato KL in LM, minus duplo cubo eiusdem LM, quæ simul quidem æquantur cubo ipsius KM, minus triplo solido à quadrato LM in KM; Sed hoc æquale est z solido, ergo $e^3 + 3\ b\ e^2 - 2\ b^3$ æquabitur z solido, & per antithesin $e^3 + 3\ b\ e^2$ æquabitur z solido $+ 2\ b^3$. Hæc æquatio cubica affecta est sub quadrato tātū.

Proponitur æquatio cubica amphibola affecta sub latere. Sit æquatio $3\ b^2\ a - a^3 = z$ solido.

Recta KM sit b à qua subtracta sit KL, vt remaneat LM, at verò segmentum KL sit a; vt LM remaneat $b - a$ eadem LM, esto e, vt KL sit $b - e$. Manifestum est autem cubum segmenti KL, esse æqualem cubo ipsius KM, minus triplo



solido abs KM, quadrato in LM, plus triplo solido ab LM, quadrato in KM, minus cubo ipsius LM; Solidum autem triplum de quo negatur cubus ex KL, est triplus cubus ipsius KM, minus triplo solido à quadrato eiusdem KM, in LM, à quo si subtrahatur cubus ipsius KL, remanet cubus LM, plus duplo cubo ex KM, minus triplo solido à quadrato LM in KM, quæ quidem æquantur triplo solido à quadrato ipsius KM, in KL, minus cubo ipsius KL; sed hæc æquantur z solido; ergo $e^3 + 2\ b^3 - 3\ b\ e^2$, æquabitur z solido, & ordinatione facta secundum Artem, proueniet æquatio $3\ b\ e^2 - e^3 = 2\ b^3 - z$ solido. Quę ęquatio cubica est affecta tantum sub quadrato.

Alia quoque æquationes Auctoris artificio, non dissimiliter à cubicis deducuntur. Persimili artificio, etiam ęquationes cubicæ, quibus nullus terminus deest à cubicis, in quibus deest secundus terminus, deducuntur. Hæc autem deductionis ratio magni facienda est, vt infra constabit.

Proponitur æquatio cubica affecta sub latere, vnde cubica affecta sub latere, à quadrato deducitur. Si sit $a^3 + d$ pl. $a = z$ sol. Supponatur $a + b$ esse e, & inde fiet æquatio $e^3 - 3\ b\ e^2 + \overline{3\ b^2 + d\ pl.}\ e = z$ sol. $+ d$ pl. $b + b^3$. Quandoquidem supponitur $a^3 + d$ pl. a, ęquari z solido, estque $a + b$ æqualis radici e; propterea $e - b$ æquabitur a, per antithesin, vt patet; quare cubus ex $e - b$; additus solido abs d pl. in $e - b$ æquabitur z sol.; est autem cubus ex $e - b$, solidum constans $e^3 - 3\ b\ e^2 + 3\ b^2\ e - b^3$, & solidum affectionis est $+ d$ pl. $e - d$ pl. b, ergo facta ordinatione secundum Artem, fiet æquatio, vt supra.

Proponitur æquatio cubica affirmatiua sub latere affecta vnde æquatio cubica affecta sub quadrato, & latere deducitur per decrementum. Si sit $a^3 + d$ pl. $a = z$ sol. $a - b$ esto e, ergo fiet æquatio $e^3 + 3\ b\ e^2 + \overline{3\ b^2 + b\ pl.}\ e = z$ sol. $- d$ pl. $b - b^3$.

Quoniam enim $a^3 + d$ pl. a æquatur z solido, & est $a - b$ radici e æqualis, ergo $e + b$ æquabitur a; Itaque cubus abs $e + b$, additus solido ex d pl. in e † b, æquabitur z solido. At cubus ex $e + b$ constat $e^3 + 3\ b\ e^2 + 3\ b^2\ e + b^3$; solidum autem affectionis est $+ d$ pl. e † d pl. b, ergo omnibus ordinatis ex Artis præceptis fiet æquatio, vt supra, &c.

Proponitur æquatio cubica affirmatiua affecta sub latere. Si sit $a^3 + d$ pl. $a = z$ sol. $b - a$ esto e, & erit æquatio $e^3 - 3\ b\ e^2 + \overline{3\ b^2 + d\ pl.}\ e = b^3 + d$ pl. $b - z$ solido.

Proponitur æquatio cubica negatiua affecta sub latere vnde æquatio cubica affecta sub latere, & quadrato deducitur. Quoniam enim $a^3 + d$ pl. a æquatur z solido; est autem $b - a$ radici e, æqualis; ergo $b - e$ æquabitur a, atque adeo cubus abs $b - e$, adiunctus solido abs d pl. in $b - e$ æquabitur z solido. Sed cubus abs $b - e$, constat $b^3 - 3\ b^2\ e + 3\ b\ e^2 - e^3$ solidum autem affectionis est $+ d$ pl. $b - d$ pl. e ergo ritè omnibus ordinatis secundum Artem, fiet æquatio, vt supra.

Sit fuerit æquatio $a^3 - d$ pl. $a = z$ sol. $a + b$ esto e, erit igitur æquatio $e^3 - 3\ b\ e^2 + \overline{3\ b^2 - d\ pl.}\ e = z$ sol. $+ b^3 - d$ pl. b.

Quo-

Quoniam enim a^3 — d pl. a ęquatur z solido; est autem a ✠ b radici e, æqualis; ergo e — b æquabitur a; proinde cubus abs e — b multatus solido abs d pl. in e — b æquabitur z solido. Sed cubus abs e — b constat e^3 — 3 b e^2 ✠ 3 b^2 e — b^3 solidum autem affectionis est — d pl. e ✠ d pl. b facta ordinatione secundum Artem, fiet æquatio, vt supra.

Si sit a^3 — d pl. a ⊐ z sol. a — b esto e, & erit æquatio e^3 † 3 b e^2 $\overline{✠ 3 b^2 — d pl.}$ e ⊐ z sol. ✠ d pl. b — b^3.

Cùm enim a^3 — d pl. a æquetur z solido; est verò a — b radici e, æqualis; ergo e † b; æquabitur a, ob id cubus abs e ✠ b; multatus solido abs d pl. in e † b, æquabitur z solido. Sed cubus abs e † b constat e^3 † 3 b e^2 ✠ 3 b^2 e ✠ b^3. Solidum autem affectionis est — d pl. e — d pl. b, facta ordinatione secundum Artem fiet æquatio, vt supra.

Proponitur æquatur quadratica negatiua, vnde cubica deducitur.

Si sit æquatio a^3 — d pl. a ⊐ z solido b — a esto e; & fiet æquatio e^3 — 3 b e^2 $\overline{✠ 3 b^2 — d pl.}$ e ⊐ b^3 — d pl. b — z solido. Cæterum a^3 — d pl. a æquatur z solido; est autem b — a; radici e, æqualis; proinde b — e ęquabitur a; quamobrem cubus abs b — e multatus solido abs d pl. in b — e æquabitur z solido. Sed cubus ex b — e constat b^3 — 3 b^2 e ✠ 3 b e^2 — e^3. Solidum affectionis est — d pl. b ✠ d pl. e ergo facta ordinatione secundum Artem; proueniet æquatio, vt supra.

Proponitur æquatio cubica negatiua affecta latere vnde cubica affecta tam sub quadrato, quàm sub latere negatiua tamen, deducitur.

Si sit æquatio d pl. a — a^3 ⊐ z solido; a ✠ b esto e, & erit $\overline{d pl. — 3 b^2}$ e ✠ 3 b e^2 — e^3 ⊐ z solido ✠ d pl. b — b^3.

Quoniam enim d pl. a — a^3 æquatur z solido, & est a ✠ b, æqualis radici e; propterea e — b; æquabitur a; itaque solidum factum abs d pl. in e — b multatum, cubo ex e — b; ęquatur z solido. Solidum autem abs d pl. in e — b constat d pl. e — d pl. b cubus ablatitius est — e^3 ✠ 3 b e^2 — 3 b^2 e ✠ b^3 omnibus ritè secundom Artis pręcepta ordinatis, fiet æquatio, vt supra.

Proponitur æquatio cubica ambigua, vnde deducitur ambigua cubica affecta sub quadrato & latere. Hæc deductio per crementum.

Si sit æquatio d pl. a — a^3 ⊐ z solido; a — b esto e, & proueniet ęquatio $\overline{d pl. — 3 b^2}$ e — 3 b e^2 — e^3 ⊐ z solido — d pl. b ✠ b^3.

Cùm enim d pl. a — a^3 ęquetur z solido; est autem a — b, radici e ęqualis; ergo e ✠ b æquabitur a; proinde solidum abs d pl. in e ✠ b multatum cubo ex e ✠ b ęquabitur z solido. Solidum abs d pl. in e ✠ b constat d. pl. e ✠ d pl. b, cubus ablatitius est — e^3 — 3 b e^2 — 3 b^2 e — b^3 omnibus autem ritè ordinatis, proueniet ęquatio, vt supra.

Proponitur eadem æquatio, &c. Hæc deductio per d. crementum.

Si sit æquatio d pl. a — a^3 ⊐ z solido b — a esto e, & proueniet ęquatio $\overline{d pl. — 3 b^2}$ e ✠ 3 b e^2 — e^3 ⊐ d pl. b — b^3 — z solido.

Quoniam d pl. a — a^3 æquatur z solido; estque b — a radici e ęgualis ergo b — e ęquabitur a, proinde d pl. in b — e minus cubo ex b — e ęquabitur z solido; at verò solidum abs d pl. in b — e constat d pl. b — d pl. e; cubus ablatitius est — b^3 ✠ 3 b^2 e — 3 b e^2 ✠ e^3; Omnibus ritè ordinatis secundum Artem, proueniet ęquatio, vt supra.

Hęc sunt iuxta Vietę inuenta, ad quorum maiorem explicationem non pigebit hìc paululum immorari. Repetamus igitur primam illam ęquationem a^3 ✠ d pl. a ⊐ z solido, à qua deduci ęquationem affectam tam sub quadrato, quàm sub latere dictum fuit. Supponendum est a ✠ b esse e, quod plasmaticum est, cùm itaque nota quantitas b, addita sit ignotæ a; aucta est radix de qua quæritur huiusmodi cremento, at si a † b, ęquetur e; per μετατιαν, fiet a æqualis e — b. In illa autem æquatione a, supponebatur cubicè ducta, cùm cubus ipsius adauctus solido ab eadem radice in planum coefficiens foret ęqualis homogeneo datæ mensuræ, cuiusmodi est z solidum, proinde, e — b, æquipollens radici a, cubicè ducatur, vt proueniat e^3 — 3 b e^2 ✠ 3 b^2 e — b^3, superest, vt subeat eam, quam a^3, affectionem solidi; solidum quidem afficiens est ✠ d pl. e — d pl. b; (præponendum est symbolum †, cum affectio veteris æquationis sit per affirmationem; est enim æquatio illa καταφατική) propterea orietur æquatio e^3 — 3 b e^2 ✠ 3 b^2 e — b^3 † d pl. e — d pl. b ⊐ z solido; quantitates autem ignotæ vnam obtineant æquationis partem, vt quæ sunt ignotæ cùm illis comparentur, & erit e^3 — 3 b e^2 † $\overline{3 b^2 † d pl.}$ e ⊐ z sol. ✠ d pl. b † b^3.

Hactenus proximè tradita sunt ex Vieta; multa supersunt, tractãda ad argumentum spectantia.

Superiora declarantur mediantibus secundis radicibus.

Hæc igitur equatio deducitur ex illa, quam superiùs attulimus. Hæc numeris explicari possunt; nam per d pl. intelligamus 20; & per z solidum, intelligamus 48, adeo vt æquatio fiat 1 C † 20 R = 48. At verò per b, intelligamus quemcumque numerum, exempli gratia 5; & 1 R † 5 esto 1 A, hoc est vna secunda radix, ob id 1 A — 5 æquabitur 1 R; ergo cubo abs 1 A — 5, nimirum 1 A C — 15 A Q † 75 A — 125; si addatur solidum abs 20; in 1 A — 5, nempe 20 A — 100, fit 1 A C — 15 A Q † 95 A — 225, & æquabitur 48, factaque ordinatione secundum Artem; proueniet æquatio 1 A C — 15 A Q † 95 A = 273. In illa autem 1 C † 20 R = 48, radicis valor est 2; in hac verò est 7. Itaque a † b hoc est e, erit 7; quod si a † b, æquabatur e, ob id a † b, valebit 7; ergo cùm b, valeat ex hypothesi 5; fiet 2, valor ipsius a.

Auctoris deducendi ratio in his æquationibus non est absimilis illi, qua superiùs est vsus in deductionibus aliarum.

Si quis autem nostra deductionis forma vti velit, imitando quæ supra docuimus de alijs equationibus, facilè consequetur intentum, non enim omninò dissimilis est deducendi ratio; propterea præ oculis illa, qua suo loco vsi sumus, habeatur, citra laborem enim æquationibus etiam de quibus nunc disseritur, satisfieri poterit.

Plerumque contingit æquationum planas vel solidas esse radices.

Tunc quid agendum, cum scilicet radix est plana.

Exemplum cùm radix est plana.

Contingit etiam aliquot potestatum planas, vel solidas radices habentium, à potestatibus simplicium radicum deduci; Igitur æquatio in qua Quadratoquadratum est potestas affecta sub quadrato, deducitur quidem ab æquatione in qua quadratum afficitur sub latere. Itaque si a^2 ✠ b a æquetur z pl. ab huiusmodi æquatione deducitnr altior iam dicta, ex hypothesi, quòd b a, sit e^2 vel e planum, & e^4 ✠ $b^2 e^2$ æquabitur b^2 z pl.

Cùm enim a^2 ✠ b a æquetur z pl., sitque b a, æquale e^2, ob id $\frac{e^2}{b}$ æquabitur a; quamobrem quadratum abs $\frac{e^2}{b}$ adiunctum plano sub b, & $\frac{e^2}{b}$, nempe $\frac{e^4}{b^2}$ ✠ e^2 equabitur z plano, omnia quidem ducantur in b^2, ergo e^4 ✠ $b^2 e^2$ æquabitur b^2 z pl., & quia e^2, statuitur radix plana, propterea sic erit enuncianda, quam superiùs attulimus, æquatio e pl. quadratum ✠ b^2 e pl. = b^2 z pl.

Ad maiorem supradictorũ explicationem quadam hic aduertuntur.

Et quidem, vt magis superiora explicentur. Si statuamus b a, æquari e^2; manifestum est productum ex b, in a, æquari quadrato ex e, id enim eo genere loquendi significamus; at si quadratum æquetur facto sub duobus lateribus per applicationem ad vnum ex illis, aliud emergit, vt constat, quare si e^2, applicetur lateri, quod appellatur b; vtique magnitudo ortiua fiet a, hoc enim pacto magnitudo ortiua ducta in metientem facit planum, quod applicatur; Itaque $\frac{e^2}{b}$ ducatur in b; et proueniet e^2, vt constat, hoc autem addendum est quadrato ex $\frac{e^2}{b}$, vt enim $\frac{e^2}{b}$ æquatur a, ita huiusmodi quadratum equabitur a^2, est autem quadratum prædictum $\frac{e^4}{b^2}$, propterea fiat additio, vt dictum est, quandoquidem proposita illa æquatio erat affirmatiuè affecta, atque proueniet $\frac{e^4}{b^2}$ ✠ e^2 = z plano; quod si omnia ducantur in b^2, non tolletur equalitas, cùm per communem multiplicationem æqualitas adhuc subsistat, & hunc in modum tollitur fractio, vt proueniat a^4 ✠ $b^2 e^2$ = b^2 z pl. quia verò, radix plana supponitur, propterea quod b a, cui supponitur æquari e^2, planum est; ob id retenta natura ipsius radicis enuncianda equatio est; atque adeo exprimenda radix, prout ipsius exigit natura, vnde dicemus e pl. 2 quo symbolo denotamus quadratum ipsius e plani, & formabimus æquationem, vt supra tradidimus, nimirum e pl. 2 ✠ b^2 e pl. = b^2 z pl.

Retinenda est radicis natura, propterea de ipsa, quatenus plana est æquatio enunciari debet.

Si verò a^2 — b a æquetur z pl. facta, simili hypothesi, ac supra, nempe b a, esse e^2, vel e planum, & e^4 — $b^2 e^2$ equabitur b^2 z pl. Vel e pl. 2 — b^2 e pl. = b^2 z pl.

Insuper si b a — a^2 equetur z plano ex eadem hypothesi, quòd b a, sit e^2, vel e planum $b^2 e^2$ — e^4 æquabitur b^2 z pl.

Explicatur æquatio de radice solida.

Si a^3 ✠ b a equetur z pl. ex hypothesi, quod b^2 a sit e^3, vel e solidum, fiet e^9 † $b^5 e^3$ = b^6 z pl.

Cùm enim a^3 † b a, æquetur z pl. supponatur verò b^2 a æquari e^3 ergo $\frac{e^3}{b^2}$ æquabitur a; Itaque cubus ex $\frac{e^3}{b^2}$ vna cum $\frac{b e^3}{b^2}$, nempe $\frac{e^9}{b^6}$ ✠ $\frac{e^3}{b}$ equabitur z plano. Omnibus verò ductis in b^6; fiet e^9 ✠ $b^5 e^3$ æqualis b^6 z pl.

Supradictorũ declaratio ac accurata explicatio.

Et quidem, vt magis superiora explicentur. Si statuamus b^2 a equari e^3, manifestum est ex applicatione ipsius ad b^2, oriri a; propterea quod b^2 a solidum constans ex b^2, in a, æquale est solido, nempe e^3; si igitur hoc solidum applicetur b^2

necessa-

necessariò fit magnitudo ortiua a; hęc enim ducta in metientem, puta b^2, facit solidum, quod applicatur, scilicet e^3; si igitur $\frac{e^3}{b^2}$, ęquetur a; fungatur $\frac{e^3}{b^2}$ eodem numere, quo fungitur a; propterea, vt a, ducebatur in b; duci etiam debebit in b, ipsum $\frac{e^3}{b^2}$, & fiet productum $\frac{b\,e^3}{b^2}$, hoc autem addendum est ipsi $\frac{e^3}{b^2}$ ducto in se quadraticè, vt enim $\frac{e^3}{b^2}$ æquatur a, ita $\frac{e^3}{b^2}$ quadraticè ductus, æquabitur a, quadraticè multiplicato, nempe a^2; illud autem est $\frac{e^6}{b^4}$, & huic addendum est $\frac{b\,e^3}{b^2}$, quoniam a^2, affectum erat per affirmationem ipsius b a; igitur fiet æquatio $\frac{e^6}{b^4}$ + $\frac{e^3}{b}$ = z plano nempe e^6 + b^2 e^3 æquabitur b^4 z pl., videlicet omnibus ductis in b^4, &c.

Si enim $\frac{e^6}{b^4}$, quod est quadratum ipsius $\frac{e^3}{b^2}$ sibi adsciscat $\frac{b\,e^3}{b^2}$, quod est factum ex $\frac{e^3}{b^2}$ in b; coefficientem londitudinem; fit $\frac{e^6}{b^4}$ + $\frac{b\,e^3}{b^2}$, quod ęquabitur z plano, at si illa ęquationis pars ducatur in b^4, fit e^6 + b^2 e^3; nam si $\frac{e^6}{b^4}$ ducatur in b^4, prouenit e^6; si verò $\frac{b\,e^3}{b^2}$ ducatur in b^4, fit productum $\frac{b^5 e^3}{b^2}$, nempe b^2 e^3. Itaque e^6 + b^2 e^3, ęquabitur b^4 z pl. Ex his intelliges ni fallor quanta sit adhibenda industria in indaganda æquationum natura. Itaque. *Superiora explicantur.*

Si a^2 — b a æquetur z plano. Supponamus b^2 a esse e^3, vel si placet, e solidum, & e^6 — b^3 e^3 æquabitur b^4 z pl. *Proponitur æquatio quadratici ordinis negatiua*

Si b a — a^2 ęquetur z plano; b^2 a esto e^3 vel e solidum; b^3 e^3 — e^6 æquabitur b^4 z pl. *Item amphibola.*

Si a^3 + b a^2 ęquetur z solido, b a est e^2, & e^6 + b^2 e^4 æquabitur b^3 z sol.

Cùm enim a^3 + b a^2 æquetur z solido; sitque b a, æquale e^2; ergo $\frac{e^2}{b}$ ęquabitur a; quare ex propositis $\frac{e^6}{b^3}$ + $\frac{e^4}{b}$ æquabitur z solido, omnibusque ductis in b^3, & e^6 + b^2 e^4 æquabitur b^3 z sol. quia tamen e^2 radix ponebatur plana, fiet æquatio enuncianda e planum 3 + b^2 e plani 2 = b^3 z solido. *Exemplum de æquatione cubica affirmatiua.*

Et quidem vt magis superiora explicentur. Si statuamus b a, æquari e^2; consequens est ex supra traditis, si e^2 applicetur vni ipsorum laterum, puta b, fieri magnitudinem ortiuam a, hoc enim pacto magnitudo ortiua ducta in metientem, facit planum, quod applicatur, & non dissimiliter ratiocinando, ac supra deprehendemus, fieri ęquationem, quam diximus. *Superiora explicantur.*

Si a^3 — b a^2 æquetur z solido; b a esto e^2 vel e planum si placet, & e^6 — b^2 e^4 æquabitur b^3 z sol. Vel e pl. 3 — b^2 e pl. 2 = b^3 z solido. *Exemplum de æquatione cubica negatiua.*

Si b a^2 — a^3 æquętur z solido b a esto e^2 vel e planum, & b^2 e^4 — e^6 ęquabitur b^3 z sol. Vel b^2 e pl. 2 — e pl. 3 = b^3 z sol. *Exemplum de æquatione cubica amphibola.*

S C H O L I O N.

IN supradictorum gratiam hæc subijciemus. Sit prima illa æquatio a^2 † b a = z pl. Ipsius quidem a, pretium esto 4, & b sit 16; at verò z pl. sit 80; b a esto 1 A Q hoc est quadratum secundæ radicis, & erit æquatio 1 A Q Q † 256 A Q = 20480; & hoc modo reperiemus ipsius 1 A Q pretium esse 64, cuius Q Q est 4096, cui si addatur 16384 valor ipsorum 256 A Q fit summa 20480. Itaque rectè dicebamus 1 A Q Q † 256 A Q æquari 20480. Cum igitur enunciatum fuerit e^6 + b^2 e^3 æquari b^4 z pl. Per e^3 intelligamus at, nempe b a, quod esse 64 dicebamus, & erit ipsius e^6 pretium, vt dictum est; 4096, 64 verò b^2 e^3 valebit 20480, & fiet summa 20480; quamobrem eadem consurgit summa ex b^4 hoc est 256 in z pl. hoc est 80, & eodem modo in cæteris æquationibus ratiocinandum *Superiùs tradita declarantur.*

Hic tamen paululum immorandum; atque considerandum à realibus quantitatibus, imaginarias deduci, etiam per æquipollentiam cum illis. Si enim excogitemus quadratum aliquod, cuius latus, sit vnum è duobus rectanguli, cuius alterum sit coefficiens longitudo itaut, hoc aggregatum conferatur alicui magnitudini datæ; planum illud, coefficienti applicatum, restituit latus quadrati; atque adeo huiusmodi planum applicatum, latus est, huius autem lateris quadratum, quantitas realis est, tamen illud planum applicatum quadraticè ductum, facit quoque planum, nam tametsi planum numerator ad planoplanum ascendat, denomi- *Multa hic lōga dissertatione tractantur, quæ maximè conducunt ad supradictorū explicationē & eorum quæ sunt deinceps futura.*

nominator, puta latus ad planum multiplicatione peruenit, quod si illud huic fuerit, vt re vera est applicatum fit planum, vt constat. Nihilominus, tunc planoplanitiem consequitur cum ab applicatione librratur, fitque soluta magnitudo affecta per communem ductum homogenea sub latere, quo pacto etiam ob eandem communem multiplicationem, fit ascensus ad imaginarias quantitates, ex parte homogenei datæ mensuræ; atque adeo hac Arte à plana radice, & modo etiam persimili à solita, fit altioris ordinis æquationum deductio. Itaque huiusmodi deductio non per multiplicationem tantum, sed etiam per liberationem, à vinculis applicationis; quod est obseruandum; ad dignoscenda æquationum primordia.

Superior autem deductionis ratio Vietæa est; quæ verò nostra nunc sequitur.

Auctoris propria deductionis ratio supra dictarum æquationum in quibus Quadrato quadratum affigitur sub quadrato ab æquatione quadratica.

Si $a^2 + b\,a$ æquetur z plano, Manifestum est homogeneum datæ mensuræ aliam per eius applicationem ad coefficientem longitudinem induere posse formam, itaque applicatione facta, proueniat ortiua magnitudo d; itaut illa æquatio ad hanc sit reuocata $a^2 + b\,a = b\,d$, & ex hypothesi, quod e^2 æquetur $b\,a$, per applicationem proueniet $\frac{e^2}{b} = a$; quare in superiori æqualitate, ad analogismum reuocata sit vt $a + b$ ad b, ita d, ad a, ergo si loco ipsius a, substituatur $\frac{e^2}{b}$, fiet vt $\frac{e^2}{b} + b$ ad b, ita d ad $\frac{e^2}{b}$ vnde per multiplicationem institutam inter extrema, & media, rursus proueniet æquatio $\frac{e^4}{b^2} + e^2 = b\,d$; omnibusque ductis in b^2, fiet $e^4 + b^2 e^2 = b^3 e$. Itaque æquationem in qua quadratoquadratum afficitur affirmatè sub quadrato, per interceptum analogismum ab æquatione in qua quadratum afficitur affirmatè sub latere, deduximus, Quod oportebat, &c.

Æquationum in quibus quadrato quadratum afficitur sub quadrato deductio Auctoris methodo ab æquationibus quadraticis.

Si $a^2 - b\,a$ æquetur z plano Manifestum est homogeneum datæ mensuræ aliam per eius applicationem ad coefficientem longitudinem induere posse formam; Itaque applicatione facta, proueniat ortiua magnitudo d; itaut illa æquatio ad hanc sit reuocata $a^2 - b\,a = b\,d$, & ex hypothesi quod e^2 æquetur $b\,a$ per applicationem proueniet $\frac{e^2}{b} = a$, quare cum superiori æqualitate ad analogismum reuocata, sit vt $a - b$, ad b, ita d, ad a; ergo si loco ipsius a, substituatur $\frac{e^2}{b}$, fiet vt $\frac{e^2}{b} - b$ ad b ita d ad $\frac{e^2}{b}$; vnde per multiplicationem institutam inter extrema, & media, rursus proueniet æquatio $\frac{e^4}{b^2} - e^2 = b\,d$; omnibusque ductis in b^2, fiet $e^4 - b^2 e^2 = b^3 d$. Itaque æquationem in qua quadratoquadratum afficitur negatè sub quadrato per interceptum analogismum, ab æquatione in qua quadratum afficitur negatè sub latere deduximus, Quod oportebat, &c.

Æquationũ, in quibus quadratoquadratum afficitur sub quadrato deductio Auctoris methodo ab æquationibus quadraticis.

Si $b\,a - a^2$ æquetur z plano, Manifestum est homogeneum datæ mensuræ, aliam per eius applicationem, ad coefficientem longitudinem induere posse formam; itaque applicatione facta, proueniat ortiua magnitudo d, itaut illa æquatio ad hanc sit reuocata $b\,a - a^2 = b\,d$ ex hypothesi, quod e^2 æquetur $b\,a$ per applicationem proueniet $\frac{e^2}{b} = a$, quare cùm superiori æquatione ad analogismum reuocata sit, vt $b - a$ ad b ita d ad a ergo si loco ipsius a, substituatur $\frac{e^2}{b}$, fiet vt $b - \frac{e^2}{b}$ ad b; ita d ad $\frac{e^2}{b}$; vnde per multiplicationem institutam inter extrema, & media; rursus proueniet æquatio $e^2 - \frac{e^4}{b^2} = b\,d$; omnibusque ductis in b^2, fiet $b^2 e^2 - e^4 = b^3 d$. Itaque æquationem quadratoquadraticam ἀμφιβόλως affectam, sub quadrato per interceptum analogismum ab æquatione, in qua quadratum afficit homogeneum sub latere, deduximus, Quod oportebat, &c.

Quadratoquadrata quidem affecta ab affectis quadratis quoque deducuntur, de quo hic aliqua dicenda occurrunt, at primò cùm quadratum fuerit affectum sub latere. Sit igitur æquatio καταφατική.

Quadratoquadraticarum æquationum deductio ab affectis quadratis.

Si $a^2 + b\,a$ æquetur z plano; Hinc deducetur æquatio quadratoquadratica, puta $a^4 + \overline{b^2 + 2\,b\,z\,pl.}\;a = z\,pl.pl. + b^2\,z\,pl.$

Hunc enim in modum ratiocinandum. Cùm sit æquatio $a^2 + b\,a = z$ plano, ergo per antithesin a^2 æquabitur $z\,pl. - b\,a$, vtraque parte ducta quadraticè, fiet $a^4 = z\,pl.pl. - 2\,b\,z\,pl.\,a + b^2 a^2$. At verò affectio illa $b^2 a^2$ ex æquatione proposita interpretationem accipiens, valet $b^2\,z\,pl. - b^3 a$; etenim si sit æquatio $a^2 = z\,pl. - b\,a$, & vtraque pars ducatur in b^2, fiet $b^2 a^2 = b^2\,z\,pl. - b^3 a$, huiusmodi propterea adscita interpretatione, ordinationeq; facta secundum Artem, proueniet æquatio,

vt

vt ſupra dicebamus; Igitur ęquatio quadratoquadratica affecta à quadratica affecta ſub latere deducitur. Sed numeris hęc illuſtremus.

Proponitur æquatio quadratici ordinis affirmatiua vnde quadratoquadratica deducitur affecta ſub latere.

Si 1 Q + 10 R æquetur 24, etiam 1 Q Q + 1480 R ęquabitur 2976. Cùm enim 1 Q + 10 R æquetur 24; per antitheſin etiam 1 Q = 24 — 10 R, & vtraque parte ducta quadraticè; fiet 1 Q Q = 576 — 480 R + 100 Q. At verò 100 Q valebunt 2400 — 1000 R, nam ęquationis vtraque parte ducta in 100 quadratum ex 10; producitur ęquatio 100 Q = 2400 — 1000 R Quamobrem ſi loco 100 Q ſubſtituamus 2400 — 1000 R, hoc eſt ad 576 — 480 R, addamus 2400 — 1000 R, fiet ſumma 2976 — 1480 R, & erit 1 Q Q = 2976 — 1480 R, & per antitheſin fiet 1 Q Q + 1480 R = 2976. Hinc itaque patent, quę ſuperiùs attulimus; cùm ſcilicet quadratoquadratum ab affecto quadrato ſub latere deducitur. Sit deinde æquatio αποφατικὴ.

Proponitur æquatio negatiua quadratici ordinis vnde quadratoquadratica deducitur affecta ſub latere.

Nec diſſimiliter ſi a^2 — b a æquetur z plano; proueniet etiam æquatio huiuſmodi a^4 — $\overline{b^3 - 2\ b\ z\ pl.}$ a = z pl.pl. + b^2 z pl., & in hac non ſecus, ac in præcedenti diſcurrendum. Numeris hæc declarantur; nam,

Si 1 Q — 10 R æquetur 24; proueniet hinc æquatio 1 Q Q — 1480 R = 2976

Quod ſi fuerit æquatio αμφιβολος, Vt ſi b a — a^2 æquetur z plano; prouenit æquatio hunc in modum $\overline{b^3 - 2\ b\ z\ pl.}$ a — a^4 = b^2 z pl. — z pl.pl., quod ex ſupra traditis facillimum eſt deprehendere.

Numeris eadem tractantur.

Si 11 R — 1 Q æquetur 24; erit etiam æquatio huiuſmodi 803 R — 1 Q Q = 2328; quæ ſic declarari poſſunt. Quoniam enim 11 R — 1 Q æquatur 24, fiet per antitheſin 1 Q = 11 R — 24; vtraque parte ducta quadraticè, fiet 1 Q Q = 121 Q — 528 R + 576. At verò 121 Q valent 1331 R — 2904; etenim ſi vtraque æquationis pars ducatur in 121, quadratum ex 11; fiet 121 Q = 1331 R — 2904. Itaque 121 Q valent, vt ſupra dicebamus 1331 R — 2904; proinde ſi ad — 528 R + 576 addamus 1331 R — 2904, fiet ſumma 803 R — 2328, æqualis ipſi 1 Q Q, vt dictum eſt.

Deductio quadratoquadraticarum aquationũ ſub quadrato, & latere affectarum, à quadraticis affectis.

Quòd ſi aperienda eſt deductionis ratio biquadratorum affectorum, tam ſub quadrato, quàm ſub latere à quadratis affectis ſub latere; ita ratiocinandum.

Primo proponitur affirmatiua quadratica vnde fit deductio.

Si a^2 + b a æquetur z pl. + d pl. erit etiam æquatio a^4 — $\overline{2\ d\ pl. - b^2}$ a^2 + 2 b z pl. a = z pl.pl. — d pl. plano.

Quoniam enim a^2 + b a æquatur z pl. + d pl. fiet per antitheſin ęquatio a^2 — d pl. = z pl. — b a, vtraque parte ducta quadraricè, fiet a^4 — 2 d pl. a^2 + d pl. pl, = z pl. pl. — 2 b z pl. a + b^2 a^2, omnibus autem ritè ordinatis, proueniet æquatio, quam ſuperiùs attulimus.

Secundo negatiua itidem quadratica vnde fit deductio.

Numeris eadem tractantur.

Si 1 Q + 10 R = 80 + 16 hoc eſt 96, compoſito ex 80, & 16, erit etiam æquatio 1 Q Q — 132 Q + 1600 R = 6144.

Cùm enim ſit 1 Q + 10 R = 80 + 16 erit per antitheſin 1 Q — 16 = 80 — 10 R, & vtraque parte ducta quadraticè, fiet 1 Q Q — 32 Q + 256 = 6400 — 1600 R + 100 Q & ordinata ęquatione ſecundum Artem proueniet 1 Q Q — 132 Q + 1600 R = 6144.

S C H O L I O N.

Superiora ſpeciebus tradita numeris explicantur.

Quæ de ſpeciebus diximus, numeris accommodari poſſunt. Vt ſi per a^2 intelligamus 36. Itaut ipſius a, valor ſit 6, inſuper per b, intelligamus 10; vt per d, 16; & per z; 80, & eodem pacto ratiocinando. inuenies æquationem inter ea, quæ diximus, & hæc eadem declaratio iuxta præſcriptum radicis valorem fieri poterit in æquatione numeroſa, etenim 1 Q Q valebit 4752, & 1600 R valebunt 9600, itaut 1 Q Q — 132 Q + 1600 R valeant 6144, quantum valet altera æquationis pars. Itaquidem ſi 1 Q + 10 R æquetur 96, per antitheſin fiet 1 Q = 96 — 10 R, vtraque parte ducta quadraticè,

fiet

fiet 1 QQ = 9216 — 1920 R + 100 Q, & ordinata æquatione, proueniet 1 QQ — 100 Q + 1920 R = 9216.

Æquatio negatiua. Si a^2 — b a æquetur z pl. + d pl. erit quoque a^4 — $\overline{2\ d\ pl. — b^2}$ a^2 — 2 b z pl. a = z pl. pl. — d pl. plano.

Æquatio amphibola. Si 1 Q — 10 R æquetur 80 + 16 hoc est 96 composito, &c. etiam 1 QQ — 132 Q — 1600 R æquabitur 6144.

Si b a — a^2 æquetur z pl. + d pl. etiam $\overline{b^2 — 2\ z\ pl.}$ a^2 — 2 b d pl. a — a^4 æquabitur z pl. pl. — d pl. plano.

Si 22 R — 1 Q = 80 + 16 hoc est 96; &c. erit etiam 324 Q — 704 R — 1 QQ = 6144.

Æquatio affirmatiua, vbi comparationis homogeneum est per modum differentiæ. Si a^2 + b a, æquetur z pl. — d pl. etiam a^4 + $\overline{2\ d\ pl. — b^2}$ a^2 + 2 b z pl. a æquabitur z pl. pl. — d pl. pl.

Cùm enim a^2 + b a, æquetur z plano — d plano; per antithesin a^2 + d pl. = z pl. — b a; vtraque parte ducta quadradraticè, proueniet a^4 + 2 d pl. a^2 + d pl. pl. = z pl. pl. — 2 b z pl. a + b^2 a^2, & ordinatione facta secundum Artem, proueniet æquatio vt supra.

Si 1 Q + 10 R, æquetur 84 — 60; hoc est 1 Q + 10 R æquetur 24, differentiæ inter 84, & 60, & erit etiam æquatio 1 QQ + 20 Q + 1680 R = 3456.

Cùm enim sit 1 Q + 10 R = 84 — 60; erit per antithesin 1 Q + 60 = 84 — 10 R, & vtraque parte ducta quadraticè, fiet 1 QQ + 120 Q + 3600 = 7056 — 1680 R + 100 Q, & ordinatione proueniet 1 QQ + 20 Q + 1680 R = 3456.

Quando comparationis homogeneum non proponitur per modum differentiæ, &c. At si comparationis homogeneum non proponatur per modum differentiæ sed; sit æquatio 1 Q + 10 R = 24. Per antithesin fiet 1 Q = 24 — 10 R, & vtraque parte ducta quadraticè, fiet 1 QQ = 576 — 480 R + 100 Q, & ordinata æquatione fiet 1 QQ — 100 Q + 480 R = 576. Quæ numeris declarantur, nam in illa æquatione 1 Q + 10 R = 84 — 60 radicis pretium est 2, & ideo in æquatione 1 QQ + 20 Q + 1680 R = 3456 cùm sit idem radicis valor 1 QQ valebit 16, & 20 Q valebunt 80; demùm 1680 R; valebunt 3360, itaut 1 QQ + 20 Q + 1680 R valeat 3456, quantus est valor alterius partis; &c. & in illa alia æquatione 1 QQ — 100 Q + 480 R = 576 certè 1 QQ, valebit 16, & 100 Q valebunt 400 insuper 480 R, valor erit 960 itatut totius 1 QQ — 100 Q + 480 R, pretium sit 576, quantum est pretium alterius partis.

Æquatio negatiua. Si a^2 — b a = z pl. — d pl. erit etiam a^4 + $\overline{2\ d\ pl. — b^2}$ a^2 — 2 b z pl. a = z pl. pl. — d pl. plano.

Si 1 Q — 10 R æquetur 84 — 60; etiam 1 QQ + 20 Q — 1680 R, æquabitur 3456.

Æquatio amphibola. Si b a — a^2 æquetur z pl. — d pl. etiam 2 b d pl. a + $\overline{b^2 — 2\ z\ pl.}$ a^2 — a^4 æquabitur z pl. pl. — d pl. plano.

Si 14 R — 1 Q æquetur 84 — 60 hoc est 24 differentiæ inter 84, & 60; etiam 1680 R + 28 Q — 1 QQ = 3456, &c.

Sed hæc ad Artis integritatem, absolutamque tractationem ex Vieta dicta sint, quod nostrum est subijciamus, & quod attinet ad affectionem biquadratorum, sub latere, & quadrato; non aliter instituenda solùm id adflam; etiam à quadrato affecto sub latere deduci posse quadratoquadratum affectum sub quadrato, & latere, quamuis homogeneum datæ mensuræ simplex constitueretur, vnde cùm fuerit a^2 + b a = z plano; Perspicuum est per antithesin fieri posse a^2 = z plano — b a, & vtraque parte æquationis ducta quadraticè fit a^4, æquale z pl. pl. — 2 b z pl. a + b^2 a^2, & per antithesin fiet a^4 — b^2 a^2 + 2 b z pl. a = z pl. pl. hunc enim in modum ordinata erit æquatio.

Affectio quadratoquadratorum multiplex. Affectio quadratoquadratorum, est vel sub cubo, vel sub cubo, & quadrato, Ad primam affectionem, quod attinet: de his enim in presenta loquimus, non ignorantes alijs quoque modis affectionem contingere.

Proponitur exemplum idem quod declaratur, Si a^2 + b a æquetur z plano, etiam a^4 $\frac{+\ 2\ b\ z\ pl. + b\ z}{z\ pl. + b\ z}$ a^3 æquabitur $\frac{z\ pl.\ pl.\ pl.}{z\ pl. + b\ a}$.

Cùm enim a^2 + b a æquatur z pl. fiet æquatio per antithesin a^2 = z pl. — b a omnibus ductis in a, & erit a^3 = z pl. a — b a^2. Cùm autem a^2 æquetur z pl. — b a;

b a; loco ipsius a^2 subrogetur z pl. — b a; factaque multiplicatione per — b, fiet productum — b z pl. † b^2 a; ob id a^3 æquabitur z pl. a — b z pl. † b^2 a, & per antithesin ad hanc reuocabitur a^3 ✠ b z plano = z plano a ✠ b^2 a; vtraque parte diuisa per z pl. † b^2, proueniet æquatio $\frac{a^3 + b\,z\,pl. = z\,pl.\,a + b^2 a}{z\,pl. + b^2}$; ergo $\frac{a^3 + b\,z\,plano}{z\,pl. + b^2}$ æquabitur a. Dicitur autem a^2 æquari z plano — b a, tantum igitur valet ipsum a^2; propterea ex designato valore ipsius a id ita exprimetur $a^2 = \frac{z\,pl.\,pl. - b\,a^3}{z\,pl. + b^2}$ si enim loco ipsius a, intelligamus $\frac{a^3 + b\,z\,pl.}{z\,pl. + b^2}$, & hanc fractionem ducamus in b; quandoquidem in b, ducebatur a, facta verò multiplicatione; proueniet $\frac{b\,a^3 + b^2\,z\,pl.}{z\,pl. + b^2}$. Hac verò subducta fractione ex z plano; cùm esset z pl. — b a, remanebit z pl. — $\frac{b\,a^3 + b^2\,z\,pl.}{z\,pl. + b^2}$, seu quod idem est $\frac{z\,pl.\,pl. - b\,a^3}{z\,pl. + b^2}$; etenim si à z plano subtrahi debet $\frac{b\,a^3 + b^2\,z\,pl.}{z\,pl. + b^2}$ reduci debet ipsum z planum ad fractionis naturam, & hac instituta pragmatia, proueniet $\frac{z\,pl.\,pl. + b^2\,z\,pl.}{z\,pl. + b^2}$ ab hoc autem, si subtrahatur fractio $\frac{b\,a^3 + b^2\,z\,pl.}{z\,pl. + b^2}$ remanebit, vt supra $\frac{z\,pl.\,pl. - b\,a^3}{z\,pl. + b^2}$. Vbi obserua, in illa reductione, ductum fuisse z pl. in denominatorem z pl. † b^2; atque adeo prouenisse, quod dictum est; quamobrem æquatio proueniet $a^2 = \frac{z\,pl.\,pl. - b\,a^3}{z\,pl. + b^2}$.

Redeamus nunc ad primam æquationem a^2 ✠ b a = z plano; ducta vtraque parte quadraticè, prouenit æquatio huiusmodi a^4 ✠ 2 b a^3 † b^2 a^2 = z pl. plano. At verò accepta interpretatione ex designato gradu ipsius a quadrati valore, illa quidem affectio $b^2 a^2$, idem planè erit, quod $\frac{b^2\,z\,pl.\,pl. - b^3\,a^3}{z\,pl. + b^2}$ hac autem adscita interpretatione, atque omnibus secundùm Artis præcepta dispositis, proueniet æquatio a^4 † $\frac{2\,b\,z\,pl. + b^3}{z\,pl. + b^2}$ a^3 = $\frac{z\,pl.\,pl.\,pl.}{z\,pl. + b^2}$. Atque hunc in modum quæ aliàs à Vieta tradita fuerunt, sic enucleauimus, vt facilè cuique perspecta esse possint, quare;

Si 1 Q ✠ 14 R æquetur 147, etiam 1 Q Q ✠ 20 C æquabitur *9261*.

Namque per b; intelligimus *16*, per z planum, verò *192*, & per a, ac per 1 R, intelligimus 7; proinde $\frac{2\,b\,z\,pl. + b^3}{z\,pl. + b^2}$ a^3 valebit 20 C, & $\frac{z\,pl.\,pl.\,pl.}{z\,pl. + b^2}$ valebit *9261*, etenim z pl. pl. pl. valor est 317523; hic numerus si diuidatur per 343 pretium ipsius z pl. † b^2, fit quotiens *9261*; at verò 1 Q Q est 2401, & 20 C valent *6860*. Itaque 1 Q Q ✠ 20 C valebunt *9261*, quantus est valor alterius partis ipsius æquationis.

Si a^2 — b a æquetur z plano; etiam a^4 — $\frac{2\,b\,z\,pl. - b^3}{z\,pl. + b^2}$ a^3 æquabitur $\frac{z\,pl.\,pl.\,pl.}{z\,pl. + b^2}$. Vtar ipsius Vietæ numeris; hoc enim nihil refert, & si 1 Q — 14 R æquetur 147 etiam 1 Q Q — 20 C æquabitur *9261*, quod eodem pacto declarabitur.

Si b a — a Q æquetur z plano, etiam $\frac{b^3 - 2\,b\,z\,pl.}{b^2 - z\,pl.}$ a^3 æquabitur $\frac{z\,pl.\,pl.\,pl.}{b^2 - z\,pl.}$.

Si 21 R — 1 Q æquetur 98, etiam 15 C — 1 Q Q æquabitur 2744; declarantur, vt supra.

Cùm autem affectio fuerit, etiam sub quadrato, ab æquatione quadratica affecta sub latere à nobis deducitur, per interceptum analogismum; etenim.

Si a^2 ✠ b a æquetur z pl.; manifestum est homogeneum datæ mensuræ per applicationem ad coefficientem longitudinem posse nouam suscipere formam; quamobrem applicatione facta, proueniet ortiua magnitudo, exempli gratia d; igitur æquatio illa, ad hanc erit reuocata a^2 ✠ b a = b d. Hac autem ad analogismum redacta, fiet vt a ✠ b ad b, ita d ad a, quare etiam horum terminorum quadrata proportionalia erunt; proinde, vt a^2 ✠ 2 b a ✠ b^2 ad b^2 ita d^2 ad a^2; ergo multiplicatis extremis, & medijs; fiet æquatio huiusmodi a^4 ✠ 2 b a^3 ✠ b^2 a^2, quod æquabitur b^2 d^2. Hoc enim pacto æquatio ordinata est.

Et quidem huiusmodi ratione æquationes quadratoquadraticæ, in quibus affectio est sub cubo, & quadrato, ab æquationibus quadraticis affectis sub latere, per interpositum analogismum deducentur.

Per climacticum autem regularem ascensum cubicæ æquationis amphibolæ, vbi affectio est sub latere, à quadraticis affectis sub latere, deducuntur, etenim.

Si a^2 ✠ b a æquetur z plano; per communem multiplicationem ipsius a, fit cubica a^3 ✠ b a^2 = z pl. a; de se tamen inutilis, cùm desit homogeneum datæ mensuræ; propterea ad id consequendum dicam vt a^2 ✠ b a æquatur z plano, certè per antithesin fiet a^2 = z plano — b a; quoniam autem a^3 ✠ b a^2 erat æqualis z pl. a; adscita interpretatione quòd a^2 æquetur z plano — b a; ducatur hoc in b; hoc enim pacto in locum ipsius gradus a^2 substitutum erit z pl. — b a, & illud solidum per

X asci-

Continuatio explicationis supradictorū.

Fit reditus ad primam æquationem affirmatiuam.

Numeris eadem tractantur.

Æquatio quadratica negatiua.

Numeris eadem tractantur.

Quando affectio fuerit etiā sub quadrato.

Qua ratione æquationes quadratoquadraticæ in quibus affectio est sub cubo, & quadrato ab æquationibus quadraticis affectis sub latere per interpositū analogismum. deducantur.

adſcitam interpretationem, erit alio modo expreſſum; factaque multiplicatione, proueniet $a^3 + b\ z$ pl. — $b^2 a$, quod ęquabitur z plano a, eadem enim retinetur æquationis pars; cum qua erat comparatio inſtituta; quare ordinatione facta per antitheſin congruam $\overline{z \text{ planum} + b^2}\ a - a^3$ ęquabitur b z plano. Vnde huiuſmodi facta eſt æquatio ſolida, in qua cubus de homogeneo negatur, deducta ex ęquatione quadratica; quæ numeris hunc in modum declarari poſſunt.

b Æquatio cubica

Si ſit 1 Q † 10 R = 24, etiam 124 R — 1 C ęquabitur 240, cùm enim 1 Q † 10 R æquetur 24, omnibus ductis in 1 R fiet 1 C † 10 Q = 24 R; at verò 1 Q æquatur 24 — 10 R, vt per antitheſin eſt manifeſtum eſt; ergo adſcita hac interpretatione ad exprimendum valorem ipſorum 10 Q; proinde erit 1 C † 240 — 100 R = 24 R, & ordinata ęquatione, erit 124 R — 1 C = 240; & ita quidem eſt, ſiquidem in æquatione 1 Q + 10 R = 24 radicis valor eſt 2, itaque 1 C valebit 8, & 124 R valebunt 248, at ſi à 248 ſubducamus 8, cùm ſit æquationis pars 124 R — 1 C; remanebit 240. altera ęquationis pars.

Æquatio quadratica, vnde deducitur cubica negatiua

Si $a^2 - b\ a$ æquetur z plano, & $a^3 - \overline{b^2 - z \text{ pl.}}\ a$ æquabitur b z plano.

Quoniam enim $a^2 - b\ a$ æquatur z plano, omnibus ductis in a, (ita enim fit climacticus aſcenſus) erit $a^3 - b\ a^2 =$ z pl. a, & quia erat $a^2 - b\ a =$ z pl. per antitheſin; fiet $a^2 =$ z pl. — b a; quare in locum ipſius a^2, ſubſtituatur æquipollens z pl. — b a; vnde ducatur z pl. — b a in b, vt fiat b z pl. — $b^2 a$, ad exprimendum homogeneum illud $b\ a^2$; propterea $a^3 - b$ z pl. — $b^2 a$, æquabitur z plano a, & ordinata æquatione; fiet $a^3 - \overline{z \text{ pl.} - b^2}\ a = b$ z pl. quod erat faciendum. Itaque.

Æquatio eadem numeris tractatus.

Si 1 Q — 10 R, æquetur 24; etiam 1 C — 124 R æquabitur 240. Nec diſſimiliter.

Si $b\ a - a^2$ æquetur z plano, etiam $\overline{b^2 - z \text{ plano}}\ a - a^3$ æquabitur b z plano.

Æquatio quadratica vnde cubica deducitur.

Quoniam enim $b\ a - a^2$ æquatur z plano, omnibus ductis in a fiet $b\ a^2 - a^3 =$ z plano a, & quia $b\ a - a^2$, æquabatur z plano, per antitheſin fiet b a — z plano $= a^2$; ergo ipſius a^2 pretium erit b a — z plano, hoc igitur ducatur in b, ad exprimendum valorem illius ſolidi $b\ a^2$; per adſcitam interpretationem ipſius $b\ a^2$, & fiet $b^2 a - b$ z plano $- a^3 =$ z plano a, & per antitheſin $\overline{b^2 - z \text{ pl.}}\ a - a^3$ æquabitur b z plano. Vnde

Æquatio eadem numeroſe tractatur.

Si 14 R — 1 Q æquetur 24 etiam 172 R — C æquabitur 336. Inſuper.

Si $a^2 + b\ a$ æquetur b d; etiam $a^3 + \overline{b + d}\ a^2$ æquabitur $b\ d^2$.

Æquatio quadratica vnde cubica deducitur

Quoniam enim $a^2 + b\ a$ æquatur b d, omnibus ductis in a; fiet $a^3 + b\ a^2 =$ b d a; at verò cùm $a^2 + b\ a$ æquetur b d, per antitheſin b a, æquabitur $b\ d - a^2$ vtraque parte diuiſa per b; fiet $\frac{bd - a^2}{b} = a$. Hac adſcita interpretatione, ad exprimendum valorem ipſius b d a, proueniet $a^3 + b\ a^2 = b\ d^2 - d\ a^2$, propterea quod ſi $\frac{bd - a^2}{b}$ ducatur in b d; ſiquidem a, ducitur in b d, fiet $\frac{b^2 d^2 - b d a^2}{b}$; hoc eſt, omnibus diuiſis per b; fiet $b\ d^2 - d\ a^2$, At verò ſuperior æquatio $a^3 + b\ a^2 = b\ d^2 - d\ a^2$ per antitheſin fiet $a^3 + \overline{b + d}\ a^2 = b\ d^2$; quamobrem ab illa ſuperiori ęquatione quadratica deducta eſt hæc cubica affecta ſub quadrato. Vnde

Si 1 Q + 12 R æquetur 108, facto ex 12 in 9; etiam 1 C + 21 Q æquabitur 972, cùm enim 1 Q + 12 R æquetur 108 facto ex 12 in 9; omnibus ductis in 1 R, fiet 1 C + 12 Q = 108 R, At verò $\frac{108 - 1Q}{12}$ æquatur 1 R hac ergo adſcita interpretatione, ad exprimendum valorem ipſarum 108 R, erit 1 C + 12 Q = 972 — 9 Q, & per antitheſin fiet 1 C + 21 Q = 972.

Qua-

Quarundam æquationum conſtitutio perpenditur.

CAPVT XX.

PRæcipua quædam eſt quarundam æquationum conſtitutio; ſiquidem nonnullæ ſunt correlatæ nuncupatę, quas ſuperiùs deſcripſimus, è quibus, aliquæ ſunt amphibolæ; aliæ contradicentes, aliæ demum inuerſæ. Amphibola æquatio quid ſit, iam ſuperiùs notauimus; in qua ſcilicet poteſtas de homogeneo affectionis negatur; vnde, cùm vtraque ita fuerit, & in vtraque, eadem coefficiens magnitudo, idem homogeneum datæ menſuræ; huiuſmodi æquationes correlatæ; ſimileſque dicentur.

Quarundam æquationum præcipua constitutio. Amphibola æquatio quid.

Contradicentes illæ verò ſunt, in quarum vna poteſtas affirmatè afficitur, in altera negatè.

Contradicentes æquationes quæ.

Inuerſę denique in quarum vna poteſtas afficitur multa homogeneæ affectionis In altera homogenea affectionis afficitur multa poteſtatis. Harum autem peculiares, præcipuęque ſunt conſtitutiones, qua de re Vieta etiam edifferit loco ſupra citato de Recognitione ęquationum.

Inuerſæ æquationes quæ.

Quia tamen hæc non vni ęquationum generi conueniunt; propterea, vt etiam Vieta obſeruat, generali quadam ratione tractanda ſunt, vt deinde, vni vel alteri ęquationi accommodentur; quod vt clariùs intelligas; cùm dicimus in ęquatione amphibola ordinis quadratici, coefficientem longitudinem oriri ex applicatione differentiæ quadratorum ad differentiam laterum; & comparationis homogeneum oriri ex applicatione differentiæ reciprocè à quadrato vnius, in radicem alterius ad differentiam earũdem radicum, id ſuo modo non tam de æquationibus quadratici, quàm cubici vel alterius ordinis, intelligenda ſunt. Vnde ſi fuerit æquatio amphibola ordinis quadratici 24 R — 1 Q ⊐ 95 cuius radices ſunt 5, & 19, coefficiens 24, oritur ex applicatione 336, differentia inter 361, & 25, quadrata radicum 19, & 5, propoſitę ęquationis, ad 14, differentiam earundem radicum, ſi enim 336, diuidatur per 14, prouenit 24; Deinde ſi 361, quadratum radicis maioris, puta 19, ducatur in 5, radicem minorem, fit 1805, & ſi 25, quadratum radicis minoris ducatur in 19, radicem maiorem, fit 475, horum differentia eſt 1330, qua diuiſa per 14, differentiam ipſarum radicum, fit quotiens 95; nempe comparationis homogeneum.

Quoniã mox tractãda non vni æquationũ generi conueniunt; propterea iuuat generali quadã ratione illa tractare. Æquatio amphibola ordinis quadratici.

Sed hæc etiam in cubicis, vt ſi 364 R — 1 C æquetur 720; cuius radices ſunt 2, 18; cubus ex 2, eſt 8, at ex 18, eſt 5832, quorum differentia eſt 5824, quæ ſi applicetur ad 16, differentiam ipſarum radicum 2, & 18, prouenit 364 coefficiens planum ſublaterale. At verò ſi 5832, cubus radicis maioris ducatur, in 2, radicem minorem fit 11664; & ſi 8 cubus minoris ducatur in 18, radicem maiorem, producitur 144; at ſi ex 11664, ſubtrahatur 144, remanet 11520, quo diuiſo per 16, differentiam laterum, proſilit in quotiente 720, ſolidum comparationis nimirum homogeneum.

Cubicæ æquationes amphibolæ.

Generali propterea quadam ratione inſtituenda eſt pragmatia, vnde genera adhibendo ſpecierum loco, ſic operabimur, quod etiam apud Vietam videre licet.

Generali ratione inſtituitur pragmatia.

Si b parabola in a gradum — a poteſtate, æquetur z homogeneę, & rurſus b parabola in e gradum — e poteſtate, æquetur z homogeneę.

Proinde b parabola in a gradũ — a poteſtate, ęquabitur b parabolę in e gradũ — e poteſtat; per antitheſin verò ſtatuendo a, maiorem, quàm e, quod liberum hì c eſt, ob præſuppoſi-

ſupoſitam radicem amphibolam; ob id a poteſtas — e poteſtate, ęquabitur b parabolæ in a gradum — b parabola in e gradum. Omnibus autem per a gradum — e gradu diuiſis; prouenict æquatio huiuſmodi $\frac{\text{a poteſtas — e poteſtate}}{\text{a gradu — a gradu}}$ æquabitur b parabolæ.

Explicatio ſupraditorum.

Hinc autem addiſcimus b parabolam oriri ex applicatione differentię poteſtatum ad differentiam graduum. Quoniam verò b parabola in a gradum, minus a, poteſtate, ęquatur z homogeneæ, ſi in locum ipſius b parabolæ ſubrogetur cognitus eius valor, & ea quidem ſubrogatione, æquatio reformetur, nouaque inſtituatur $\frac{\text{a poteſtas in e gradum — a poteſtate in a gradum}}{\text{a gradu — e gradu}}$ ęquabitur z, homogeneę.

Quid eſt ſupraposita æquatione colligatur.

Hinc addiſcimus z homogeneam oriri ex applicatione differentię reciprocè à poteſtate vnius radicis in gradum alterius ad differentiam graduum.

Quamobrem ęquationibus ambiguis cuiuſque ordinis hęc ſatisfacere quidem poſſunt, & vniuerſa hæc Theoria aptari poteſt ſingulis æquationibus, ſi videlicet loco poteſtatis intelligatur quadratum, vel cubus, &c. & loco gradus intelligatur latus, ſiue radix; denique loco homogeneæ intelligatur quantitatis genus, prout æquationis natura exigit, vnde ſi fuerit quadratica, intelligatur planum, ſi cubica, intelligatur ſolidium, &c.

Et quod initio notauimus hìc facilè conſtabit, ſi nimirum, quod inferiùs præſtabimus, generatim tradita, ſpeciatim tractentur, & æquationum ſpeciebus, ſiuè nimirum quadratici ſiue cubici vel alteriùs ordinis extiterint congruè aptentur.

Quando æquationes fuerint contradicentes.

Si fuerint contradicentes, vt ſi a poteſtas — b coefficiente in a gradum, ęquetur z homogeneo, & rurſus e poteſtas — b coefficiente in e gradum, æquabitur z homogeneo; Propterea a poteſtas — b coefficiente in a gradum, æquabitur e poteſtati — b coefficiente in e gradum, & per antitheſin quidem e poteſtas — a poteſtate, ęquabitur b coefficienti in e gradum ✠ b coefficiente in a gradum; propterea diuiſis omnibus per e gradum ✠ a gradu, $\frac{\text{e poteſtas — a poteſtate}}{\text{e gradu + a gradu}}$ æquabitur b coefficienti.

Quid colligatur ex ſupra traditis.

Hinc addiſcimus b. coefficientem ſubgradualem oriri ex applicatione differentiæ poteſtatum ad aggregatum eorum, quos ſubſtinet coefficiens, graduum.

Cùm autem a poteſtas ✠ b coefficiente in a gradum æquetur z homogeneo; in locum ipſius b coefficientis, ſubrogetur agnitus eius valor, nimirum $\frac{\text{e poteſtas — a poteſtate}}{\text{e gradu + a gradu}}$ & huiuſmodi ſubrogatione ſi reformetur ęquatio, a poteſtas ✠ $\frac{\text{e poteſtate — a poteſtate}}{\text{e gradu + a gradu}}$ in a gradum, æquabitur z homogeneo; omnibus autem ritè ordinatis, atque diſpoſitis; $\frac{\text{a poteſtas in e gradum — a poteſtate in a gradum}}{\text{e gradu + a gradu}}$ ęquabitur z homogenea.

Quid colligatur ex ſupra traditis.

Hinc deprehendimus, z homogeneum oriri ex applicatione aggregati factorum reciprocè à poteſtate radicis vnius, in gradum alteriùs, ad prædictum, cui applicatio facta eſt graduum, aggregatum.

Quando æquationes fuerint inuerſæ.

Ad inuerſas demum, quod attinet.

Si a poteſtas — b coefficiente in a gradum æquetur z homogeneo, & rurſus eadem b coefficiens in e gradum — e poteſtate æquętur z homogeneo.

Propterea a poteſtas — b coefficiente in a gradum æquabitur b coefficienti in e gradum — e poteſtate, & per antitheſin a poteſtas ✠ e poteſtate æquabitur b coefficienti in a gradum ✠ b coefficiente in e gradum, omnibus autem per e gradum ✠ a gradu diuiſis $\frac{\text{a poteſtas + e poteſtate}}{\text{a gradu + e gradu}}$ æquabitur b coefficienti. Itaque deprehendimus in inuerſis plane negatis ſubgraduales proficiſci ex applicatione poteſtatum, ad aggregatum eorum in quos coefficiens eſt graduum; cum autem a poteſtas — b coefficiente ſubgraduali in a gradum ęquetur z homogeneo; in locum ipſius b coefficientis, ſubrogetur agnitus eius valor, ſcilicet $\frac{\text{a poteſtas — e poteſtate}}{\text{a gradu + e gradu}}$; ergo a poteſtas — $\frac{\text{a poteſtate in e gradum + e poteſtate in a gradum}}{\text{a gradu — e poteſtate}}$ ęquabitur z homogeneo, atque adeo omnibus ritè diſpoſitis, ac ordinatis $\frac{\text{a poteſtas in e gradú — e poteſtate in e gradú}}{\text{a gradu + e gradu}}$ æquabitur z homogeneo igitur.

Homogeneum datę menſurę prouenit ex applicatione differentiæ factorum reciprocè à poteſtate radicis vnius in alteriùs gradum, ad prædictum, cui applicatio altera eſt facta graduum in quos coefficiens ſubgradualis eſt, aggregatum.

Inuerſæ quarum vna per affirmationem altera per negationem.

Quia tamen adſunt inuerſæ, quarum vna per affirmationem afficitur, altera per negationem, ob id.

Si a poteſtas ✠ b coefficiente in a gradum æquetur z homogeneo, & rurſus eadem

dem b coefficiens in e gradum — e poteſtate, æquetur z homogeneo. Propterea a poteſtas ✠ b coefficiente in a gradum, æquabitur b coefficienti in e gradum — e poteſtate, & per antitheſin a poteſtas ✠ e poteſtate, æquabitur b coefficienti in e gradum — b coefficiente in a gradum. Omnibus igitur applicatis ad e gradum — a gradu, $\frac{\text{e poteſtas} - \text{a poteſtate}}{\text{e gradu} - \text{a gradu}}$ æquabitur b coefficienti.

Quid colligatur ex ſupra traditis.

In his igitur inuerſis coefficientes ſubgraduales proficiſcuntur ex applicatione aggregati poteſtatum ad differentiam eorum in quos coefficiens eſt graduum.

Cùm autem a poteſtas ✠ b coefficiente in a gradum, ęquetur z homogeneo, in locum coefficientis ſubgradualis ſubrogetur æquus valor, nempe $\frac{\text{e poteſtas} + \text{a poteſtate}}{\text{e gradu} - \text{a gradu}}$ ergo a poteſtas ✠ $\frac{\text{e poteſtate} + \text{a poteſtate}}{\text{e gradu} - \text{a gradu}}$ in a gradum æquabitur z homogeneo, & omnibus ritè diſpoſitis, ac ordinatis $\frac{\text{a poteſtas in e gradum} + \text{e poteſtate in a gradum}}{\text{e gradu} - \text{a gradu}}$ æquabitur z homogeneo; Igitur deprehendimus.

Quid colligatur ex ſupra traditis.

Homogeneum datæ menſuræ oriri ex applicatione aggregati factorum reciprocè à poteſtate radicis vnius in gradum alteriùs, ad prædictam, cui altera facta eſt applicatio graduum, in quos coefficiens eſt, differentiam.

Nunc ſpecialis inſtituitur tractatio.

Hucuſque generatim; ſequitur modo, vt eadem ſpeciatim tractemus, & primò initio deſumpto à conſtitututione æquationum amphibolarum.

Sincriſeos doctrina explicatur.

Ad has autem conſtitutiones deprehendendas, haud mediocriter comparatio conducit, quam Græci σιγχισιν appellant.

Explicatio ſincriſeos doctrinæ.

Æquationis quadraticæ exemplum.

Si b a — a^2 ęquetur z plano, & rurſus b e — e^2 æquetur z plano; cum vtraque eidem z plano ęquetur, conſequens eſt, vt inter ſe ęquentur; quare b a — a^2 ęquabitur b e — e^2; ergo per antitheſin ex hypotheſi. quòd a maior ſit quàm e, quod hic liberum eſt; & a^2 — e^2 æquabitur b a — b e; omnibuſque diuiſis per a — e $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ hoc eſt a † e æquabitur b. Itaque b, eſt ſumma duorum laterum quæſitorum, oriunda ex applicatione differentię quadratorum ad differentiam laterum. Cùm autem b a — a^2 æquetur z plano; ſi in locum ipſius b, ſubrogetur cognitus illius valor, nempe $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ ſiue a † e; vtique $\frac{a^2 e - e^2 a}{a - e}$ id eſt e a æquabitur z plano; quare z planum erit id, quod fit ſub duobus quæſitis lateribus, ortum ex applicatione differentię factorum reciprocè à quadrato vnius, in radicem alteriùs, ad a — e; hoc eſt ad differentiam laterum, etenim a — e differentia eſt inter a, & e vt patet.

Quædam comprobantur.

Cæterum ſi diuidatur a^2 — e^2 per a — e, oriri a ✠ e manifeſtum eſt; etenim ſi a^2 diuidatur per a; prouenit a; vt conſtat, quadratum ſiquidem lateri applicatum, reſtituit latus, at — per — ſi diuidatur, emergit †, & e^2, ſi per e, diuidatur emergit e.

Non nulla cõfirmantur.

Ex diuiſione ipſius a^2 e — e^2 a per a — e fieri quotientem e a; Manifeſtum eſt.

Numeris hucuſque tradita explanantur.

Hactenus tamen dicta numeris tractari poſſunt hac Arte.

Supponamus ipſius a, valorem eſſe 6; ipſius verò b, eſſe 10; demum ipſius a plani eſſe 24; ob id erit æquatio 10 R — 1 Q ⩵ 24, & ſi valor ipſius e, ſit 4, erit æquatio eadem, vt patet, diſtinctionis tamen gratia ſecundis radicibus vtemur.

Prior ęquatio erit 10 R — 1 Q ⩵ 24. Secunda 10 A — 1 A Q ⩵ 24, & ita quidem eſt; nam in priori 10 R, valebunt 60, & 1 Q valebit 36; horum differentia eſt 24, vt patet. In ſecunda, ſeu poſteriori 10 A, hoc eſt decem ſecundæ radices erunt 40, & 1 A Q valebit 16, quorum differentia eſt itidem 24, & quia quę vni ęquantur ſunt inter ſe ęqualia, proinde 10 Q — 1 A Q ęquabitur 10 R — 1 Q omnibuſque diuiſis per 1 R — 1 A; vtque $\frac{1\,Q - 1\,A\,Q}{1\,R - 1\,A}$ id eſt 1 R † 1 A ęquabitur 10, & ita eſt, ſiquidem 1 Q valet 36, a quo ablato 1 A Q cuius valor eſt 16, remanet 20, hic ſi diuidatur per 1 R — 1 A, cuius valor eſt 2, fit quotiens 10, ergo 10, componitur ex duobus quęſitis lateribus, & hęc ſumma oritur, vt dictum eſt. Cum autem 10 R — 1 Q ęquetur 24; ſi in locum ipſius 10, ſubrogetur $\frac{1\,Q - 1\,A\,Q}{1\,R - 1\,A}$ ſeu 1 R † 1 A certè $\frac{1\,Q \text{ in } 1\,A - 1\,A\,Q \text{ in } 1\,R}{1\,R - 1\,A}$ id eſt 1 A in 1 R ęquabitur 24; proinde 24 eſt id, quod fit ſub duobus quęſitis lateribus, &c.

Explicatio, & comprobatio ſupradictorũ.

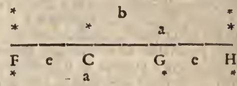
Cęterum $\frac{1\,Q \text{ in } 1\,A - 1\,A\,Q \text{ in } 1\,R}{1\,R - 1\,A}$. Id eſt 1 A in 1 R ęquari 24, patet; ſiquidem 1 Q valet 36; ergo 1 Q in 1 A, erit 144 a quo ſi auferamus 1 A Q in 1 R cuius valor eſt 96, remanebit 48, quo diuiſo per 1 R — 1 A, cuius valor eſt 2, fit quotiens 24.

Nos

Nos autem aliter huiusmodi æquationum constitutionem inquirimus, & quidem ratione satis obuia.

Auctoris ratio explicandi su propositas æquationes.

Sit recta F H, secta in punctis C, G itaut rectangulum H F G, minus quadrato F G, ęquale sit rectangulo H F C minus quadrato F C; seu quod idem est rectangulum F G H, ęquale sit rectangulo F C H, Manifestum est per rectam F H, repręsentari coefficientem longitudinem, & F G H, rectangulum & ei æquale rectangulum F C H, esse comparationis homogeneum; quamobrem radix maior erit F G, minor verò F C, quoniam autem rectangulum F G H, æquale est rectangulo F C H, erit F C, æqualis G H, vt constat ex Elementis; quamobrem coefficiens longitudo, est æqualis aggregato radicum; sed hoc commune est omnibus ęquationibus amphibolis, verùm hæ de quibus loquimur, sunt correlatæ, sunt enim similes, ijsdemque magnitudinibus constant, & affectionum parabolis, & affectionum homogeneis, etsi radicibus diuersis existentibus, tum quia ipsæ æqnationum formulæ, de duabus pluribusque radicibus ex sui constitutione sunt explicabiles: vel in ijs diuersa est affectionum nota, &c.

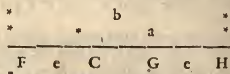


Explicatio supradictorum.

At si F H, est coefficiens, & radix vna sit F G, nempe maior, & F C sit minor, differentia quadratorum F G, F C, ęqualis est differentiæ rectangulorum H F G, & H F C, at si tam prędictorum quadratorum differentia, quàm rectangulorum, applicetur ad differentiam laterum, puta C G, ex applicatione differentiæ quadratorum, ad C G oritur F G, plus F C, hoc est F H, ex applicatione differentiæ rectangulorum ad eandem C G, differentiam laterum, oritur F H, vnde, vt supra F H, est aggregatum duarum radicum, oriundum ex applicatione differentiæ quadratorum ad differentiam laterum. Quoniam verò rectangulum H F G, minus quadrato F G, æquale est rectangulo F G H; propterea liquidò constat comparationis homogeneum fieri ex multiplicatione duorum laterum quæsitorum, illudque oriri ex applicatione differentiæ factorum reciprocè a quadrato, radicis vnius æquationis, puta à quadrato ex F G, in G H, radicem alteriùs, & reciprocè, ad C G, differentiam laterum, quę planè ex hactenus traditis perspicua sunt.

Explicationis continuatio.

Repetatur superior figura, itaque F H, erit b, at verò F G, erit a, & F C, erit e; quoniam verò ractangulum H F G, minus quadrato F G, ęquale est ex hypothesi rectangulo H F C, minus quadrato F C, nempe rectangulum F G H, æquale est rectangulo F C H, proinde, vt patet ex Elementis F C, æquabitur G H; atque adeo tam F C, quàm G H, erit e, insuper tàm F G, quàm C H, erit a, hinc igitur harum correlatarum æquationum naturam deprehendimus, eiusmodi esse, vt diximus; nempe coefficientem longitudinem esse æqualem aggregato radicum, & ex applicatione differentiæ quadratorum à radicibus, ad earundem radicum differentiam, oriri earundem radicum aggregatum, atque adeo coefficientem longitudinem.



Communia hæc sunt æquationibus amphibolis.

Fatendum tamen hæc communia esse æquationibus amphibolis, quatenus de duabus radicibus sunt explicabiles; hoc enim modo, maior radix, constituit æquationem vnam eadem coefficiente longitudine retenta, eodemque comparationis homogeneo, quamobrem idem de minori radice cum dici possit, propterea hæ erunt æquationes similes; Vnde si exempli gratia, ęquatio vna fuerit 20 R — 1 Q $\sqsupset$ 64, hæc duplicem habet radicem, nempe 16, & 4. Quatenus igitur instituitur æquatio per radicem maiorem, fiat b a — a² $\sqsupset$ z plano; quatenus per minorem, fiet b e — e² $\sqsupset$ z plano; hæ itaque sunt æquationes similes, vt ex traditis apertè constat,

ſtat, ſed hoc nil aliud eſt, quàm per vtramque radicem vnius æquationis, duplicem æquationem inſtituere; proinde, vt aduertebam; hæc communia ſunt æquationibus amphibolia laborantibus, in quibus, vt ſuo loco vidimus de quadraticis amphibolis loquentes radicum aggregatum, æquale eſt coefficienti longitudini; vnde vtramque radicem ex æquatione propoſita eruere perinde; eſt, ac duplicem æquationem inſtituere, penes duplicem, quam propoſita, habet radicem, ęquatio; Cęterũ dum eruitur radix, ſublato comparationis homogeneo, a quadrato dimidiæ coefficientis, fit reſiduum, cuius latus, additum prædicto dimidio: exhibet radicem maiorem: ſubductum eidem exhibet minorem. Illud porrò non pręteribo, quandoque, vtramque radicem, & maiorem, & minorẽ propoſitæ æquationi amphibolæ ſatisfacere: aliquando vnicam tantùm.

Hæc communia ſunt amphibolis æquationibus.

Deinde ſi b pl. $a - a^3$ æquetur, z ſolido, & rurſus etiam b pl. $e - e^3$ æquetur z ſolido; non diſſimiliter ratiocinando hinc neceſſariò conſequitur b pl. $a - a^3$ æquari b pl. $e - e^3$, & per metatheſin ſtatuendo a, maiorem, quàm e; quod eſt hìc ad libitum, ob eam, qua ęquatio laborat amphibolam, fiet $a^3 - e^3$ æqualis b pl. a — b pl. e; atque omnibus applicatis ad $a - e$, ex applicatione differentiæ cuborum oritur $a^2 + e^2 + a e$, quod multiplicatione comprobatur; ſi enim $a^2 + e^2 + a e$, ducatur in $a - e$, fit productum $a^3 - e^3$, ergo ex applicatione $a^3 - e^3$, ad $a - e$, prouenit $a^2 + e^2 + a e$: ex applicatione verò b pl. a — b pl. e, ad eandem differentiam $a - e$, oritur b pl. Itaque fit, vt $a^2 + a^2 + a e$, æquetur b plano. Vnde deprehendimus b planum, eſſe aggregatum quadratorum, a duobus de quibus quæritur lateribus, vna cum eo, quod fit ſub ijs plano; illudque oritur ex applicatione differentiæ cuborum ad differentiam laterum. Cum verò b pl. $a - a^3$ æquetur z ſolido ſi in locum ipſius b plani ſubrogetur agnitus eius valor nempe $\frac{a^3 - e^3}{a - e}$ ſeu quod idem eſt $a^2 + e^2 + a e$; vtique $\frac{a^3 e - e^3 a}{a - e}$ nimirum $a^2 e + e^2 a$ æquabitur z ſolido.

Proponitur æquatio altera amphibola cubici ordinis.

Sed hæc ſunt perpendenda; nam ſi $a^2 + e^2 + a e$, valor agnitus ipſius b plani, ducatur in a, fiet $a^3 + a e^2 + a^2 e$, à quo ſubtrahendus eſt cubus a^3 (erat enim b pl. $a - a^3 = $ z ſolido) & remanebit $a e^2 + a^2 e = $ z ſolido. Vnde conſtat ipſum comparationis homogeneum, fieri ab aggregato laterum in planum ſub lateribus; oririque ex differentiæ ipſorum factorum reciprocè à cubo vnius lateris, in latus alterius, applicatione ad differentiam ipſorum laterum. Atque hìc iterum illud eſt inculcandum, quod ſuperiùs de huiuſmodi æquationibus quadratici ordinis dictum fuit.

Animaduertenda quædã.

Illud eſt animaduertendum, nempe cùm ſuperiùs eſſet æquatio b $a - a^2 = $ z plano; deprehenſumq; eſſet $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ id eſt $a + e$ (tantùm enim prouenit, ex applicatione $a^2 - e^2$ ad $a - e$,) æquari b, ſi in locum ipſius b, ſubrogetur agnitus eius valor, puta $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ ſeu $a + e$ fieri $\frac{a^2 e - a e^2}{a - e}$ ſeu a e (tantum enim prouenit ex applicatione; ipſius $a^2 e - a e^2$ ad $a - e$) quod æquetur z plano; Idque hunc in modum manifeſtum fiet. Si enim valor cognitus ipſius b; puta $a + e$, ducatur in a, fit $a^2 + a e$. Ergò perinde eſt $a^2 + a e$, ac eſt b a; Si igitur ex $a^2 + a e$ ſubtrahatur a^2 remanebit a e, quod æquabitur z plano, cum eſſet b $a - a^2$ ęquale z plano. Imo hoc idem eueniet loco ipſius $a + e$ atque adeo ipſius b, adhibendo $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$; nam ſi ducatur $\frac{a^2 - e^2}{a - e}$ in a, fiet $\frac{a^3 - a e^2}{a - e}$ itaque idem eſt $\frac{a^3 - a e^2}{a - e}$ ac eſt b a. Sed perinde eſt $\frac{a^3 - a e^2}{a - e}$ ac eſt $a^2 + a e$ quod multiplicatione comprobatur, nam ſi ducatur $a^2 + a e$ in $a - e$ prouenit $a^3 - a e^2$; ergò cùm proueniat, vt diximus $a^2 + a e$, ęquale b a, auferatur a^2, vt priùs, cùm ęquatio eſſet b $a - a^2 = $ z plano. Ergò a e æquabitur z plano; quod ſupra enunciatum fuerat.

Notanda quædam in gratiam ſupradictorum.

Verùm etiam, & Contradicentes, ſuas conſtitutiones habent, vnde ſi $a^2 + $ b a æquetur z plano; & $e^2 - $ b e æquetur itidem z plano; neceſſariò conſequitur $a^2 + $ b a, æquari $e^2 - $ b e, & per antitheſin $e^2 - a^2$ æquari b e + b a; omnibuſque applicatis ad $e + a$, prouenict $\frac{e^2 - a^2}{e + a}$, nempe $e - a$ æquabitur b; ergo b, coefficiens eſt differentia duorum, de quibus quæritur laterum, orianda ex applicatione differentiæ quadratorum, ad aggregatum laterum.

De contradicentium conſtitutione diſſeritur.

Coefficiens in huiuſmodi æquationibus cui æquetur.

Cùm autem $a^2 + $ b a æquetur z plano. In locum ipſius b, coefficientis ſubrogetur cognitus eius valor; nempe $\frac{e^2 - a^2}{e + a}$ ergo $a^2 + \frac{e^2 - a^2}{e + a}$ a æquabitur z plano; & omnibus

Cõparationis homogeneum in huiuſmodi æquationibus cui æquetur.

omnibus rectè diſpoſitis, ac ordinatis ſecundùm Artem $\frac{aae + aea}{e + a}$ hoc eſt e in a æquabitur z plano.

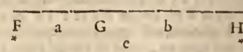
Numeris hæc eadem tractātur, & illuſtrantur.

Itaque z planum eſt, quod fit ſub duobus lateribus, &c. Numeris autem hæc eadem tractari poſſunt, 1 Q † 12 R æquetur 85, & rurſus 1 A Q — 12 A æquetur 85; ergo 1 Q + 12 R æquabitur 1 A Q — 12 A, & per metatheſin 1 A Q — 1 Q æquabitur 12 R † 12 A, omnibuſque diuiſis per 1 A + 1 R etiam $\frac{1AQ - 1Q}{1A + 1R}$ æquabitur 12, & quoniam 1 Q † 12 R æquatur 85, in locum ipſius 12 ſubrogetur agnitus eius valor $\frac{1AQ - 1Q}{1A + 1R}$, & 1 Q + $\frac{1AQ - 1Q}{1A + 1R}$ R æquabitur 85; omnibus ritè diſpoſitis $\frac{1Q \text{ in } 1A + 1AQ \text{ in } 1R}{1A + 1R}$ nimirum 1 A in 1 R æquabitur 85, & res ita ſe habet; Siquidem 1 Q valet 25; cùm 1 R in ſuperiori æquatione valeat 5, & 1 A, valeat 17; Itaque 1 Q in 1 A, valebit 425, huic ſi addatur 1445, valor eius, quod ex 1 A Q in 1 R; fiet 1870, quo diuiſo per 22, pretium ipſius 1 A † 1 R, fit quotiens 85, ſeu quod idem eſt 1 A in 1 R æquatur 85, nam idem eſt $\frac{1Q \text{ in } 1A + 1AQ \text{ in } 1R}{1A + 1R}$, ac eſt 1 A in 1 R, vt alibi diximus.

Quarationem Auctor Cōtrâdicentium æquationum naturam inquirat.

Ad æquationes Contrâdicentes, quod attinet, Vietam ſecuti ſumus, quę verò nobis ad hæc videntur opportuna, proximum eſt, vt aperiamus.

Sit recta F H, diuiſa quidem in G, & G H, ſit coefficiens b; at F H, ſit radix e; ſed F G, ſit a; Manifeſtum eſt quadratum F H, minùs rectangulo F H G. æquale eſſe rectangulo ſub F H, & F G, at eidem rectangulo H F G, æquale eſt quadraatum F G, plus rectangulo F G H, itaque quadratum F H, minùs rectangulo F H G, cùm ęquale ſit quadrato F G, vnà cum rectangulo F G H, ſequitur huiuſmodi æquationes eſſe contrâdicentes, vt ex ipſarum deſcriptione fit manifeſtum. In quibus cernimus G H, nempe coefficientem longitudinem eſſe differentiam duarum radicum, quarum vna eſt F H, altera verò F G; itaque eſt quantitas orianda ex applicatione differentię quadratorum ad aggregatum laterum; Et comparationis homogeneum, cuiuſmodi eſt rectangulum H F G, fit ex mutuo ductu ipſarum radicum.



In contradicētibus, comparationis homogeneum, vnde.

In contradicētibus ſubgraduales coefficientes, vnde.

Itaque ſubgraduales coefficientes oriuntur ex applicatione differentię poteſtatum, ad aggregatum eorum graduum, quos ſuſtinent coefficientes; & ſpeciatim ſublaterales coefficientes longitudines, oriuntur ex applicatione differentię quadratorum ad aggregatum laterum; Ita quidem G H, coefficiens ſublaleralis longitudo, oritur ex applicatione differentiæ quadratorum ex F H, & F G, ad aggregatum ex F H, F G. Quod eſt obſeruandum.

At ſi æquationes fuerint Inuerſę; quæ ſit conſtitutio, videamus.

Quando æquationes extiterint Inuerſæ.

Si a^2 — b a æquetur z plano, & rurſus b e — e^2 æquetur z plano; ergo a^2 — b a æquabitur b e — e^2, & per antitheſin a^2 + e^2 æquabitur b a + b e; omnibus propterea diuiſis per a + e $\frac{a^2 + e^2}{a + e}$ æquabitur b. Quamobrem coefficiens longitudo ortum ducit ex applicatione aggregati quadratorum ad aggregatum laterum, in quæ coefficientes longitudines ducuntur; ergo coefficiens longitudo ſublateralis prouenit ex applicatione aggregati poteſtatum, ad aggregatum laterum, in quæ ipſa ducitur coefficiens.

Coefficiens vnde.

Exemplum.

Cùm autem a^2 — b a æquetur z plano. In locum ipſius b coefficientis agnitus eius valor ſubrogetur, vt $\frac{a^2 + e^2}{a + e}$; ergo a^2 — $\frac{a^2 e + e^2 a}{a + e}$ æquabitur z plano; & omnibus rectè diſpoſitis $\frac{a^2 e - e^2 a}{a + e}$ æquabitur z plano.

Comparationis homogeneum vnde.

Quamobrem z planum oritur ex applicatione differentiæ factorum reciprocè à poteſtate radicis vnius in gradum alterius, ad prædictum, cui applicatio altera facta eſt, laterum, in quæ coefficiens ſublateralis, aggregatum, hoc eſt ad aggregatum ex a latere, & e latere, cui altera ſuperior facta fuit applicatio.

Simili etiam modo ratiocinandum; ſi a^2 + b a æquetur z plano, & b e — e^2 æquetur z plano, &c.

Colligemus enim coefficientem longitudinem ſublateralem oriri ex applicatione

ne poteſtatum, ad differentiam eorum, in quæ coefficiens eſt laterum.

Inſuper comparationis homogeneum proficiſci ex applicatione aggregati factorum reciprocè à quadrato radicis vnius, in latus alterius, ad prædictam, cui altera facta eſt applicatio laterum, in quę coefficiens eſt differentia, hoc eſt ad e latus minus a latere, cui applicatio ſuperior eſt facta. *Vnde comparationis homogeneum proficiſcatur.*

Obſeruandum autem hanc pragmatiam ſic inſtituendam eſſe. Cum $\frac{a a + e a}{a + e}$ ſit agnitus valor ipſius b; ſitque propoſita æquatio $a^2 - b a \sqsupset$ z plano. In locum ipſius b; ſubrogetur agnitus eius valor; puta $\frac{a a + e a}{a + e}$; ob id hoc ducatur in a; vt b, ducebatur in a; fiet autem productum $\frac{a a e + a e a}{a + e}$ ſeu $\frac{a^3 + a e a}{a + e}$ hoc igitur æquipollet ipſi b a; & ſubtrahendum eſt ex ipſo a^2; quod fit ducendo a^2 in a † e; vt proueniat $\frac{a^3 + a a e}{a + e}$ ex quo ſi ſubtrahatur $\frac{a a + a e a}{a + e}$ remanebit $\frac{a a a - a e a}{a + e}$. Vnde ſuprà cùm hæc generatim tractaremus, erat a poteſtas — $\frac{\text{a poteſtate in a gradum † e poteſtate in a gradum}}{\text{a gradu † e gradu}}$. *Obſeruanda quædam circa traditam pragmatiam.*

Numeris hunc in modum. Sit 1 Q — $6\frac{2}{3}$ R $\sqsupset$ $10\frac{2}{3}$. Inſuper $6\frac{2}{3}$ R — 1 Q $\sqsupset$ $10\frac{2}{3}$. Hæ quidem æquationes ſunt inuerſæ, & in ipſis coefficiens, & homogeneum ſe habent, vt dicebamus. Prioris autem æquationis radix eſt 8; poſterioris verò 6; in his verò ſi periculum fieret, quod enunciatum eſt, deprehendetur. *Numeris eadem tractantur.*

De his igitur æquationibus hæc ſtatuuntur; nimirum. *Quæ de ſuprà dictis æquationibus ſtatuantur.*

In æquationibus amphibolis ordinis quadratici, vt $b\, a - a^2 \sqsupset$ z plano Coefficiens ſublateralis longitudo, compoſita quidem eſt à duobus lateribus, ſub quibus rectangulum, quod fit, æquale eſt comparationis homogeneo; fit autem radix latus maius, vel minus, è duobus, & aliquando vnicum tantùm ſatisfacit. Itaque ſi ſint duo latera 5, & 7, erit 12 R — 1 Q $\sqsupset$ 35. Sed de his quoque ſuperiùs diſſeruimus. *Quid in æquationibus amphibolis ordines quadratici.*

In æquationibus amphibolis ordinis cubici, in quibus affectio eſt ſub latere, vt b pl. $a - a^3 \sqsupset$ z ſolido. Coefficiens planum compoſitum eſt ex quadratis trium proportionalium, & comparationis homogeneum ſolidum eſt factum ex ductu alterius extremæ, in aggregatum quadratorum à reliquis. Fit autem radix, prima, vel tertia ex illis; Itaque ſi ſint 2, 6, 18; erit 364 R — 1 C $\sqsupset$ 720, Quadrata enim ipſorum ſunt 4, 36, 324; quorum ſumma 364, coefficiens componitur à quadratis trium proportionalium prædictorum, & 720; comparationis homogeneum, componitur à ductu alterius extremæ trium proportionalium, puta 18. in 40, aggregatum quadratorum à reliquis. At ſi qui ſunt, qui putent, haud benè hunc in modnm explicari huiuſmodi æquationis naturam, decipiuntur, non enim per impropria, tradita eſt conſtitutio. Nec enim refert, quòd per quatuor, vel plures, ſi placet, proportionales 2, 4, 8, 16; explicetur, quorum quadrata ſunt 4, 16, 64, 256. horum aggregatum eſt 340; & ſi 16, extremũ vnũ è ſupradictis quatuor continuè proportionalibus, ducatur in 84; aggregatum quadratorum à reliquis, fit 1344, vnde prouenit æquatio 340 R — 1 C $\sqsupset$ 1344. Radice exiſtente 16; Si enim 340; ducatur in 16; fit 5440. à quo ſi dempſeris 4096; cubum ex 16. reliquum fiet 1344; Id autem ideo accidit; quia ſi planum aliquod fuerit, nihil prohibet illud intelligere diuiſum, in plures partes proportionales, quarum larera; hoc eſt rectę, quæ poſſunt ſupradictas partes, erunt proportionales. At ſi vnum ex extremis planis proportionalibus, quod quadratum intelligo, ducatur in ſui latus; fit cubus, qui ſubtractus à ſolido ſub plano prædicto, & latere iam dicto, relinquitur ſolidum, ſub hoc eodem latere, & reliquo plano, quod conſtat reliquis duobus, vel tribus planis proportionalibus, &c. prout diuiſio plani totius fuerit inſtituta, &c, Inſulsè tamen loquuntur; nam hìc de conſtitutione æquatinum amphibolarum habetur ſermo: in quibus liberum eſt, vnam, vel aliam radicem ſumere compoſitam ex ijs, quæ ad coefficientem magnitudinem, & ad homogeneum comparationis, faciunt. Hæc infra oſtendemus. Atque non diſſimili modo penes proportionales magnitudines attenditur conſtitutio quadrato-quadrati. Itaque. *Quid in æquationibus amphibolis ordinis cubici.* *Nonnulla tractantur, aduerſus quoſdã minus benè loquentes.*

In æquationibus amphibolis quadrato quadraticis affectis ſub latere, nempè b ſol. $a - a^4 \sqsupset$ z plano plano; Coefficiens ſolidum eſt compoſitum ex cubis quatuor continuè proportionalium, & comparationis homogeneum fit ductu alterius extremę in cuborum aggregatum à tribus reliquis, vnde fit radix prima, vel quarta. Quare *Quid in æquationibus amphibolis quadrato-quadraticis.*

ſi ſint 2, 4, 8, 16. Dicemus 4680 R — 1 QQ æquari 9344, & fiet 1 R, 2 vel 16.

Hæc ſubijcienda ſuperſunt.

Quædam hic ſubijcienda maximè neceſſaria, & quidem ab Auctore adinuenta vt ſimilia.

Sint continuè proportionales d, g, $\frac{g^2}{d}$; $\frac{g^3}{d^2}$ harum cubi ſunt d^3, g^3, $\frac{g^6}{d^3}$; $\frac{g^9}{d^6}$ quorum aggregatum eſt $d^3 + g^3 + \frac{g^6}{d^3} + \frac{g^9}{d^6}$ & hoc eſt ſolidum coefficiens; at ſi primum excipias; trium reliquorum cuborum aggregatum eſt $g^3 + \frac{g^6}{d^3} + \frac{g^9}{d^6}$ quo ductò in d, alteram extremarum, fit $d\,g^3 + \frac{g^6}{d^2} + \frac{g^9}{d^5}$, quod, & eſt comparationis homogeneum; radix autem cùm ſit prima, vel quarta, ſit modò prima d, quæ ducatur in ſolidum coefficiens iam dictum, fitque $d^4 + d\,g^3 + \frac{g^6}{d^2} + \frac{g^9}{d^5}$, quod multatum quadrato-quadrato radicis, nempe d^4, remanet $d\,g^3 + \frac{g^6}{d^2} + \frac{g^9}{d^5}$. Quod erat comparationis homogeneum. Hunc igitur in modum inquiſiuimus oblatæ æquationis naturam. Nec diſſimiliter, cùm altera adhibetur extremarum.

Æquationis amphibola quadrato-cubica.

In æquationibus amphibolis Quadrato-cubicis affectis ſub latere vt b pl. pl. a — a^5 ⫬ z plano ſolido. Coefficiens plano-planum componitur ex quadrato-quadratis, quinque continuè proportionalium, & comparationis homogeneum fit ductu alterius extremæ in aggregatum quadrato-quadratorum à quatuor reliquis; fitque radix prima, vel quarta. Vt ſi ſint 2, 4, 8, 16, 32. Dicemus 1118480 R — 1 QC æquari 2236928, fitque 1 R 2, vel 32.

Æquationes amphibola cubo-cubica.

In æquationibus amphibolis Cubo-cubicis affectis ſub latere, vt b pl. ſol. a — a^6 ⫬ z ſol. ſolido. Coefficiens plano-ſolidum componitur ex quadrato-cubis ſex continuè proportionalium; & comparationis homogeneum, fit ductu alterius extremæ in aggregatum quadrato-cuborum à quinque reliquis, fitque radix prima, vel ſexta. Vnde ſi ſint 2, R Q C 160, R Q C 800, R Q C 4000, R Q C 20000; 10. Dicemus 124992 R — 1 C C æquari 249, 920; fitque 1 R 2, vel 10.

Decet hic nonnihil immorari, perpendendo quædam admiratu digniſſima.

Auctor quædam animaduerſione digna proponit, pro æquationibus quadraticis, cubicis, quadrato quadraticis, quadrato-cubicis; Cubo-cubicis.

Quadratum, vnde æquatio quadratica ſumit nomenclaturam, exponitur à binario, quamobrem eius conſtitutio, penes duo latera, attenditur.

Cubus; vnde cubica dicitur æquatio, exponitur à ternario, quapropter eius conſtitutio penes tria latera, & quidem continuè proportionalia, attenditur.

Quadrato-quadratum, vnde quadrato-quadratica æquatio denominatur, à quaternario exponitur; quamobrem eius conſtitutio penes quatuor latera, & quidem continuè proportionalia attenditur.

Quadrato-cubus, vnde æquatio dicitur quadrato-cubica à quinario exponitur, quamobrem eius conſtitutio penes quinque latera, & quidem continuè proportionalia, attenditur.

Cubo-cubus, vnde cubo-cubica æquatio à ſenario exponitur, propterea eius conſtitutio, penes ſex latera, & quidem continuè proportionalia attenditur.

Penes quot latera vniuſcuiuſque æquationis naturalis conſtitutio attédi debeat.

Penes igitur tot latera attendi debet vniuſcuiuſque ex recenſitis æquationibus conſtitutio, quot ſunt vnitates, quibus exponens Poteſtatis conſtat. Et hoc in primis eſt animaduerſione dignum. Interim aduerte quàm magnia in his myſteria ſint, & quàm digna ſcitu in Mathematicis tractentur Diſciplinis. At verò prætermiſſis æquationibus amphibolis intra planorum fines, atque ſumptis ijs, quæ ſolidæ ſunt, hæc obſeruare licet. In æquationibus amphibolis cubicis, affectis ſub quadrato, quemadmodum b a^2 — a^3 ⫬ z ſolido. Coefficiens longitudo ex tribus proportionalibus componitur. Comparationis homogeneum fit ductu alterius extremæ in quadratum compoſitæ à duabus reliquis, fitque radix compoſita à duabus primis, vel duabus poſtremis. Vnde ſi ſint 2, 4, 8. Dicemus 14 Q — 1 C æquari 288; fitq; 1 R 6, vel 12.

Hæc ſubijcienda ſuperſunt.

Quædam hic ſuperſunt cõſideranda.

Sint tres proportionales d; g; $\frac{g^2}{d}$ harum aggregatum eſt $d + g + \frac{g^2}{d}$ & hoc eſt coefficiens. Quadratum compoſitæ, à duabus reliquis $g + \frac{g^2}{d}$ ſi pro extrema ſumatur d, eſt $g^2 + 2\frac{g^3}{d} + \frac{g^4}{d^2}$ quo ducto in prædictam extremam, fit $d\,g^2 + \frac{2\,d\,g^3}{d} + \frac{d\,g^4}{d^2}$; ſeù quod idem eſt $d\,g^2 + 2\,g^3 + \frac{g^4}{d}$; & hoc erit comparationis homogeneum; cùmque dictum ſit radicem eſſe compoſitam à duabus primis, ea quidem erit $d + g$, cuius quadratum eſt, $d^2 + 2\,d\,g + g^2$, quo ducto in $d + g$, $+ \frac{g^2}{d}$ coefficientem, fit $d^3 + 3\,d^2 g + 4\,d\,g^2 + 3\,g^3 + \frac{g^4}{d}$, à quo ſi dempſeris cubum

ex

ex $d + g$, nempè $d^3 + 3\,d^2 g + 3\,d g^2 + g^3$ remanebit $d g^2 + 2 g^3 + \frac{g^4}{d}$ quod erat comparationis homogeneum. Hac igitur arte ſum aſſecutus huius æquationis naturam.

Nec diſſimili modo, cùm altera adhibetur extrema.

Quando ſunt æquationes amphibolæ quadratoquadratica.

In æquationibus amphibolis Quadrato-quadraticis affectis ſub cubo, vt $b\,a^3 - a^4 = z$ plano-plano. Coefficiens longitudo compoſita eſt ex quatuor continuè proportionalibus, comparationis homogeneum fit ductu alterius extremæ in cubum compoſitæ à tribus reliquis, fitque radix compoſita à tribus primis, vel tribus poſtremis. Vnde ſi ſint 2, 4, 8, 16. Dicemus 30 C — 1 QQ æquari 43904. fitque 1 R 14, vel 28.

Quando ſunt æquationes amphibolæ quadratocubica.

In æquationibus amphibolis, Quadrato-cubicis vt $b\,a^4 - a^5 = z$ plano ſolido. Coefficiens longitudo componitur ex quinque continuè proportionalibus, & Comparationis homogeneum; fit ductu alterius extremæ in quadrato-quadratum compoſitę ex quatuor reliquis; fitque radix compoſita, ex quatuor primis, vel quatuor poſtremis. Vnde ſi ſint 1, 2, 4, 8, 16. Dicemus 31 QQ — 1 QC ęquari 810000. fitque 1 R; 15, vel 30; Neque diſſimili artificio hęc inuenies, vt in pręcedentibus.

Quando ſunt æquationes amphibolæ cubocubica.

In ęquationibus amphibolis Cubo-cubicis, affectis ſub quadrato-cubo vt $b\,a^5 - a^6 = z$ ſolido-ſolido. Coefficiens longitudo componitur à ſex continuè proportionalibus. Comparationis homogeneum fit ductu alterius extremę in quadratocubicum compoſitę à reliquis; fitque radix compoſita ex quinque primis, vel quinque poſtremis. Vnde ſi ſint 1, 2, 4, 8, 16, 32. Dicemus 63 QC — 1 CC ęquari 916, 132, 832. Et ęadem ratione, qua ſupra hęc aſſequi licet.

Quædam hic in primis obſeruanda.

Hic obſeruandum occurrit, quod omnibus his commune, eſt & quid inter eadem interſit, nempè diſcrimen ortum ab affectionum diuerſitate, quamuis eadem ſit omninò poteſtas,. Collatis igitur duabus ęquationibus, b pl. $a - a^3 = z$ ſolido, & $b\,a^2 - a^3 = z$ ſolido. Commune quidem vtrique eſt, earum conſtitutionē attendi, penes tria latera *continue* proportionalia. Itemque in vtraque ternarium facere ad coefficientis magnitudinis compoſitionem; In illa enim componitur ex quadratis trium proportionalium, in hac verò ex tribus ipſis lateribus proportionalibus; Propterea differunt, quoniam in illa componitur coefficiens, vtpotè planum ex quadratis, in hac, vtpotè latus ex lateribus; In illa comparationis homogeneum ſolidum eſt; factum ductu alterius extremę in aggregatum quadratorum à duabus reliquis. In hac autem fit ductu alterius extremę in quadratum compoſitę à duabus reliquis; In illa quidem atteneditur aggregatum quadratorum à reliquis duabus, è tribus proportionalibus; quemadmodum cuique notare licet.

In hac attenditur quadratum compoſitę à reliquis illis duabus è tribus proportionalibus. Similia quoque in reliquis ſuprapoſitis ęquationibus obſeruanda ſunt, nempè in quadrato-quadraticis amphibolis affectis ſub latere, qnaternarium facere ad coefficientis conſtitutionem, quemadmodum etiam ad conſtitutionem coefficientis in ęquatione quadrato-quadratica affecta ſub cubo, &c. Differunt verò penes ea, quę cuique licet adnotare.

Vnde ſuperiora deducantur, inquirendum ſupereſt.

Vnde ſuperiora deducantur inquiritur.

Conſideremus igitur æquationem illam b pl. $a - a^3 = z$ ſolido. Dicebamus autem cum Vieta coefficiens planum componi ex quadratis trium proportionalium, & comparationis homogeneum ſolidum eſſe factum ex ductu alterius extremæ in aggregatum quadratorum à reliquis, Idque deprehenditur hac Arte,

Explicatio.

Sint proportionales d. g. $\frac{g^2}{d}$; Sunt autem proportionales, vt patet. Deinde ducatur quilibet terminus in ſe quadraticè, vt fiant d^2; g^2; $\frac{g^4}{d^2}$ horum aggregatum eſt $d^2 + g^2 + \frac{g^4}{d^2}$, quo ducto in d, fit $d^3 + d g^2 + \frac{g^4}{d}$ à quo ſi dematur d^3, cubus ex d, remanebit $d g^2 + \frac{g^4}{d}$. At ſi ex extremis vna puta d, ducatur in aggregatum quadratorum à reliquis, puta $g^2 + \frac{g^4}{d^2}$ fit productum $d g^2 + \frac{g^4}{d}$ hoc autem eſt idem cum dicto iam reſiduo. Vnde ſatis apertè conſtat coefficiens planum componi ex quadratis trium proportionalium, cuiuſmodi eſt $g^2 + d^2 + \frac{g^4}{d^2}$ At verò comparationis homogeneum fieri, vt dictum eſt; patet, etenim d, modo vna ex extremis, & $g^2 +$

$\frac{g^4}{d^2}$ est aggregatum quadratorum à reliquis, quo ducto in d, fit d g^2 ✠ $\frac{g^4}{d}$ quantum profecto remanet, si ex d^3 ✠ d g^2 ✠ $\frac{g^4}{d}$ auferatur d^3; remanet enim d g^2 ✠ $\frac{g^4}{d}$. Hac itaque industria cognouimus vnde illud enunciatum, ortum ducat; quod clariùs hunc in modum euinces. Siquidem liberum est extremam accipere, sumamus igitur alteram $\frac{g^2}{d}$. Itaque aggregatum quadratorum, nempe d^2 ✠ g^2 ✠ $\frac{g^4}{d^2}$ ducatur in $\frac{g^2}{d}$, & proueniet d g^2 ✠ $\frac{g^4}{d}$ ✠ $\frac{g^6}{d^3}$ à quo si subducas $\frac{g^6}{d^3}$ cubum ex $\frac{g^2}{d}$ remanebit d g^2 ✠ $\frac{g^4}{d}$. At verò tantum fit, si $\frac{g^2}{d}$ extrema eadem, ducatur in d^2 ✠ g^2 aggregatum quadratorum à reliquis, fit nempe $\frac{d^2g^2}{d}$ ✠ $\frac{g^4}{d}$ seu d g^2 † $\frac{g^4}{d}$.

Supra tradita ostenduntur.

Quæ diximus de huiusmodi çquatione suo modo cæteris accommodari possunt. Hæc tamen in primis consideranda sunt. Cæterum persimili modo, cùm altera adhibetur extrema, procedendum est, &c.

De contradicentibus æquationibus tractatio instituitur.

Proximum est, vt Contradicentes perpendamus, quarum primò cum Vieta, constitutiua persequemur.

Si a^2 ✠ b a æquetur z plano, & rursus e^2 — b e æquetur z plano.

Sunt quidem duo latera, quæ differunt per b, coefficientem; at verò factum sub illis, æquale est z plano, fitque radix a, latus minus, & maius.

Proponitur æquatio quadratica.

Sunto enim latera 5, 17, & 1 Q ✠ 12 R æquatur 85, fit autem 1 R, 5; Rursus 1 Q — 12 R æquetur 85, & 1 R fit 17, & ita est, vt quisque poterit experiri.

Numeris eadem tractantur.

Hæc autem abs præcitato Auctore tradita, possunt Geometricè ostendi. Si enim recta quædam per inæqualia secetur, quadratum vnius segmenti, puta minoris, vna cum rectangulo sub ipsis segmentis, æquale est quadrato totius lineæ, minus rectangulo sub tota, & segmento maiori. Itaque segmentum minus, erit latus minus, tota linea erit latus maius, & segmentum maius erit coefficiens, quare coefficiens erit differentia laterum, vt patet. Hinc autem facile intelliges çquationes contradicentes ordinis quadratici se habere, vt dicebamus; est enim coefficiens differentia laterum, quorum ductu fit comparationis homogeneum.

Geometricè ostendi possunt.

Quando æquatio fuerit ordinis quadrato quadratici.

Deinde si æquatio fuerit ordinis quadratoquadratici, vt si a^4 ✠ b sol. a æquetur z planoplano; & rursus e^4 — b sol. e æquetur z planoplano. Sunt quatuor continuè proportionales à quibus cubi, alternè sumpti differunt per b solidum; fit verò z planoplanum ductu alterius extremæ in differentiam cuborum a reliquis alternè sumptarum, estque a, prima minor inter extremas, & e est quarta.

Numeris eadem tractantur.

Sint igitur continuè proportionales, 1, 2, 4, 8, & 1 Q Q ✠ 455 R, æquabitur 456; fitque 1 R, 1, Rursus 1 Q Q — 455 R, æquabitur 456, fitque 1 R, 8. Insuper.

Si sint 2, 4, 8, 16, fiet çquatio 1 Q Q ✠ 3640 R = 7296 fitque 1 R, 2. Item 1 Q Q — 3640 R = 7296, fitque 1 R, 16.

Geometra has æquationes quadratoquadraticas, & reliquas altioris ordinis detestatur.

Hæret hìc quidem Geometra, cùm hæ sint æquationes extra limites eius, quam profitetur Artem; quadratum enim in quadratum si ducatur, fit quantitas imaginaria, à cuius contemplatione prorsus aboret; tamen Arithmeticus hæc sua meditatione persequitur; & quod lineis accommodata vidimus, suo modo numeris aptari possunt; vt nil addendum videatur; solùm, hìc subijcimus consideratu dignissima.

Ostenduntur supradicta processu Analytico.

Enunciatum est si a^2 ✠ b a æquetur z plano, & e^2 — b e æquetur z plano. Duo esse latera, quæ differunt per b. Attende quęso harum æquationum naturam, Si a ✠ b, æquetur e, vtique differentia laterum a, & e, erit b ob id e — b çquabitur a, at verò si a † b, quod e, supponimus çquari, ducatur in a fiet a^2 † b a, quod æquabitur ei, quod fit ex e — b, in e. nempe e^2 — b e; Si itaque a^2 † b a æquetur z plano, & e^2 — b e æquabitur z plano; nam vt dicebamus a † b, supponitur æquari e, & e — b qropterea çquabatur a, tantum igitur proueniet ex ductu ipsius a, in a † b, quantum ex ductu ipsius e, in e — b; sed ductu ex a, in a † b fit z planum, propterea ductu ex e in e — b proueniet z planum.

Hunc in modum perspecta redditur contradicentium æquationum natura, & sic de reliquis.

Hoc itaque modo perspecta fit quadraticarum contradicentium natura, ac earundem constitutiua innotescunt.

Nec Arte dissimili, in çquationibus ad hoc genus pertinentibus discurrendum.

Vnde

Vnde cùm esset ęquatio a^3 † b solido a ⊐ z pl.plano, enunciatum fuit esse quatuor proportionales, à quibus cubi, alternè differunt per b solidum, & z pl.planum fit ductu alterius extremę in differentiam cuborum à reliquis alternè sumptorum.

Si a^6 — b pl. sol. a æquetur z solidosolido, & rursus c^6 — b planosolido c, æquetur z solidosolido. Sunt sex continuè proportionales, a quibus quadratocubi alternè sumpti differunt per b planosolidum. Fit verò z solidosolidum ductu alterius extremę in differentiam quadratocuborum à reliquis alternè sumptorum, estque a prima minor inter extremas c, verò sexta. *Proponitur æquatio cubocubica.*

Quare si fuerint continuè proportionales, vt 1; ℞ Q c 2, ℞ Q c 4; ℞ Q c 8, ℞ Q c 16; 2, & rursus 1 CC + 21 R, ęquatur 22, fitque 1 R 1, & 1 CC — 21 R æquabitur 22, fitque 1 R; 2. *Numeris eadem tractantur.*

Quadroto-cubi supradictorum terminorum 1, 2, 4, 8, 16, 32; si sumantur alternè fiet, 42, & 21. nempe si ad 1, addatur 4; fit 5; cui si addas 16, fit 21; deinde si ad 2, addatur 8; fiet 10; huic si addatur 32; fiet 42; constat autem 42, differre à 21, per 21. *Supradicta declarantur.*

Deinde 22, fieri ductu alterius extremæ in differentiam quadrato cuborum à reliquis alternè sumptorum &c. Patet; siquidem si ad 2; addatur 8, fit 10, huic addito 32, fit 42, mox autem si ad 4, addas 16; fiet 20, patet autem 20, differre à 42, per 22. Ducatur 22, in 1, alteram extremarum, & fit 22. Rursus si ad 1, addas 4, fiet 5, huic si addas 16, fiet 21, deinde si ad 2, addas 8, fiet 10, manifestum est, 10, a 21, differre per 11. Ducatur hic in 2. extremarum alteram, & fiet 22, vt priùs.

Ad æquationes quod attinet, si 1 R valor est 1, 1 CC valebit 1, & 21 R, valebunt 21, horum summa est 22, altera æquationis pars. Si 1 R sit 2, 1 CC valebit 64, & 21 R, 42, si 42 tollas à 64, remanebit itidem 22 &c. *Æquationes rite se habere declaratur.*

Si a^4 + b a^3, æquetur z plano-plano, & rursus c^4 — b c^3, æquabitur z plano-plano. *Proponitur æquatio quadratoquadratica.*

Sunt quatuor continuè proportionales, quarum alternè sumptarum differentia est b, & fit z plano-planum ductu alterius extremæ in cubum differentiæ reliquarum alternè sumptarum, & dum intelligitur prima minor inter extremas esse a, differentia alternè sumpta trium primarum, c differentia est trium postremarum. *Propositio de ipsis.*

Sunto proportionales continuè 1, 2, 4, 8, & 1 QQ + 5 C, æquabitur 216, & fit 1 R, 3, & rursus 1 QQ — 5 C, æquabitur 216, fitque 1 R, 6. Vel sunto continuè proportionales 2, 4, 8, 16, & 1 QQ + 10 C, æquabitur 3456, & fiet 1 R, 6, & rursus 1 QQ — 10 C, æquabitur 3456, & fiet 1 R, 12. *Explicatio.*

Si sint continuè proportionales 1, 2, 4, 8; Sumantur alternè nimirum 1, & 4, deinde 2, & 8, & ad 1, addatur 4, & ad 2, addatur 8, fient 5, & 10, horum differentia est 5, deinde 216; fieri vt dictum est &c. patet nam 2, differt ab 8 per 6, ducatur in se cubicè, & fit 216, hic ducatur in 1, extremum vnum; fitque 216. Deinde 1, differt a 4, per 3, huius cubus est 27, siquidem 3, cubicè ductus facit 27, hic verò numerus ducatur in 8, extremum alterum, & fit 216, & sic de exemplo altero. *Supradictorũ declaratio.*

Ad æquationes quod attinet; Si 1 R, valet 3, vtique 1 QQ valebit 81, & 5 C, valebunt 135, horum summa est 216, altera æquationis pars. Deinde si 1 R, valet 6, 1 QQ, valebit 1296, & 5 C, valebunt 1080. Si verò a 1297, auferamus 1080, remanebit 216, pro altera æquationis parte. *Æquationes rite se habere ostenditur.*

Hæc autem iuuat subijcere.

Sint continuè proportionales d, g, $\frac{g^2}{d}$, $\frac{g^3}{d^2}$. Coefficiens erit $\frac{g^3}{d^2}$ + g — d — $\frac{g^2}{d}$. Siquidem est differentia alternè sumptarum, continuè proportionalium At verò si prima sit d, differentia reliquarum alternè sumptarum est $\frac{g^3}{d^2}$ + g — $\frac{g^2}{d}$. Huius cubus est $\frac{g^9}{d^6}$ + 6 $\frac{g^7}{d^4}$ — 3 $\frac{g^8}{d^5}$ — 7 $\frac{g^6}{d^3}$ + g^3 — 3 $\frac{g^4}{d}$ + 6 $\frac{g^5}{d^2}$, & climactico ordine seruato; erit $\frac{g^9}{d^6}$ — 3 $\frac{g^8}{d^5}$ + 6 $\frac{g^7}{d^4}$ — 7 $\frac{g^6}{d^3}$ + 6 $\frac{g^5}{d^2}$ — 3 $\frac{g^4}{d}$ + g^3; hoc autem ducto in d, primam; fit $\frac{g^9}{d^5}$ + 6 $\frac{g^7}{d^3}$ — 3 $\frac{g^8}{d^4}$ — 7 $\frac{g^6}{d^2}$ + d g^3 — 3 g^4 + 6 $\frac{g^5}{d}$, & ordine iam dicto obseruato; erit $\frac{g^9}{d^5}$ *Pragmatia Analytica in supradictorũ gratiam instituitur.*

$\frac{g^9}{d^5} - 3\,\frac{g^8}{d^4} + 6\,\frac{g^7}{d^3} - 7\,\frac{g^6}{d^2} + 6\,\frac{g^5}{d} - 3\,g^4 + d\,g^3$, & hoc erit comparationis homogeneum.

Resolutionis continuatio. At verò radix est $d + \frac{g^2}{d} - g$. Huius cubus est $d^3 + 6\,d\,g^2 + 6\,\frac{g^4}{d} - 3\,d^2 g + \frac{g^6}{d^3} - 3\,\frac{g^5}{d^2} - 7\,g^3$, quo ducto in $\frac{g^3}{d^3} + g - d - \frac{g^2}{d}$, coefficientem, fit productum $17\,d\,g^3 + 22\,\frac{g^5}{d} - d^4 - 22\,g^4 + 4\,d^3 g - 17\,\frac{g^6}{d^2} - 4\,\frac{g^8}{d^4} + \frac{g^7}{d^3} - 10\,d^2 g^2 + 10\,\frac{g^7}{d^3}$. Cui si addideris quadrato-quadratum eiusdem radicis $d + \frac{g^2}{d} - g$, nempe $d^4 + 10\,d^2 g^2 + 10\,\frac{g^6}{d^2} - 4\,d^3 g - 16\,d\,g^3 - 16\,\frac{g^5}{d} + \frac{g^8}{d^4} - 4\,\frac{g^7}{d^3} + 19\,g^4$, seu ordine iam dicto seruato $\frac{g^8}{d^4} - 4\,\frac{g^7}{d^3} + 10\,\frac{g^6}{d^2} - 16\,\frac{g^5}{d} + d^4 + 19\,g^4 - 4\,d^3 g - 16\,d\,g^3 + 10\,d^2 g^2$.

Proponitur pragmatia de inenda. Vniuersam hanc pragmatiam habes hìc extensam quam magni facias oportet, huius enim imitatione omnia Theoremata reperies. Quod si Maiores hanc artificiosam analysin omiserint; factum id putes, quoniam in primis curabant, vt posteritas eorum ingenia coleret; inuenta suspiceret, ac admiraretur; inueniendi quidem Artem ignorans.

Radix $\quad d + \frac{g^2}{d} - g$

$d + \frac{g^2}{d} - g$

$- d\,g - \frac{g^3}{d} + g^2$

$g^2 + \frac{g^4}{d^2} - \frac{g^3}{d}$

$d^2 + g^2 - d\,g$

Quadratum $\quad d^2 + \frac{g^4}{d^2} - 2\,d\,g - 2\,\frac{g^3}{d} + 3\,g^2$

$d + \frac{g^2}{d} - g$

$- d^2 g - \frac{g^5}{d^2} + 2\,d\,g^2 + 2\,\frac{g^4}{d} - 3\,g^3$

$+ d\,g^2 + \frac{g^6}{d^3} - 2\,g^3 - 2\,\frac{g^5}{d^2} + 3\,\frac{g^4}{d}$

$d^3 + \frac{g^4}{d} - 2\,d^2 g - 2\,g^3 + 3\,d\,g^2$

Cubus $\quad d^3 + 6\,d\,g^2 + 6\,\frac{g^4}{d} - 3\,d^2 g + \frac{g^6}{d^3} - 3\,\frac{g^5}{d^2} - 7\,g^3$

$d + \frac{g^2}{d} - g$

$- d^3 g - 6\,d\,g^3 - 6\,\frac{g^5}{d} + 3\,d^2 g^2 - \frac{g^7}{d^3} + 3\,\frac{g^6}{d^2} + 7\,g^4$

$d^2 g^2 + 6\,g^4 + 6\,\frac{g^6}{d^2} - 3\,d\,g^3 + \frac{g^8}{d^4} - 3\,\frac{g^7}{d^3} - 7\,\frac{g^5}{d}$

$d^4 + 6\,d^2 g^2 + 6\,g^4 - 3\,d^3 g + \frac{g^6}{d^2} - 7\,d\,g^3 - 3\,\frac{g^5}{d}$

Quadrato-quadratũ $d^4 + 10\,d^2 g^2 + 10\,\frac{g^6}{d^2} - 4\,d^3 g - 16\,d\,g^3 - 16\,\frac{g^5}{d} + \frac{g^8}{d^4} - 4\,\frac{g^7}{d^3} + 19\,g^4$

κλιμακωτῶς $\frac{g^8}{d^4} - 4\,\frac{g^7}{d^3} + 10\,\frac{g^6}{d^2} - 16\,\frac{g^5}{d} + d^4 + 19\,g^4 - 4\,d^3 g - 16\,d\,g^3 + 10\,d^2 g^2$

Cubus

Cubus $d^3 + 6 d g^2 + 6 \frac{g^4}{d} - d^2 g + \frac{g^6}{d^3} - 3 \frac{g^5}{d^2} - 7 g^3$

Coefficiens $\frac{g^3}{d^2} + g - d - \frac{g^2}{d}$

$$d^2 g^2 - 6 g^4 - 6 \frac{g^6}{d^2} + 3 d g^3 - \frac{g^8}{d^4} + 3 \frac{g^7}{d^3} + 7 \frac{g^5}{d}$$

$$- d^4 - 6 d^2 g^2 - 6 g^4 + 3 d^3 g - \frac{g^6}{d^2} + 3 \frac{g^5}{d} + 7 d g^3$$

$$d^3 g + 6 d g^3 + 6 \frac{g^5}{d} - 3 d^2 g^2 + \frac{g^7}{d^3} - 3 \frac{g^6}{d^2} - 7 g^4$$

$$d g^3 + 6 \frac{g^5}{d} + 6 \frac{g^7}{d} - 3 d g^4 + \frac{g^9}{d^5} - 3 \frac{g^8}{d^4} - 7 \frac{g^6}{d^3}$$

$$17 d g^3 + 10 \frac{g^7}{d^3} - d^4 - 22 g^4 + 4 d^3 g - 17 \frac{g^6}{d^2} - 4 \frac{g^8}{d^4} + \frac{g^9}{d^5} - 10 d^2 g^2 + 22 \frac{g^5}{d}$$

κλιμακωτῶς $\frac{g^9}{d^5} - 4 \frac{g^8}{d^4} + 10 \frac{g^7}{d^3} - 17 \frac{g^6}{d^2} + 22 \frac{g^5}{d} - d^4 - 22 g^4 + 14 d^3 g + 17 d g^3 - 10 d^2 g^2$

$$\frac{g^8}{d^4} - 4 \frac{g^7}{d^3} + 10 \frac{g^6}{d^2} - 16 \frac{g^5}{d} + d^4 + 19 g^4 - 4 d^3 g - 16 d g^3 + 10 d^2 g^2$$

$\frac{g^9}{d^5} - 3 \frac{g^8}{d^4} + 6 \frac{g^7}{d^3} - 7 \frac{g^6}{d^2} + 6 \frac{g^5}{d} - 3 g^4 + d g^3$. Quod est ęquale comparationis homogeneo,

$$\frac{g^3}{d^2} + g - \frac{g^2}{d}$$

$$\frac{g^3}{d^2} + g - \frac{g^2}{d}$$

$$- \frac{g^5}{d^3} - \frac{g^3}{d} + \frac{g^4}{d^2}$$

$$\frac{g^4}{d^2} + g^2 - \frac{g^3}{d}$$

$$\frac{g^6}{d^4} + \frac{g^4}{d^2} - \frac{g^5}{d^3}$$

Quadratum $\frac{g^6}{d^4} + g^2 - 2 \frac{g^5}{d^3} - 2 \frac{g^3}{d} + 3 \frac{g^4}{d^2}$

$$\frac{g^3}{d^2} + g - \frac{g^2}{d}$$

$$- \frac{g^8}{d^5} - \frac{g^4}{d} + 2 \frac{g^7}{d^4} + 2 \frac{g^5}{d^2} - 3 \frac{g^6}{d^3}$$

$$\frac{g^7}{d^4} + g^3 - \frac{g^6}{d^3} - 2 \frac{g^4}{d} + 3 \frac{g^5}{d^2}$$

$$\frac{g^9}{d^6} + \frac{g^5}{d^2} - 2 \frac{g^8}{d^5} - 2 \frac{g^6}{d^3} + 3 \frac{g^7}{d^4}$$

Cubus $\frac{g^9}{d^6} + 6 \frac{g^7}{d^4} - 3 \frac{g^8}{d^5} + 6 \frac{g^5}{d^2} + g^3 - 3 \frac{g^4}{d} - 7 \frac{g^6}{d^3}$
$+ d$

$$\frac{g^9}{d^5} + 6 \frac{g^7}{d^3} - 3 \frac{g^8}{d^4} + 6 \frac{g^5}{d} + d g^3 - 3 g^4 - \frac{g^6}{d^2}$$

$$\frac{g^9}{d^5} - 3 \frac{g^8}{d^4} + 6 \frac{g^7}{d^3} - 7 \frac{g^6}{d^2} + 6 \frac{g^5}{d} + 3 g^4 - d g^3$$

Rectè

Rectè igitur illud; In huiusmodi ęquatione sunt quatuor continuè proportionales, quarum alternè sũptarum differentia est b; & fit z planoplanũ ductu vtriusuis extremæ in cubum differentiæ reliquarum alternè sumptarum; Dumque intelligitur prima minor inter extremas, est a differentia alternè sumpta trium primarum, & differentia trium postremarum.

Auctor declarat magis supradicta.

Diximus autem supra 216 comparationis homogeneum fieri, &c. quod, vt declaremus 2, differt ab 8, per 6; idque quoniam in ratione dupla coincidit, cum differentia reliquarum alternè sumptarum; nam si 2, secundus terminus addatur ad 8, vltimum fit 10, a quo si dempseris 4, remanet 6; cuius cubus ducendus est in 1, extremum alterum, &c. Quod in Speciosa resolutione cernere licet, vbi generalem rationem efformandi comparationis homogeneum obseruauimus. Verùm enim verò. Radices fiunt, vt enunciauimus.

Hic declarãtur nonnulla, tradita pag. 138; vbi Auctor neglexit reductionem fractionum ad minimos terminos, huius autem redditur causa:

Hìc obseruandum occurrit, nos aliquando in fractionum vsu, superiùs reductionem ad minores terminos neglexisse, & quidem vitandæ obscuritatis causa, Tyronibus enim est magis obuia pragmatia per multiplicationem specierum, quàm per applicationem. Si quis tamen cupiat eadem elegantiori forma tractare, sic operabitur. Ad paginam quidem 138.

Si sint quatuor latera continuè proportionalia, cubus è secundo aqualis est solido facto à quadrato primi in quartum.

Sit a, primum in serie quatuor continuè proportionalium; secundum esto b; erit ob id $\frac{b^2}{a}$ tertium; Si enim b, quadraticè in se multiplicetur, fit b^2, quo applicato ad a, fit $\frac{b^2}{a}$ tertium; deinde si $\frac{b^2}{a}$, in se quadraticè multiplicetur, fit $\frac{b^4}{a^2}$ quo applicato ad b, secundum, fit $\frac{b^4}{a^2b}$ hoc autem elidendo b; fit $\frac{b^3}{a^2}$, & hoc est quartum; sunt igitur quatuor latera continuè proportionalia a; b; $\frac{b^2}{a}$; $\frac{b^3}{a^2}$. Ducatur a, primum in se quadraticè, & fit a^2; quo ducto in quartum $\frac{b^3}{a^2}$ fit productum $\frac{a^2b^3}{a^2}$; hoc ęquatur b^3, siquidem elidendo a^2; remanet b^3.

Non dissimiliter pagina 141; hoc modo.

Quæ tradita sunt pag. 141 item declarãtur.

Si sint quatuor latera continuè proportionalia; cubus à differentia mediorum, plus solido facto ex triplo rectangulo sub medÿs, vel extremis, & eadem differentia mediorum, aqualis est solido à rectangulo triplo prædicto, in differentiam extremorum.

Sunt latera continuè proportionalia, a; b; $\frac{b^2}{a}$; $\frac{b^3}{a^2}$ differentia mediorum est $b - \frac{b^2}{a}$; huius cubus est $b^3 - 3\frac{b^4}{a} + 3\frac{b^5}{a^2} - \frac{b^6}{a^3}$; at verò rectangulum sub medijs est $\frac{b^3}{a}$, cuius triplum est $3\frac{b^3}{a}$, quo ducto in $b - \frac{b^2}{a}$; differentiam mediorum laterum, producitur $3\frac{b^4}{a} - 3\frac{b^5}{a^2}$; quo addito ad cubum iam dictum, fit $b^3 - \frac{b^6}{a^3}$. Hoc idem autem euenit, si multiplicetur $\frac{b^3}{a}$ rectangulum sub medijs, per $a - \frac{b^3}{a^2}$; differentiam extremorum; & prouenit $b^3 - \frac{b^6}{a^3}$. Cęterum supposuimus a, maius esse extremum è quatuor lateribus proportionalibus; proinde b; maius est, quàm $\frac{b^2}{a}$; quamobrem differentia mediorum laterum est $b - \frac{b^2}{a}$ quemadmodum differentia extremorum est $a - \frac{b^3}{a^2}$.

Ita pagina 146.

Quæ tradita sunt pag. 146. enucleantur.

Differentia inter primam, & tertiam ad differentiam inter secundam, & quartam in serie quatuor continuè proportionalium, est vt prima ad secundam, atque adeo vt secunda ad tertiam, vt tertia ad quartam.

Sit prima a, secunda b, tertia erit $\frac{b^2}{a}$, & quarta erit $\frac{b^3}{a^2}$ igitur sunt in continua ratione; vt verò differentia inter primam, & tertiam, est $\frac{b^2}{a} - a$ ita qnidem differentia inter secundam, & quartam est $\frac{b^3}{a^2} - b$. Ostendendum est, ita esse $\frac{b^2}{a} - a$ ad $\frac{b^3}{a^2} - b$, vt a ad b; Quoniam enim si sint proportionales $\frac{b^2}{a} - a$; $\frac{b^3}{a^2} - b$; a; & b; erit factum sub extremis, ęquale facto sub medijs; propterea $\frac{b^3}{a} - ab$; æquabitur $\frac{ab^3}{a^2} - ab$. At ita se habet, nam $\frac{b^3}{a} - ab$; idem est, quod $\frac{b^3 - a^2b}{a}$. At verò $\frac{ab^3}{a^2} - ab$; idem est quod $\frac{ab^3 - a^3b}{a^2}$ at elidendo a, fit $\frac{b^3 - a^2b}{a}$; vt prius; quare proportinnales erunt hæ magnitudines, vt a ad b; ita $\frac{b^2}{a} - a$ ad $\frac{b^3}{a^2} - b$. Quod nobis erat iniunctum ostendere.

Insuper pagina 147.

Quæ tradita sunt pag. 147. illustrantur.

In serie quatuor continuè proportionalium, vt est prima ad secundam, &c. ita aggregatum prima, & tertia, ad aggregatum secunda, & quarta.

Sit

Sit prima a, secunda b, tertia erit $\frac{b^2}{a}$, & quarta $\frac{b^3}{a^2}$. Aggregatum ex prima, & tertia est $a + \frac{b^2}{a}$; aggregatum ex secunda, & quarta est $b + \frac{b^3}{a^2}$. Vt autem est a ad b; &c. ita est $a + \frac{b^2}{a}$ ad $b + \frac{b^3}{a^2}$, quod multiplicatione comprobatur multiplicatis enim extremis, & medijs fiunt, producta æqualia; ducatur a in $b + \frac{b^3}{a^2}$ fit $ab + \frac{ab^3}{a^2}$, hoc est $ab + \frac{b^3}{a}$, ducatur b in $a + \frac{b^2}{a}$ fit $ab + \frac{b^3}{a}$. Sunt ergo in eadem ratione.

Hac igitur ratione in superioribus operationibus fractiones, quas dicebamus, ad minimos terminos rediguntur; quod ibi, vt diximus neglеximus ob eam quam attulimus causam. Deinceps verò, siquidem Lectorem supponimus in his instructum, & ab huiusmodi studijs paratum, fractiones ad minimos terminos redegimus, vt in proximè habita pragmatia videre licet, & in sequentibus etiam hoc idem intueri licebit. Atq; etiam alibi supra vbi reductio ad minimos terminos neglecta est, huiusmodi reductionem cuilibet facillimum erit ex præceptis traditis, perficere. *Supradictorũ percratio.*

SCHOLION.

ADuerte circa æquationes, exempli gratia, ordinis quadrato-quadratici. Vt cùm diceremus; si $a^4 + b$ solido a æquetur z plano-plano; & rursus $e^4 - b$ sol. e æquetur z plano-plano; quatuor esse continuè proportionales, à quibus cubi alternè sumpti differunt per b solidum, fit verò z plano-planum ductu alterius extremæ in differentiam cubarum à reliquis alternè sumptarum, estque a, prima minor inter extremas, & e est quarta, si quis eius quoque veritatis demonstrationem dessideret, sic Analytecè se habet. *Pag. 160.*

Sint d, g, $\frac{g^2}{d}$, $\frac{g^4}{d^3 g}$ seu $\frac{g^3}{d^2}$ continuè proportionales, quarum cubi sunt d^3; g^3; $\frac{g^6}{d^3}$; $\frac{g^9}{d^6}$. Si igitur alternè sumantur; vt d^3, & $\frac{g^6}{d^3}$ item g^3, & $\frac{g^9}{d^6}$ fiet aggregata $d^3 + \frac{g^6}{d^3}$, & $g^3 + \frac{g^9}{d^6}$ quorum differentia est $g^3 + \frac{g^9}{d^6} - d^3 - \frac{g^6}{d^3}$ hoc autem ducto in d, alteram ex extremis, fit $d g^3 + \frac{g^9}{d^5} - d^4 - \frac{g^6}{d^2}$, & hoc erit comparationis homogeneum. *Superiora demonstrantur.*

At verò cubus primi termini est d^3, cui addito cubo tertij termini, hoc est, addito $\frac{g^6}{d^3}$ fit $d^3 + \frac{g^6}{d^3}$ deinde cubo secundi termini; hoc est g^3 addito ad $\frac{g^9}{d^6}$ cubum quarti termini, fit $\frac{g^9}{d^6} + g^3$ quorum differentia est $\frac{g^9}{d^6} + g^3 - d^3 - \frac{g^6}{d^3}$, & hoc est coefficiens solidum, quod ductum in d alteram extremarum, facit $\frac{g^9}{d^5} + d g^3 - d^4 - \frac{g^6}{d^2}$ hoc autem si adsciscat d^4, facit $\frac{g^9}{d^5} + d g^3 - \frac{g^6}{d^2}$ quod erat comparationis homogeneum, &c.

Nec dissimili modo cum altera adhibetur extrema, &c.

Rectè propterea dicebatur esse quatuor continuè proportionales, &c. Hoc itaque modo, æquationis ad hoc genus pertinentis naturam sum a secutus.

Interim aduertè simili artificio cætera quidem inquiri, quæ de ęquationibus cuiusq; ordinis traduntur; atque adeo, quę ab alijs, in re de qua agimus explicata sunt, inueniri, nullo labore, possunt.

Si $a^6 + b\,a^5$, æquetur z solido-solido; & rursus $e^6 - b\,e^5$, æquetur z solido-solido. *Æquatio quadrato-cubica proponitur.*

Sunt sex continuè proportionales, quarum alternè sumptarum differentia est b, fitque z solido-solidum ductu vtriusuis extremę in quadrato-cubum differentiæ reliquarum alternè sumptarum, denique prima intelligitur minor inter extremas, fit a differentia alternè sumpta quinque primarum, & e differentia quinque postremarum.

Sunto continuè proportionales 1, 2, 4, 8, 16, 32, 1 CC + 21 QC, æquabitur 5153632. Fitque 1 R 11; & rursus 1 CC — 21 QC, æquabitur 5153632, fitque 1 R, 22. *Numeris eadem tractantur.*

Si enim ad 1, addatur 4, fit 5, cui si addatur 16, fit 21. Deinde si ad 2, addatur 8, fit 10, cui si addatur 32, fit 42, differt autem 42, à 21, per 21.

At verò 5153632, fieri ductu vtriusuis extremæ in quadrato-cubum differentiæ, *explicatio per numeros.*

 patet

patet, siquidem, si ad 2, addatur 8, fit 10, cui addito 32, fit 42; Deinde ad 4, si addas 16, fiet 20, liquet autem 20, differre à 42, per 22. Si verò 22, ducatur in se quadraticè fit 5153632, vt perspicuum est; hoc autem ducto in 1, extremum vnum fit idem numerus.

Explicatio vlterior.

Deinde si ad 1, addamus 4, fiet 5, huic addito 16, fit 21, si verò ad 2, addamus 8, fiet 10; Differt autem 10, à 21, per 11, huius quadrato-cubus est 161051 qui ductus in 32, extremum alterum, producit 5153632.

Cæterum radix est 11, & 22, nam 1, 4, & 16, conficiunt 21, at 2, & 8, efficiunt 10, quorum differentia 11; vel 32, 8, & 2, faciunt 42, at 16, & 4, faciunt 20, quorum differentia 22.

Quando fuerint æquationes Inuersæ.

Si verò fuerint æquationes Inuersæ; ita ratiocinandum.

Si b a — a^2 æquetur z plano; & rursus e^2 — b e æquetur z plano.

Duo sunt quidem latera, ad quæ sic se habet magnitudo b; vt hæc tanto excessu superetur à maiori latere, vt hic ductus in idem latus faciat z planum, nempe comparationis homogeneum; at verò tanto excessu superet latus minus, vt hic ductus in idem latus minus, faciat idem z planum; Quod primò numeris, mox verò Geometricè tractabimus.

Explicantur superiores æquationes.

Sint 4; 6 $\frac{2}{3}$, & 8 itaut 1 $\frac{1}{3}$, excessus, quo 8, superat 6 $\frac{2}{3}$, ductus in 8; faciat 10 $\frac{2}{3}$, & 6 $\frac{2}{3}$; superat 4, excessu 2 $\frac{2}{3}$ qui ductus in 4, faciat 10 $\frac{2}{3}$, ergo 1 Q — 6 $\frac{2}{3}$ R, æquabitur 10 $\frac{2}{3}$; fitque 1 R 8; Et rursus 6 $\frac{2}{3}$ R — 1 Q æquabitur 10 $\frac{2}{3}$, fitque 1 R; 4, Latera igitur sunt 4, & 8, atque 6 $\frac{2}{3}$, coefficiens se habet, modo iam explicato.

Sint insuper 6; 8 $\frac{1}{2}$, & 10; Itaut 1 $\frac{1}{2}$, excessus, quo 10, superat 8 $\frac{1}{2}$; ductus in 10; faciat 15; quantum facit 2 $\frac{1}{2}$, excessus, quo 8 $\frac{1}{2}$ superat 6; ductus in 6, ergo 1 Q — 8 $\frac{1}{2}$ R æquabitur 15, fitque 1 R, 10, & rursus 8 $\frac{1}{2}$ R — 1 Q æquabitur 15; fitque 1 R, 6.

Insuper sint 8; 10 $\frac{2}{5}$, & 12 itaut 1 $\frac{3}{5}$ excessus, quo 12; superat 10 $\frac{2}{5}$ ductus in 12; faciat 19 $\frac{1}{5}$; quantum facit 2 $\frac{2}{5}$ excessus, quo 10 $\frac{2}{5}$, superat 8; ductus in 8; ergo 1 Q — 10 $\frac{2}{5}$ R æquabitur 19 $\frac{1}{5}$ fitque 1 R 12; & rursus 10 $\frac{2}{5}$ R — 1 Q æquabitur 19 $\frac{1}{5}$, & fit 1 R, 8.

Obseruanda quædam.

Hic autem obserua tres esse quantitates, quod commune est tribus quibuscunque quantitatibus; itaut facta à lateribus in coefficientem constituant planum, quod applicatum, ad laterum aggregatum, coefficientem restituant.

Theorema ex hactenus dictis.

Cæterùm quę paulo antea dicebamus, nullo labore Geometricè ostendi possunt, est enim Theorema.

Si sint tres quantitates, itaut prima superante secundam, secunda superet tertiam, vel prima deficiente a secunda, secunda deficiat à tertia, differentia verò inter primam, & secundam ducta in primam, tantùm faciat, quantum differentia inter secundam, & tertiam, ducta in tertiam. Quadratum maximæ, minus rectangulo sub eadem, & media æquale est rectangulo sub minima, & media, minus quadrato eiusdem minimæ.

Explicatio supradictorum;

Quoniam enim si duæ sint rectæ, quarum maior, quæ dicatur prima secta sit per inæqualia, minor, quæ dicatur secunda sit ęqualis maiori ipsius primæ segmento; quæ sit itidem per inæqualia diuisa; itaut factum sub prima, & minori segmento, ęquale sit facto sub segmentis secundæ, sequitur intentum. Quadratum enim primę, minus rectangulo sub eadem, & segmentorum vno, puta maiori, idem est, quod rectangulum sub eadem, & segmento reliquo, nempe minori; Et rectangulum sub secunda, quæ supponitur ęqualis maiori segmento primę; & segmentorum vno puta minori, minus quadrato eiusdem minoris segmenti, idem est, quod rectangulum sub ijsdem segmentis. Sed factum sub prima, & segmento minori, ex hypothesi ęquale est facto sub segmentis secundę; ergo quadratum primę minus rectangulo sub eadem, & segmento maiori, æquabitur facto sub secunda, & segmento minori, minus quadrato minoris. Et hęc de ęquatione quadratica.

Proponũtur æquationes cubica.

Si b plano a — a^3 ęquetur z solido, & rursus e^3 — b plano e ęquetur z solido.

Explicatio.

Sunt tres proportionales, quarum quadrata, alternè accepta differunt per b planum

num; fit verò z solidum ductu alterius extremæ in differentiam quadratorum à reliquis; estque a; prima minor inter extremas, & quidem tertia.

Numeris eadem ostenduntur.

Sint proportionales 1, ℞ 2, 2; ergo $3 \because$ — 1 C æquabitur 2; fitque 1 R, 1; Rursus 1 C — 3 R æquabitur 2, fitque 1 R, 2, vel sunt proportionales 2, 4, 8, & 52 R — 1 C æquabitur *96*, fitque 1 R, 2; Rursus 1 C — 52 R æquabitur *96*, fitque 1 R, 8.

Explicatio.

Quadratum enim ex 1, est 1; ex 2, est 4, quorum aggregatum est 5; à quo si dempseris 2; quadratum ipsius ℞ 2, remanet 3, coefficiens. Item quadratum ex 2 est 4; quadratum ex 8, est 64, quorum summa est 68; à quo si dempseris 16, quadratum ex 4, remanet 52, coefficiens, &c.

Effermatio comparationis homogenei.

Deinde ad comparationis homogeneum quod attinet. Si 1, vna è duabus extremis, ducatur in 2; differentiam quadratorum à ℞ 2, & 2, quæ sunt 2, & 4, fit 2 comparationis homogeneum. Item si 2; extremarum vna ducatur in 48; differentiam quadratorum, quæ sunt 16, & *64*; fit *96*, comparationis homogeneum. Non erit abs re hic nonnihil immorari.

Explicatio supradictorum.

Et certè si sint tres proportionales 1, ℞ 2, 2, & quadrata alternè sumantur differunt per 3; siquidem quadratum ex 1, est 1; cui si addatur 4, quadratum ex 2; fiet 5, à quo si auferatur 2, quadratum ex ℞ 2; remanebit 3, & preterea manifestum est 2, fieri ductu alterius extremæ, &c. Nam si sumatur pro extremo 1; differentia quadratorum à reliquis, erit 2, qui ductus in 2; facit 2; Si verò sumatur 2; differentia quadratorum à reliquis, erit 1, quæ ducta in 2; facit 2;

Æquationum comprobatio.

De æquationibus nullus est ambigendi locus; nam si 1 R valor est 1; 3 R, valebunt 3; & 1 C valebit 1; Si auferamus 1, à 3, remanebit 2, numerus constituens alteram æquationis partem. Preterea si 1 R valor sit 2, 1 C valebit 8; & 3 R valebunt *6*, his ablatis abs 8, remanet idem numerus 2.

Exemplum alterum declaratur.

Ad aliud exemplum quod attinet, quadratum ex 2 est 4, cui si addatur *64*, quadratum ex 8, fiet summa 68, à quo si auferamus 16, quadratum ex 4, remanebit 52.

Deinde si à *64*, quadrato ex 8; auferamus 16, quadratum ex 4, remanebit 48; qui ductus in 2; facit *96*; Vel si à quadrato ex 4, nempe 16; auferamus 4, quadratum ex 2, remanebit numerus 12; qui ductus in 8; facit pariter *96*. Ad æquationes, quod attinet. Si 1 R valor est 2; certè 52 R valebunt 104; à quo si auferamus 8; cubum ex eodem 2; remanebit *96*; faciens alteram æquationis partem. Si verò 1 R dicatur 8, eius cubus erit 512, & 52 R, valebunt 416. Si verò auferamus 416 abs 512; remanebit *96*.

Æquationes quadrato cubicæ.

Si b pl.pl. a — a^5 æquetur z pl.solido; & rursus e^5 — b pl.pl. a æquetur z planosolido.

Explicatio.

Sunt quinque magnitudines continuè proportionales, à quibus quadrato-quadrata alternè sumpta differunt per b plano-planum; fit verò z plano-solidum ductu alterius extremæ in differentiam quadrato-quadratorum à reliquis alternè sumptis fitque a, prima, at e, quinta.

Numeris eadem tractantur.

Vnde si sint continuè proportionales 1; ℞ Q Q 2, ℞ Q Q 4, ℞ Q Q 8, 2. 11 Q — 1 Q C æquab. 10, & fit 1 R, 1, & 1 Q C — 11 R æquab. 10, & fit 1 R, 2.

Hactenus tradita numeris explicantur.

Et quidem si quadrato-quadrata numerorum illorum continuè proportionalium alternè sumantur, differunt per 11; etenim si ad 1; quadrato-quadratum ex 1; addatur 4, quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 4, fit 5; cui si addatur 16, quadrato-quadratum ex 2, fit 21. At verò si ad 2, quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 2; addatur 8; quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 8, fit 10; constat autem 10, differre à 21 per 11. At verò 10, fieri ductu alterius extremi, &c. patet, siquidem si ad 2 quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 2; addatur 8; scilicet quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 8, fit summa 10, at verò ad 4, numerum, qui est quadrato-quadratum ex ℞ Q Q 4, si addatur 16, nempe quadrato-quadratum ex 2, fit 20. Manifestum est autem 10, differre à 20, per 10, hic si ducatur in 1, extremum vnum fit 10, &c.

Deinde si ad 1, addamus 4; fit 5; si verò ad 2, addamus 8, fit 10, differt autem 10 à 5, per 5; hic si ducatur in 2; extremum alterum, producitur idem numerus 10.

Cæterum ex hactenus traditis, constabit aperrè, vnde huiusmodi æquationum ratio proueniat. Interim, & modo iam explicato potest quidem ostendi, vnde constet ratio, qua veritates iam traditę fuerint adinuentæ.

Fit reditus ad cubicas æquationes. Si b a^2 ✠ a^3 æquetur z solido. Et rursus b e^2 — e^3 ęquetur z solido. Sunt tres proportionales, quarum alternè sumptarum differentia est b; at verò z solidum fit ductu alterius extremæ in quadratum differentię reliquarum alternè sumptarum. Dumq; prima intelligitur, minor inter extremas, a est differentia, alternè sumpta primarum duarum, & e differentia duarum postremarum.

Numeris eadem tractantur, ac explicantur. Sunto quidem proportionales 1, 2, 4, vtique 3 Q ✠ 1 C æquatur 4, fit 1 R, 1. Rursus 3 Q — 1 C æquatur 4, fit 1 R, 2.

Vel sunto proportionales 2, 4, 8. Vtique 6 Q ✠ 1 C ęquabitur 32, & fit 1 R, 2. Rursus 6 Q — 1 C æquabitur 32, & fit 1 R; 4.

Hæ autem ęquationes numeris explicari nullo negotio possunt.

Æquatio quadrato-cubica, affecta sub quadrato-quadrato. Si b a^4 ✠ a^5 æquetur z planosolido, & rursus b e^4 — e^5 æquetur z planosolido.

Sunt quinque continuè proportionales, quarum alternè sumptarum differentta est b; at z planosolidum fit ductu alterius extremę in quadrato-quadratum differentæ reliquarum alternè sumptarum; Atque dum prima intelligatur minor inter extremas, est a differentia quatuor primarum alterne sumptarum; & e differentia quatuor postremarum.

Explicatio per numeros. Sunto proportionales 1, 2, 4, 8, 16; & 11 QQ† 1 QC æquabitur 10000; fitque 1 R 5.

Et rursus 11 Q Q — 1 Q C æquabitur 10000 fitque 1 R 10.

Si proportionales dentur, 1, 2, 4, 8, 16, certè alterne sumptorum differentia erit 11; nam si ad 1, addatur 4; fit 5, cui addito 16; fit 21. Deinde ad 2; addito 8; fit 10; Constat autem 21 differre a 10 per 11; Fieri autem 10000, vt dictum est; patet, nam ad 2; addito 8; fit 10, & ad 4, addito 16; fit 20; perspicuum est horum differentiam esse 10, cuius quadrato-quadratum est 10000; quo ducto in 1 extremum vnum fit 10000. Deinde si ad 1, addatur 4; fit 5, & si ad 2 addatur 8, fit 10 quorum differentia est 5, cuius quadrato-quadratum est 625, quo ducto in 16, extremum alterum, fit 10000. Vt supra autem poterunt ęquationes, ad examen vocari.

Æquatio quadrato cubica, Si b planum a^3 † a^5 ęquetur z planosolido. Et rursus b planum e^3 — e^5 æquetur z palnosolido.

Sunt sex continuè proportionales, quarum extremæ ductæ in differentiam quartę, & primæ faciunt b planum. At verò z planosolidum fit, seu componitur ex cubo differentię quartæ, & primæ in b planum, plus quadrato eiusdem differentiæ. Vel componitur ex cubo differentiæ quintæ, & secundæ in b planum, minus quadrato illius differentiæ, inter quintam, & secundam.

Cùm autem prima intelligitur minor inter extremas, est a, differentia primæ, & quartæ, & e fit differentia secundæ, & quintæ.

Numeris eadem tractantur. Sunto proportionales 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 23 1 C † 1 Q C æquabitur 96040, fitque 1 R, 7; Et rursus 231 C — 1 Q C æquabitur 96040 fitque 1 R, 14. Sint sex proportionales numeri iam dicti; differentia primi, & quarti, dum intelligitur primus minor inter extremas, est 7, hæc autem differentia, si ducatur in extremorum summam, fit 231; fit verò 96040, ex 343 cubo differentiæ quarti, & primi, nempè 7, in 2 80, hoc est 2 31, plus 49; quadrato eiusdem differentiæ. Vel ex cubo numeri 14, qui est differentia secundi, & quinti in 35, differentiam inter 231 & 196 quadratum eiusdem 14, producitur idem numerus 96040.

Æquatio quadrato-cubica affecta sub quadrato. Si b sol. a^2 † a^5 æquetur z planosolido. Et rursus b sol. e^2 — e^5 æquetur z plano solido. Sunt sex continuè proportionales, quarum extremę ductæ in quadratum ex differentia primæ, & tertiæ faciunt b solidum. Fit verò z planosolidum ex b solido, plus cubo differentię inter tertiam, & primam, in quadratum eiusdem differentię. Vel fit z planosolidum ex b solido, minus cubo à differentia inter secundam, & quartam, in quadratum illius differentię inter secundam, & quartam. Dumque prima intelli-

intelligitur minor inter extremas, fit a, tertia minus prima, & e, fit quarta minus secunda.

Sint proportionales 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 297 Q + 1 QC æquabitur 2916, & fit 1 R, 3, & rursus 297 Q — 1 QC æquabitur 2916, fitque 1 R 6. Hec verò supradictorum imitatione, & declarari, & demonstrari poterunt.

Numeris eadem tractantur.

Iterum ad inuersas, quod attinet.

Insuper si b pl. a — a^3 æquetur z solido, & rursus e^3 — b pl. e æquetur z solido. Sunt tres proportionales, quarum quadrata simul iuncta conficiunt b pl.. At verò extremarum summa ducta in mediæ quadratum facit z solidum. Vel extremarum altera ducta in aggregatum quadratorum à duabus reliquis, facit z solidum, fitque a, alterutra extremarum, & e, earundem summa. Vt si sint 1, 2, 4, & 21 R — 1 C æquabitur 20, fitque 1 R, 1, vel 4. Rursus 1 C — 21 R æquabitur 20, fitque 1 R, 5. Vel sint proportionales 2, 4, 8, & 84 R — 1 C æquabitur 160, fitque 1 R, 2, vel 8, & rursus 1 C — 84 R æquabitur 160, fitque 1 R, 10.

Inuersarum alia constitutiua.

Si b a^2 — a^3 æquetur z solido, & rursus b e^2 † e^3 æquetur z solido.

Sunt tres proportionales, quarum summa est b, at verò composita è duabus primis addita compositæ, è duabus reliquis, & hoc aggregatum ductum in mediæ quadratum facit z solidum. Vel altera extremarum ducta in quadratum compositæ à duabus reliquis facit z solidum; & fit a alterutra prædictarum compositarum, & e media inter ipsas extremas.

Æquatio inuersa cubica affecta sub quadrato.

Sint proportionales 1, 2, 4, & 7 Q — 1 C æquabitur 36, fitque 1 R 3, vel 6, & rursus 7 Q † 1 C æquabitur 36, fitque 1 R, 2.

Numeris eadē tractantur.

Vel sint proportionales 2, 4, 8, & 14 Q — 1 C æquabitur 288; & fit 1 R, 6; vel 12, & rursus 14 Q † 1 C æquabitur 288; fitque 1 R, 4.

Quæ profectò sunt manifesta; Si enim sint 1, 2, 4, numeri continuè proportionales, summa ipsorum est 7; compositus verò numerus è duobus primis, est 3; at ex duobus reliquis est 6; quorum summa est 9, quæ ducta in 4; mediæ quadratum facit 36, eodemque pacto discurrendum est suppositis proportionalibus 2, 4, 8.

Quandoquidem cùm fuerint æquationes 14 Q — 1 C ⩵ 288, & 14 Q † 1 C ⩵ 288.

Sunt tres proportionales 2, 4, 8; horum summa est 14, at verò 288, fit si 6, compositus è duobus primis addatur 12, composito è duobus reliquis, & prouenit 18; hic autem numerus si ducatur in 16 quadratum medij, prouenit 288. Vel si 8 alter extremorum numerus ducatur in 36 quadratum cōpositi à duobus reliquis, fit 288. Fit autem in prima æquatione 1 R valor, alteruter prædictorum compositorum, nimirum 6, compositus ex 2, & 4; vel 12, compositus è duobus reliquis. In altera verò fit 1 R valor 4, medius proportionalis, &c.

Cæterum hæc omnia demonstrari possunt, ad eum quem superiùs explicuimus modum; supradictorum enim imitatione, & quæ hactenus in medium attulimus, & quæ deinceps afferemus ostendi commode possunt.

Omnia explicari demonstrarique possunt imitatione supradictorum.

Qua

Qua induſtria Analyſta vitijs laborantes æquationes emendet, & quo pacto εὐμήχανος fiat.

CAPVT XXI.

Præparatione laborantes æquationes emendantur.

PRæparatione curantur æquationes vitijs laborantes, quæ cùm alioquin mechanicen reſpuant, explicabiles fiunt; vel nimirum noua inſtituta Zeteſi, vel Plaſmatis, ſiue etiam Syncriſeos repetitis veſtigijs. Pluribus autem modis præparatio contingit, è quibus quilibet ad æquationis propoſitæ, ſiue re, ſiue numero, felicem explicationem conducit.

Quinque præparandi æquationes modi.

Primò quidem fit quadam tranſmutatione per additionem, vel ſubtractionem. Secundò per immutationem terminorum, vt qui primus, per metamorphoſin poſtremus euadat, & contra. Tertiò per tranſmutationem quarundam æquationum in alias. Quartò per æquam diuiſionem, Quintò per quandam ſpeciem irregularis deſcenſus.

Primus eſt expurgatio per vncias.

Primus quidem præparationis modus valet aduersùs æquationis vitium; illud Græci, πολυπαθείαν. Latini autem nimiam, ſeu multiplicem affectionem; appellant hic autem tranſmutationis modus expurgatio per vncias dici conſueuit; propterea quod fit per quaſdam additas, vel ſubtractas coefficientis partes, etenim hoc artificio. Poteſtates affectæ ſub extremo parodico gradu, quem ſuſtinent coefficientes radici homogeneæ regulariter huiuſmodi affectione liberantur, ſalua numerorum ſymmetria, vt ſi fuerit a² + 2 b a = z plano, æquatio, atqueadeo poteſtas eſt affecta, & quidem ſub extremo parodico gradu, cuiusmodi eſt a, quem ſuſtinet b coefficiens radici homogenea, hac autem præparandi ratione hæc æquatio, & cæteræ liberantur affectione, ſalua numerorum ſymmetria. Quoniam verò multiplex æquatio eſt, pro multiplici poteſtatum natura; alia ſiquidem eſt quadratica, alia cubica, alia quadrato-quadratica, &c. Hoc obſeruandum, nempe omnium huiuſmodi tranſmutationum ſpeciem, fieri per determinatas coefficientis partes; ſed ratio partium diuerſa, pro æquationum diuerſitate, quod etiam in opere plaſmatico contingere notauimus. In æquationibus igitur quadraticis, pars adhibenda pro huiuſmodi tranſmutatione, eſt coefficientis dimidium. In cubicis eſt tertia pars. In quadrato-quadraticis eſt quarta pars, in quadrato-cubicis eſt quinta pars, in cubo-cubicis eſt ſexta pars; Itaut denominatio ſubmultiplicis proportionis, nimirum partis ad totum, habeatur ab exponente poteſtatis præpoſita particula ſub, vt denominatio rationis multiplicis, ad partem adhibendam, ex ipſomet exponente deſumatur; quare cùm quadrati exponens ſit 2; propterea in hac pragmatia ſumenda eſt pars, ad quam coefficiens rationem habet duplam; in cubis rationem habeat triplam, &c. atque adeo pars erit ſubdupla coefficientis in quadratis; ſubtripla in cubis, & ita deinceps, &c. & quia affectiones ſub eo gradu proficiſcuntur à cremento, vel decremento, quo affecta intelligitur radix, de qua primò quærebatur; Propterea in æquationibus quadraticis coefficiens magnitudo dupla eſt dicti crementi, vel decrementi, in cubicis eſt tripla, & ita deinceps, exempli gratia; Si ſit æquatio a² + 2 b a = z plano, quoniam æquatio quadratica eſt, coefficiens magnitudo; puta 2 b, dupla eſt crementi illius, quo radix intelligitur affecta, etenim a, intelligitur affici cremento b.

In æquationibus quadraticis quæ pars ſit adhibenda, quæ in cubicis, quæ in quadrato quadraticis, quæ in quadrato-cubicis, &c.

Deinde

Deinde si sit a^3 ✠ 3 b a^2 ⊏ z solido. Quoniam æquatio cubica est, 3 b coefficiens, tripla est illius crementi, quo radix a, intelligitur affecta, &c. Proinde ad Plasma delendum. Illud enim plasmaticum esse neminem latet; contraria via sunt partes coefficientis conditionariæ, quas vncias appellant, contraria inquam via sunt accipiendæ huiusmodi conditionariæ vnciæ coefficientium radici homogenearum. Propterea in quadratis oportet sumere dimidium, in cubis trientem, &c. & huiusmodi conditionarijs vncijs (conditionariæ autem sunt, pro potestatis, atque adeo æquationis conditione) afficitur radix; atque hunc in modum fit de qua loquimur trasmutatio; vnde in Quadratis radix est affecta coefficientis semisse, in Cubis, triente.

Æquatio cubica.

Vncia conditionaria qua pro singulis Æquationū speciebus

Si potestas affecta fuerit, affirmatè, vt a potestas affecta sit adiunctione homogenei sub 2 b, coefficiente longitudine, & à parodico extremo gradu, cuiusmodi est a^2 ✠ 2 b a ⊏ z plano. Cùm itaque sit æquatio affirmata: radix afficitur affirmatè à conditionarijs vncijs ipsius 2 b, coefficientis, & radix sic affecta statuatur e; atque adeo e, minus conditionarijs vncijs ipsius coefficientis, æquabitur a; & sub hac noua specie primò æquatio proposita dirigetur, ac ordinabitur noua, quod exemplo rem illustrabimus.

Quando potestas affecta fuerit affirmata.

Si a^2 ✠ 2 b a æquetur z plano. Hæc æqualitas plasmatica dicenda est, cum in ordine climacticarum magnitudinum latus proximè quadrato succedat, & hic proponitur, quadratum affectum sub latere, cumque affectio sit per affirmationem, propterea fuit plasma per additionem semissis coefficientis sub latere; quamobrem ad plasma delendum, fieri debet expurgatio per semissem ipsius coefficientis, & vt Græci dicunt, per ἡμιτελίαν.

Exemplo declaratur superior doctrina.

Propterea a ✠ b, radix nempe adaucta nota magnitudine b; quæ dimidium est coefficientis 2 b; dicatur e; ergo e — b, æquabitur a, cum autem æquatio plasmatica fuerit proposita a^2 † 2 b a æquale z plano; ob id quadratum abs e — b, plus plano sub b bis in e — b, ęquabitur z plano, factaque de e, ordinatione secundum Artem, reperiemus e^2 — b^2 æquari z plano; ac demum per antithesin e^2 æquabitur z plano † b^2, & ita æquatio primò proposita exuta est affectione sub gradu extremo.

Explicatio.

Si verò innotescat e; nequit a; ignorari.

Sit vnius a, valor 5; & b; 10; z planum verò sit 125, vtique a † b; valebit 15; & ita e, valebit 15, si verò ab e, auferatur b, nempe de 15, subtrahatur 10, remanebit 5; nimirum a, at verò quadratum abs e — b, hoc est a 5; erit 25, huic si addatur planum factum sub 2 b in e — b hoc est sub 20, & 5, quod est 100, fiet summa 125, æqualis alteri ęquationis parti.

Numeris explicantur hactenus tradita.

Si sit ęquatio a^3 ✠ 3 b a^2 ✠ d plano a ⊏ z solido. Cum in ordine magnitudinum climacticarum proximè cubo succedat quadratum.

Proponitur æquatio cubica

Hęc æqualitas, in qua cubus afficitur sub quadrato Plasmatica erit, & aliunde effista; & quoniam est affectio affirmata; ob id Plasma fuit per additionem; cumque sit æquatio cubica, fuit per additionem trientis 3 b, coefficientis, prout cubi conditio requirit. Itaque ad tollendum Plasma, fiat expurgatio diatritemorion, hoc est per tertiam partem; atque adeo a ✠ b; esto e; proinde e — b erit a, & ob id cubus abs e — b, nimirum e^3 — 3 b e^2 ✠ 3 b^2 e — b^3 plus solido abs 3 b in quadratum ex e — b plus solido abs d pl. in e — b, æquabitur z solido, & ordinata ęquatione, e^3 ✠ $\overline{\text{d pl.} - 3\,b^2}$ e æquabitur z solido ✠ d pl. b — 2 b^3.

Et hæc noua æquatio pura est, ab affectione illa sub quadrato, qua primùm æquatio proposita, obruebatur.

Æquatio in quam proposita per expurgationem trāsformata est.

Secundo a potestas afficiatur multa homogenei sub 2 b coefficiente, & a extremo parodico gradu, cùm affectio sit negata vtique a, afficietur negate à conditionarijs 2 b, coefficientis vncijs, & ita statuetur e, atque adeo e plus illis conditionarijs vncijs ipsius 2 b coefficientis æquabitur a, & ita ęquatio illa primum proposita, sub hac noua specie dirigetur, & ordinabitur noua, quę quidem eueniet prorsus immunis ab illa affectione sub extremo gradu.

Æquatio quadratica negatiuè affecta cui inest plasma.

Proponatur a^2 — 2 b a ęquari z plano. Quoniam æquatio est huiusmodi, vt quadratum

dratum afficiatur sub latere, & latus quadrato proximè succedat, æquatio plasmatica est aliundeque effecta; cum verò sit affectio negata, fuit plasma per subtractionem, & quoniam ęquatio est quadratica, erit ob id plasma per subtractionem semessis coefficientis, iuxta conditionem quadrati, quæ est potestas rationis duplicatę. Itaque $a - b$, statuetur e, ergo $e + b$ erit a; atque adeo quadratum abs $e + b$ æquabitur z plano, at verò si à quadrato ex $e + b$, subtrahatur planum illud $2 be + 2 b^2$ remanebit $e^2 - b^2$ proinde $e^2 - b^2$ æquabitur z plano, & per antithesin e^2 æquabitur z plano $+ b^2$.

Proponitur æquatio cubica. Proponatur $a^3 - 3 b a^2$ æquari z solido. Æquatio plasmatica erit per subtractionem trientis coefficientis, ad tollendum itaque plasma fiat expurgatio per diatritemorion, seu per trientem, & $a - b$ statuatur e, & æquatio de ipsa e ordinabitur; si itaque $a - b$ statuatur e, ob id $e + b$ erit a, atque adrò cubus ab $e + b$ minus solido abs $3 b$, in quadratum ex $e + b$ æquabitur z solido; itaque $e^3 - 3 b^2 e - 2 b^3$ ęquabitur z solido, & per antithesin $e^3 - 3 b^2 e$ æquabitur z solido $+ 2 b^3$.

Generatim propositum. Proponatur homogeneum sub $2 b$ coefficiente, & a extremo gradu affici multa a potestatis; cùm itaque potestas negetur de homogeneo affectionis, & potiùs afficiat, quam afficiatur vncię conditionarię ipsius b coefficientis multabuntur a potestate, & statuetur esse e; atque adeò vnciæ ipsius b coefficientis, minus radice e æquabuntur a, sub hac verò noua specie æquatio prima proposita dirigetur, & noua ordinabitur, quæ quidem prorsus immunis erit ab illa affectione sub extremo gradu.

Proponitur æquatio quadratica ἀφαίρεσις. Proponitur $2 b a - a^2$ æquari z plano, hæc æquatio plasmatica est, fuitque plasma per subtractionem radicis, à semisse coefficientis. Statuatur $b - a$ esse e, ergo $b - e$ erit a, proinde quadratum abs $b - e$, nimirum $e^2 - 2 b e + b^2$ si auferatur ab illo plano, quod continetur sub $b - e$, & $2 b$ remanebit $b^2 - e^2$, & hoc residuum æquabitur z plano, & per antithesin fiet $e^2 = b^2 -$ z plano, immunis ab affectione, &c. Numeris autem hæc omnia possunt illustrari; ex hactenus verò dictis facilè constabit quomodo in cæteris æquationibus procedendum sit.

REDVCTIO QVADRATORVM AFFECTORVM AD PVRA.

Quæ remedium est aduersus æquationum πολυπαθειαν.

Reductio de qua hìc differitur, quomodo Græcè dicatur Prima reductio æquationis in qua quadratum afficitur adiūctione plani sub latere data que coefficiente longitudine.

Opus quod hìc aggredimur Gręcè diceretur ἐπαναφορὰ; estque tantę vtilitatis, in Arte, vt nihil maioris momenti reperire liceat.

Si $a^2 + 2 b a$ æquetur z plano. Supponatur $a + b$, esse e. Dico e^2 æquari z plano $+ b^2$.

Quandoquidem; Si recta linea bifariam secetur, eidemque addatur quædam in directum; quadratum autem adiunctæ, plus rectangulo sub adiuncta, & diuisa, æquale sit plano. Quadratum aggregati ex dimidio diuisæ, & ex adiuncta, æquale erit eidem plano, plus quadrato dimidij iam dicti.

Ad huius autem veritatis indagationem sic procedit Analysta.

Demonstratio. Sit $a + b$ æquetur e, ergo $e - b$ æquabitur a. Quoniam autem potestas in æquatione quadratum erat, & ex $e - b$ quadratum ortum est $e^2 - 2 b e + b^2$; hoc propterea, illius loco substituatur; cùmque æquatio foret affecta adiunctione plani sub latere, dataque coefficiente longitudine, etenim $2 b a$; afficiebat a^2 per affirmationem; proinde intelligatur $2 b$, ductum in $e - b$, cui æquipollet a, & prouenict $2 b e - 2 b^2$, quo addito, ad nouam potestatem $e^2 - 2 b e + b^2$; prouenict $e^2 - b^2$

compa-

comparandum cum eodem z pl., quod erat comparationis homogeneum, vnde erit æquatio $e^2 - b^2 = z$ plano, & per antithesin fit $e^2 = z$ plano $+ b^2$. Quamobrē æquatio illa affirmatè affecta in simplicem, ac puram reducta est, quod opus dicitur ἐπαναφορά.

Conspectus Demonstrationis.

$a^2 + 2\,b\,a$ æquatur z plano.
e æquetur $a + b$.
$e - b$ æquabitur a.
$+$ *$e^2 - 2\,b\,e + b^2$ æquabitur a^2.*
$2\,b\,e - 2\,b^2$ æquabitur $2\,b\,a$.
$+$ *$e^2 - b^2$ æquabitur z plano.*
e^2 æquabitur z plano $+ b^2$.

Itaque $\sqrt{z \text{ plano} + b^2} - b$; æquabitur a, de qua primò quærebatur.

Sit $1\,Q + 8\,R$ æquale 48, & $\sqrt{64} - 4$ hoc est 4 æquabitur 1 R. *Radix explicata simplici æquatione.*

Si enim æquatio fuerit $1\,Q + 8\,R = 48$, sumatur 16 quadratum 4 dimidio coefficientis sublateralis illudque addatur ad 48, comparationis homogeneum, aggregati autem latus, puta 8, multatum eodem dimidio exhibet 4, pro radice ęquationis propositę purę enim æquationis radix est 8, quæ multari debet, vt dictum, vt prędeat radix æquationis affectæ initio propositæ.

Si sit æquatio $a^2 - 2\,b\,a = z$ plano. Supponatur $a - b$ esse, e. Dico e^2, æquari z plano $+ b^2$. *Proponitur æquatio quadratica negatè affecta.*

Quandoquidem si recta quædam diuisa sit bifariam, eique in directum alia sit adiecta, quadratum autem totius, minus rectangulo sub aggregato ex adiecta, & diuisa, & sub ipsa diuisa æquale sit plano. Quadratum differentię inter adiectam, & dimidiam, æquale erit eidem plano, plus quadrato dimidiæ iam dictæ. *Theorema.*

Ad huius veritatis indagationem sic procedit Analysta. Si $a - b$ supponatur e, $e + b$ æquabitur a. Quoniam autem potestas quadratum est, & ex $e + b$ quadratum ortum est $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, illius loco, hoc substituatur; Cumque potestas afficeretur negatiuè erat autem æquatio $a^2 - 2\,b\,a = z$ plano proinde intelligatur ductum $e + b$, quod ęquipollet a intelligatur inquam ductum in $- 2\,b$, & proueniet $- 2\,b\,e - 2\,b^2$, quo addito, ad $e^2 - 2\,b\,e + b^2$, & proueniet $e^2 - b^2 = z$ plano, & per antithesin $e^2 = z$ plano $+ b^2$ æquatio igitur negatè affecta in puram, ac simplicem reducta est. *Indagatio Analytica, & propositi Theorematis demõstratio.*

Conspectus Demonstrationis.

$a^2 - 2\,b\,a$ æquatur z plano.
e æquetur $e - b$.
$e + b$ æquabitur a.
$+$ *$e^2 - 2\,b\,e + b^2$ æquabitur a^2.*
$-$ *$2\,b\,e - 2\,b^2$ æquabitur $2\,b\,a$.*
$e^2 - b^2$ æquabitur z plano.
e^2 æquabitur z plano $+ b^2$.

Itaque $\sqrt{z \text{ pl.} + b^2} + b$ æquabitur a, de qua primo quęrebatur.

Sit $1\,Q - 8\,R$ æquale 48, & $\sqrt{64} + 4$, hoc est 12 æquabitur 1 R.

Si enim æquatio fuerit $1\,Q - 8\,R = 48$. Sumatur 16, quadratum ex 4, dimidio coefficientis sublateralis illudque addatur ad 48, aggregati autem latus, adauctum prædicto dimidio exhibet 12 pro radice ęquationis propositę, purę enim æquationes radix est 8, quę augeri debet, vt dictum est, vt prodeat radix æquationis affectæ initio propositæ. *Numerosa æquatio negate affecta, et eiusdem reductio.*

Si $2\,b\,a - a^2$ æquetur z pl. Supponatur autem $b - e$, vel $b + e$, esse a. *Proponitur æquatio quadratica amphibola.*

 Dico

Dico e^2, æquari b^2 — z plano.

Theorema. Quandoquidem; Si recta linea secta sit bifariam, & non bifariam, rectangulum autem sub tota, & parte alterutra minus quadrato eiusdem. æquale sit plano. Quadratum intermediæ sectionis, æquabitur quadrato dimidij, minus plano iam dicto.

Indagatio Analytica, & superioris Theorematis demonstratio. Ad huius veritatis indagationem sic procedit Analysta.

Si b — a æquetur e; vtique b — e æquabitur a.

Quoniam potestas de homogeneo negatur; potestas verò est quadratum. Quadratum autem ortum ex b — e est b^2 — 2 b e + b^2, proinde hoc loco illius substituatur. Intelligatur autem b — e ductum in 2 b, & proueniet 2 b^2 — 2 b e; cumque de homogeneo negetur potestas ex 2 b^2 — 2 b e subtrahatur b^2 — 2 b e + e^2, & remanebit b^2 — e^2 = z plano, & per antithesin erit e^2 + z plano = b^2, & rursus e^2 = b^2 — z plano.

Secunda hypothesis æquationis quadraticæ amphibolæ. Vel si a — b æquetur e vtique b + e æquabitur a.

Quoniam potestas est quadratum, & quadratum ortum ex b + e est b^2 + 2 b e e^2 proinde hoc illius loco substituatur. Cum autem homogeneum de quo negatur potestas esset 2 b a; propterea in 2 b. Intelligatur ductum b + e, quod æquipollet a, & proueniet 2 b^2 + 2 b e, ex quo subtracto b^2 + 2 b e + e^2, & remanebit b^2 — e^2, quod æquabitur z plano. Et per antithesin fiet e^2 + z plano = b^2, & rursus e^2 = b^2 — z plano.

Conclusio. Æquatio igitur composita ad simplicem reuocata est; cumque anphibola sit duplicem habet radicem. In priori quidem reductione; siquidem b — e æquabatur a ex b subducto e, cognito reductione; proueniet radix vna.

Et quoniam in secunda reductione b † e æquabatur a; propterea ipsi b addito, e reductione cognito; proueniet radix altera eiusdem æquationis.

Conspectus Demonstrationis,

	2 b a — a^2 æquatur z plano.		*Vel.*
	e æquetur b — a.		*e æquetur a — b.*
	b — e æquabitur a.		*b † e æquabitur a.*
—	*b^2 — 2 b e † e^2 æquabitur a^2.*	—	*b^2 † 2 b e † e^2 æquabitur a^2.*
+	*2 b^2 — 2 b e æquabitur 2 b a.*	+	*2 b^2 † 2 b e æquabitur 2 b a.*
	b^2 — e^2 æquabitur z plano.		*b^2 — e^2 æquabitur z plano.*
	e^2 æquabitur b^2 — z plano.		*e^2 æquabitur b^2 — z plano.*

Sit 16 R — 1 Q æquale 48; & 8 — ℞ 16, hoc est 8 — 4, hoc est 4 æquabitur 1 R.

Vel 8 † ℞ 16, hoc est 8 + 4 hoc est 12 æquabitur 1 R.

Numerosa æquatio, eiusdemq; reductio.

Reductio cuborum simpliciter affectorum sub quadrato ad cubos simpliciter affectos sub latere.

Æquatio cubica in qua cubus afficitur adiunctione solidi sub quadrato, dataq; coefficiente longitudine. Si a^3 † 3 b a^2, æquetur z solido. Supponatur a † b, esse e.

Dico e^3 — 3 b^2 e, æquari z solido — 2 b^3.

Quandoquidem; Si recta linea diuisa sit trifariam, eidemque adiecta sit alia quædam linea; Cubus verò ex adiecta, plus solido sub quadrato adiectæ, & sub recta diuisa, æquale sit solido. Cubus aggregati ex adiecta, & triente, minus solido sub triplo quadrato eiusdem trientis, & sub aggregato iam dicto, æquale erit comme-

commemorato solido, minus duplo cubo trientis iam dicti.

Ad huius veritatis indagationem sic procedit Analysta.

Quandoquidem $a + b$ supponitur æquari e; ergo $e - b$ æquabitur a. Quoniam autem potestas erat cubus, & ex $e - b$ ortus cubus est $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2 e - b^3$, proinde hoc in noua æquatione, illius loco sustituatur. Cumque æquatio esset affirmatè quidem affecta sub quadrato, nimirum adiunctione solidi, sub longitudine, & radicis quadrato; propterea $e^2 - 2\,b\,e + b^2$ nimirum quadratum ex $e - b$, ducatur in $3\,b$ productumque $3\,b\,e^2 - 6\,b^2 e + 3\,b^3$ addatur ipsi $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2 e - b^3$, & prouenict $e^3 - 3\,b^2 e + 2\,b^3$ quod æquabitur z solido, & per antithesin $e^3 - 3\,b^2 e$ æquabitur z solido $- 2\,b^3$. *Indagatio Analytica, & Theorematis propositi demonstratio.*

Æquatio igitur illa proposita ad simpliciorem reducta est.

Conspectus Demonstrationis.

$a^3 + 3\,b\,a^2$ æquatur z solido.
e æquetur $a + b$.
$e - b$ æquabitur a.
$e^2 - 2\,b\,e + b^2$ æquabitur a^2.
$+$ *$e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2 e - b^3$ æquabitur a^3.*
$+$ *$3\,b\,e^2 - 6\,b^2 e + 3\,b^3$ æquabitur $3\,b\,a^2$.*
$e^3 - 3\,b^2 e + 2\,b^3$ æquabitur z solido.
$e^3 - 3\,b^2 e$ æquabitur z sol. $- 2\,b^3$.

1 C + 12 Q æquatur 7168, & 1 R est 16; 1 C — 48 R æquatur 7040, fitque 1 R 20.

Si $a^3 - 3\,b\,a^2$, æquetur z solido. Supponatur $a - b$ esse e; *Æquatio cubica negatè affecta sub quadrato.*

Dico $e^3 - 3\,b^2 e$, æquari z solido $+ 2\,b^3$.

Quandoquidem. Si recta quædam sit linea, ac eius pars sit trifariam diuisa, cubus autem ipsius lineę, minus solido comprehenso sub quadrato eiusdem, & sub trifariam diuisa parte, cuidam solido fuerit æqualis; cubus differentię inter trientem, & latus cubi iam dicti, minus solido sub triplo quadrato trientis, & sub prædicta differentia, æquabitur eidem solido plus duplo cubo trientis. *Theorema.*

Ad huius veritatis indagationem sic procedit Analysta.

Quandoquidem $a - b$ supponitur e; ergo $e + b$ æquabitur a. Quoniam autem potestas erat cubus. Cubus autem ortus ex $e + b$, est $e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2 e + b^3$; propterea, hoc eius loco sustituatur. Cumque æquatio esset negatiuè affecta sub quadrato; propterea $e^2 + 2\,b\,e + b^2$ nimirum quadratum ex $e + b$ ducatur in $3\,b$, & prouenict $3\,b\,e^2 + 6\,b^2 e + 3\,b^3$ subtrahendum, ob affectionem negatam ex $e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2 e + b^3$, & remanebit $e^3 - 3\,b^2 e - 2\,b^3$, quod æquabitur z solido; per antithesin verò $e^3 - 3\,b^2 e$ æquabitur z solido $+ 2\,b^3$. Æquatio igitur illa proposita, ad simpliciorem naturam reducta est. *Indagatio Analytica, & propositi Theorematis demonstratio.*

Conspectus Demonstrationis.

$a^3 - 3\,b\,a^2$ æquatur z solido.
$a - b$ æquetur e.
$e + b$ æquabitur a.
$+$ *$e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2 e + b^3$ æquabitur a^3.*
$-$ *$3\,b\,e^2 + 6\,b^2 e + 3\,b^3$ æquabitur $3\,b\,a^2$.*
$e^3 - 3\,b^2 e - 2\,b^3$ æquabitur z solido.
$e^3 - 3\,b^2 e$ æquabitur z solido $+ 2\,b^3$.

1 C — 12 Q æquatur 1024, & 1 R est 16; 1 C — 48 R æquatur 1152 & 1 R est 12. *Proponitur æquatio cubica amphibola.*

Si $3\,b\,a^2 - a^3$ æquetur z solido. Supponatur $a - b$ esse e.

Dico

Dico $3b^2e - e^3$ æquari z solido $- 2b^3$. Vel supponatur $b - a$ esse e.

Dico $3b^2e - e^3$ ęquari $2b^3 -$ z solido.

Theorema. Quandoquidem; Si recta linea diuisa sit trifariam; & in ea primum assumpta sit pars maior triente, sub cuius quadrato, & linea ipsa trifariam diuisa solidum contineatur à quo demptus sit cubus acceptæ partis; residuum autem sit cuidam solido æquale; etiam solidum contentum sub triplo quadrato trientis, & differentia qua pars assumpta trientem superat, minus cubo eiusdem differentiæ, erit æquale solido iam dicto minus duplo cubo trientis.

I. Theorema. Et si fuerit recta trifariam diuisa, in eaque assumpta sit pars minor triente, sub cuius quadrato, & sub trifariam diuisa contentum sit solidum; ex quo demptus sit cubus assumptæ partis, residuum æquale sit solido; etiam solidum comprehensum sub triplo quadrato trientis, & sub differentia, qua triens superat partem assumptam, minus cubo huiusmodi differentiæ, erit æquale duplo cubo trientis, minus prædicto solido.

Ad huius veritatis indagationem sic procedit Analysta.

Indagatio Analytica, & prioris Theorematis demonstratio. Quandoquidem $a - b$ supponitur ęquari e, proinde $e + b$ æquabitur a. Quoniam autem potestas erat cubus, & cubus ortus ex $e + b$ est $e^3 + 3be^2 + 3b^2e + b^3$ propterea hoc eius loco substituatur. Quoniam verò solidum multatur cubo, & erat solidum sub latere 3 b, & quadrato radicis; proinde $e^2 + 2be + b^2$ nempe quadratum ex $e + b$ ducatur in 3 b; proueniet enim $3be^2 + 6b^2e + 3b^3$, ex quo subtrahi debet $e^3 + 3be^2 + 3b^2e + b^3$, & remanebit $3b^2e - e^3 + 2b^3$, quod æquabitur z solido; per antithesin verò $3b^2e - e^3$ æquabitur z solido $- 2b^3$.

Conclusio. Proposita igitur æquatio, ad simpliciorem naturam redacta est.

Indagatio Analytica, & secundi Theorematis demonstratio. Secundò. Quoniam $b - a$ supponitur e; ergo $b - e$ æquabitur a; quoniam autem potestas erat cubus, at verò cubus ortus ex $b - e$ est $b^3 - 3b^2e + 3be^2 - e^3$; proinde hoc eius loco substituatur; solidum autem erat multatum cubo, & erat solidum sub latere 3 b, & sub quadrato radicis; proinde $b^2 - 2be + e^2$ nempe quadratum radicis ducatur in 3 b; proueniet enim $3b^3 - 6b^2e + 3be^2$, ex quo subtrahi debet $b^3 - 3b^2e + 3be^2 - e^3$, factaque subtractione; remanet $2b^3 - 3b^2e + e^3$, quod æquabitur z solido, & per antithesin repetitam, $3b^2e - e^3$ ęquabitur $2b^3 -$ z solido.

Conspectus demonstrationis.

	$3ba^2 - a^3$ æquatur z solido.		*Vel.*
	e æquetur $a - b$.		*e æquetur $b - a$.*
	$e + b$ æquabitur a.		*$b - e$ æquabitur a.*
$-$	*$e^3 + 3be^2 + 3b^2e + b^3$ æquabitur a^3.*	$-$	*$b^3 - 3b^2e + 3be^2 - e^3$ æquabitur a^3.*
$+$	*$3be^2 + 6b^2e + 3b^3$ æquabitur $3ba^2$.*	$+$	*$3b^3 - 6b^2e + 3be^2$ æquabitur $3ba^2$.*
	$3b^2e - e^3 + 2b^3$ æquabitur z solido.		*$2b^3 - 3b^2e + e^3$ æquabitur z sol.*
	$3b^2e - e^3$ æquabitur z solido $- 2b^3$.		*$3b^2e - e^3$ æquabitur $2b^3 -$ z sol.*

12 Q − 1 C æquetur 256, & est 1 R, 8.

48 R − 1 C æquabitur 128, & 1 R est 4.

Vbi obserua in primitiua æquatione comparationis homogeneum maius esse duplo cubo trientis coefficientis subquadraticæ.

24 Q − 1 C æquetur 648, & 1 R, est 6.

192 R − 1 C æquabitur 376, & 1 R, est 2.

Vbi obserua in primitiua æquatione duplum cubum trientis coefficientis subquadraticæ maius esse comparationis homogeneo.

Reductio cuborum affectorum tam sub quadrato, quàm sub latere, ad cubos simpliciter affectos sub latere.

Proponitur æquatio cubica &c. Si $a^3 + 3ba^2 +$ d plano a æquetur z solido; sitque $a + b$ æquale e.

Dico

Dico c^3 ✣ d plano c — 3 b^2 c æquari z ſolido † d plano b — 2 b^3. *Theorema.*

Quandoquidem. Si recta linea diuiſa ſit trifariam, eique adiecta ſit recta quæpiam; cubus autem ex adiecta, plus ſolidq ſub quadrato adiectæ, & ea, quæ trifariam initio diuiſa eſt, plus ſol. ſub quodam plano, & ſub adiecta ęqualis ſit cuidam ſol. cubus etiam aggregati ex adiecta, & triente, plus ſolido, ſub differentia inter planum dictum, & triplum quadratum trientis, & ſub eo quod diximus aggregato, ęqualis erit eidem ſolido, plus differentia, quę eſt inter ſolidum ſub eodem pl., & triente, & duplum cubum eiuſdem trientis. Hoc Theorema verum eſt, cum interfuerint conditiones poſitæ in prima ſequenti obſeruatione, & ſuo modo pro alijs alia Theoremata condi poſſunt. *Quid ad huius Theorematis veritatem requiratur.*

Ad cuius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Si a ✣ b æquetur c; ergo c — b æquabitur a. Quoniam autem poteſtas in ęquatione cubus erat, & ex c — b cubus ortus eſt c^3 — 3 b c^2 † 3 b^2 c — b^3; propterea hoc loco illius ſubſtituatur, & quoniam poteſtas erat affecta affirmatiuè tam ſub quadrato, quàm latere, 3 b a^2 † d plano a afficiebat enim a^3. Intelligatur proinde 3 b ductum in c^2 — 2 b c † b^2, quod æquipollet a^2, & proueniet 3 b c^2 — 6 b^2 c † 3 b^3, quo addito, ob affectionem affirmatam, ad c^3 — 3 b c^2 † 3 b^2 c — b^3, & proueniet c^3 — 3 b^2 c † 2 b^3. Intelligatur deinde ductum d pl. in c — b, & proueniet d pl. c — d pl. b, quo addito ad c^3 — 3 b^2 c † 2 b^3, & proueniet c^3 † $\overline{d\ pl. - 3\,b^2}$ c † 2 b^3 — d pl. b; quod ęquabitur z ſolido, & per antitheſin c^3 † $\overline{d\ pl. - 3\,b^2}$ c ęquabitur z ſolido † d plano b — 2 b^3. *Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis demonſtratio.*

Cubus igitur affectus tam ſub quadrato, quàm latere, ad cubum ſimpliciter affectum reductus eſt; atque adeo æquatio in qua cubus erat affectus, vt dictum eſt ad ſimpliciorem eſt redacta. *Concluſio.*

Conſpectus Demonſtrationis.

a^3 † 3 b a^2 † d plano a æquatur z ſolido.
c æquetur a † b.
c — b æquabitur a.
c^3 — 3 b c^2 † 3 b^2 c — b^3 æquabitur a^3.
3 b c^2 — 6 b^2 c ✠ 3 b^3 æquabitur 3 b a^2.
c^3 — 3 b^2 c ✠ 2 b^3 æquabitur a^3 ✠ 3 b a^2.
d pl. c — d pl. b; æquabitur d pl. a.
c^3 † $\overline{d\ pl. - 3\,b^2}$ c † 2 b^3 — d pl. b æquabitur z ſolido.
c^3 † $\overline{d\ pl. - 3\,b^2}$ c æquabitur z ſol. † d pl. b — 2 b^3.

1 C † 36 Q ✠ 468 R æquetur 1088, & 1 R 2.
1 C ✠ 36 R æquabitur 3248, ſitque 1 R 14.

Vbi obſerua in primitiua æquatione planum ſublaterale maius eſſe triplo quadrato trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticę. Et aggregatum, ex comparationis homogeneo, & ſolido facto à triente coefficientis longitudinis ſubquadraticę, in planum ſublaterale maius eſſe duplo cubo eiuſdem trientis. *Obſeruanda quędam.*

1 C ✠ 27 Q ✠ 130 R æquetur 376, & 1 R eſt 2.
1 C — 113 R æquabitur 88 ſitque 1 R, 11.

Vbi obſerua in primitiua æquatione planus ſublaterale minus eſſe triplo quadrato trientis longitudinis ſubquadraticę; & aggregatum ex comparationis homogeneo, & ſolido a facto à triente coefficientis longitudinis ſub quadraticæ in planum ſublaterale maius eſſe duplo cubo eiuſdem trientis. *Obſeruanda quędam.*

1 C ✠ 27 Q ✠ 120 R æquetur 356, & 1 R eſt 2.
123 R — 1 C æquabitur 22 ſitque 1 R 11.

Vbi obſerua in primitiua æquatione triplum quadratum trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticę, maius eſſe plano coefficiente ſublaterale; & aggregatum ex comparationis homogeneo, & ſolido facto à triente coefficientis longitudinis ſubquadraticę, in coefficiens planum ſublaterale minus eſſe duplo cubo eiuſdem trientis. *Obſeruanda quędam.*

Si

Cubica aequatio affecta sub quadrato, & sub latere.

Si $a^3 + 3\,b\,a^2 - d$ pl. a aequetur z sol. At verò a + b supponatur e.
Dico $e^3 - 3\,\overline{b^2 - d\,pl.}\;e$ aequari z sol. $- 2\,b^3 - d$ pl. b.

Theorema.

Quoniã. Si recta linea diuisa sit trifariam, & alia quępiam accepta sit, sub cuius quadrato, & sub ipsa diuisa factum sit solidum, illique additus sit cubus acceptae lineae; ex aggregato autem subtractum sit solidum aliud contentum sub quodam plano, acceptaque linea, residuum verò cuidam solido sit aequale. Etiam cubus aggregati ex accepta, & triente ipsius diuisę, minus solido sub differentia inter triplum quadratum trientis, & planum iam dictum, & sub aggregato, ex accepta, & triente, aequalis erit eidem solido, minus duplo cubo trientis, minus solido sub iam dicto plano, & eodem triente.

Quid ad huius Theorematis veritatem requiratur.

Hoc Theorema verum est cum intercesserit conditio, in prima sequenti obseruatione habita. Et suo modo pro alia Theorema condi potest.

Ad cuius veritatis indagationem sic procedit Analysta.

Indagatio Analytica, & propositi Theorematis demonstratio.

Quoniam a + b supponitur e; ergo e — b aequabitur a. Cum autem potestas esset cubus, & cubus ortus ex e — b est $e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$; proinde hoc loco ipsius a^3 sustituatur. Cum autem homogeneum vnum esset $3\,b\,a^2$; proinde ducatur 3 b in $e^2 - 2\,b\,e + b^2$; & proueniet $3\,b\,e^2 - 6\,b^2\,e + 3\,b^3$, quod est addendum cubo iam sustituto, & proueniet $e^3 - 3\,b^2\,e + 2\,b^3$ ex quo oportet subducere d pl. e — d pl. b; productum scilicet ex d pl. in e — b, erat enim in aequatione subductum homogeneum d pl. a, & proueniet $e^3 - 3\,b^2\,e + 2\,b^3 - d$ pl. e + d pl. b, quod aequabitur z solido, & per antithesin prouenict aequatio $e^3 - 3\,b^2\,e - d$ pl. e $=$ z sol. $- 2\,b^3 - d$ pl. b.

Conspectus Demonstrationis.

$a^3 + 3\,b\,a^2 - d$ pl. a aequatur z solido.
e aequetur a + b.
e — b aequabitur a.
$e^3 - 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e - b^3$ aequabitur a^3.
$3\,b\,e^2 - 6\,b^2\,e + 3\,b^3$ aequabitur $3\,b\,a^2$.
d pl. e — d pl. b aequabitur d plano a.
$e^3 - 3\,b^2\,e + 2\,b^3 - d$ pl. e + d pl. b aequabitur z sol.
$e^3 - 3\,\overline{b^2 - d\,pl.}\;e$ aequabitur z sol. $- 2\,b^3 - d$ pl. b.

Hic aduerte, & si prima fronte secus appareat, subtrahendum esse totum illud, quod constat ex $3\,b^2$ e, & d pl. e.

1 C + 12 Q — 38 R aequetur 420; est Q 1 R 6.
1 C — 86 R aequabitur 140, fitque 1 R 10.

Obseruanda quaedam.

Vbi obserua in primitiua aequatione comparationis homogeneum, maius esse aggregato ex duplo cubo trientis coefficientis longitudinis subquadraticae, & solido ab eodem triente in planum sublaterale.

1 C + 15 Q — 24 R aequatur 208, est Q 1 R, 4.
99 R — 1 C aequabitur 162, fitque 1 R, 9.

Obseruanda quaedam,

Vbi obserua in primitiua aequatione comparationis homogeneum, minus esse solidorum aggregato, quorum vnum est duplus cubus à triente coefficientis longitudinis subquadraticae. Aliud est factum ab eodem triente in planum coefficiens sublaterale.

Hic aduerte, cum sumitur triens coefficientis longitudinis subquadraticae ab eo non esse subtrahendum planum sublaterale, vt habeatur coefficiens planum sublaterale pro noua ęquatione, sed potius additionem fieri debere, vnde caue ne decipiaris.

Proponitur alia aequatio cubica affecta sub quadrato & latere.

Si $a^3 - 3\,b\,a^2 + d$ pl. a ęquetur z solido. Supponatur autem a — b esse e.
Dico $e^3 - 3\,\overline{b^2 + d\,pl.}\;e$ aequari z sol. $+ 2\,b^3 - d$ pl. b.

Quandoquidem si recta quaedam diuisa sit trifariam; sitque alia quaedam accepta sub cuius quadrato, & sub trifariam diuisa factum sit solidum, cui detractum sit aliud sub plano quodam, & sub iam accepta linea, differentia autem subducta

ſit cubo acceptę lineæ; reſiduum autem ęquale ſit ſolido. Etiam cubus differentię inter trientem, & lineam acceptam, minus ſolido, ſub triplo quadrato trientis, & eadem differentia plus ſolido ſub plano iam dicto in rectam, quæ quidem eſt eadem differentia inter acceptam lineam, & eundem trientem, æquabitur ſolido prædicto, plus duplo cubo trientis, minus ſolido ſub commemorato plano, & eodem triente.

Hoc Theorema verum eſt iuxta ea, quæ habentur in prima ſequenti obſeruatione. Ad huius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Quid ad huius Theorematis veritatem requiratur.

Quoniam igitur a − b, ſupponitur æquari e, propterea e + b, æquabitur a. Quoniam autem poteſtas in æquatione cubus erat, & ex e + b. Cubus ortus eſt $e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$. Propterea hoc loco illius ſubſtituatur, & quoniam poteſtas affecta erat negatiuè ſub quadrato; affirmatiuè ſub latere nempe $-\,3\,b\,e^2 + d$ plano e, afficiebat enim e^3 hoc eſt $3\,b\,e^2 + d$ plano e negabatur de e^3. Proinde intelligatur $-\,3\,b$ ductum in $e^2 + 2\,b\,e + b^2$, & proueniet $3\,b\,e^2 + 6\,b^2\,e + 3\,b^3$; Hoc autem ſubtrahendum eſt ex $e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$; & remanebit $e^3 - 3\,b^2\,e - 2\,b^3$. Ducatur verò e + b in d planum, & proueniet d planum e + d pl. b, addendum ſupradicto reſiduo, & fiet $e^3 - \overline{3\,b^2\,e - 2\,b^3}$ + d pl. e + d pl. b, quod æquabitur z ſol., & per antitheſin $e^3 - \overline{3\,b^2 + d\ \text{pl.}}\ e$ æquabitur z ſolido $+\,2\,b^3 -$ d pl. b.

Conſpectus Demonſtrationis.

$a^3 - 3\,b\,a^2 + d$ plano a æquatur z ſolido.
e æquetur a − b.
e + b æquabitur a.
$+$ *$e^3 + 3\,b\,e^2 + 3\,b^2\,e + b^3$ æquabitur a^3.*
$-$ *$3\,b\,e^2 + 6\,b^2\,e + 3\,b^3$ æquabitur $3\,b\,a^2$.*
$+$ *d pl. e + d pl. b æquabitur d pl. a.*
$e^3 - 3\,\overline{b^2 e - 2\,b^3}$ + d pl. e + d pl. b æquabitur z ſolido.
$e^3 - 3\,\overline{b^2 + d\ \text{pl.}}$ e æquabitur z ſol. + $2\,b^3$ − d pl. b.

1 C − 30 Q + 330 R æquetur 1575, eſt 1 R 15. 1 C + 30 R æquabitur 275; fitque 1 R 5.
1 C − 15 Q + 70 R æquetur 200 eſt 1 R, 10. 1 C − 5 R æquabitur; 100 fitque 1 R 5.
1 C − 15 Q + 60 R æquetur 32 eſt 1 R 8. 15 R − 1 C æquabitur 18; fitque 1 R 3.

Obſerua in primitiua æquatione primi exempli, triplum quadratum trientis longitudinis ſubquadraticę minus eſſe coefficiente plano ſublaterale. Aggregatum verò ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis, maius eſſe ſolido, à plano ſublaterale in trientem coefficientis longitudinis ſubquadraticæ.

Obſeruanda quedam.

In primitiua æquatione ſecundi exempli, triplum quadratum trientis longitudinis ſubquadraticæ maius eſſe coefficiente plano ſublaterali. Aggregatum verò ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis maius eſſe ſolido à coefficiente plano ſublaterale in trientem coefficientis ſubquadraticæ.

Obſeruanda quedam.

In primitiua ęquatione tertij exempli triplum quadratum trientis coefficientis longitudinis ſubquadraticæ maius eſſe plano coefficiente ſublaterali. At verò aggregatum ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis, minus eſſe ſolido à coefficiente plano ſublaterale, in trientem coefficientis longitudinis ſubquadraticę.

Obſeruandam quedam.

Vel ſi ſupponatur b − a ęquari e; ergo b − e ęquabitur a; Cubus autem ex b − e eſt $b^3 - 3\,b^2\,e + 3\,b\,e^2 - e^3$, hoc igitur ſubrogetur loco ipſius a^3, cui addatur d pl. b − d pl. e, & ex aggregato ſubtrahatur $3\,b^3 - 6\,b^2\,e + 3\,b\,e^2$; nimirum $b^2 - 2\,b\,e + e^2$; quagratum ſcilicet ex b − e ductum in 3 b, & proueniet $\underline{3\,b^2\,e - 2}\,b^3 - e^3$ + d pl. b − d pl. e, quod æquabitur z ſol., & per antitheſia $\overline{3\,b^2 - d\ \text{pl.}}\ e - e^3$ æquabitur z ſolido $+\,2\,b^3 -$ d pl. b.

Secunda hypotheſis.

1 C − 30 Q + 330 R æquetur 1116 eſt 1 R 6. 1 C + 30 R æquabitur 184; fitque 1 R 4.

1 C

1 C — 30 Q + 210 R æquatur 396 est 1 R 6. 90 R — 1 C æquabitur 296 sitque 1 R 4.

1 C — 30 Q † 276 R æquatur 688 est 1 R 4. 1 C — 24 R æquabitur 72 sitque 1 R 6.

Obseruanda quædam.

Obserua in primitiua æquatione primi exempli triplum quadratum coefficientis longitudinis subquadraticę minus esse coefficiente plano sublaterale. At verò aggregatum ex comparationis homogeneo, & duplo cubo eiusdem trientis, minus esse solido ab eodem coefficiente plano sublaterale in trientem prædictum coefficientis longitudinis subquadraticę.

Obseruanda quædam.

Obserua in primitiua ęquatione secundi exempli triplum quadratum trientis maius esse coefficiente plano sublaterale. At aggregatum ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis, maius esse solido ab eodem triente in coefficiens planum sublaterale.

Obseruanda quædam.

Obserua in primitiua tertij exempli: triplum quadratum trientis coefficientis longitudinis subquadraticę maius esse coefficiente plano sublaterale. At aggregatum ex comparationis homogeneo, & duplo cubo trientis iam dicti minus esse solido ab eodem triente in coefficiens planum sublaterale.

Proponitur æquatio cubica negate affecta tam sub quadrato quàm latere.

Si fuerit $a^3 - \overline{3\ b\ a^2} - \overline{d\ pl.\ a}$ ⩵ z solido. Supponatur autem a — b esse e. Dico $e^3 - \overline{3\ b^2} - \overline{d\ pl.}$ e æquari z sol. + 2 b^3 † d pl. b. Supposito quod a — b ęquetur e.

Quandoquidem. Si recta quædam diuisa sit trifariam, acceptaque sit quædam alia recta, sub cuius quadrato factum sit solidum, itemque aliud fiat solidum sub quodam plano, & sub recta accepta, vtrumque verò subtrahatur ex acceptæ cubo; residuum verò ęquale sit cuidam solido. Etiam cubus ex differentia inter trientem diuisæ, & acceptam lineam minus solido sub aggregato ex triplo quadrato trientis, & plano iam dicto, & sub differentia inter acceptam, & trientem ęqualis est prędicto solido, plus duplo cubo trientis, plus solido sub plano iam dicto, & triente.

Theorema.

Ad cuius veritatis indagationem sic procedit Analysta.

Indagatio Analytica propositi Theorematis, & eiusdem demonstratio.

Si a — b æquetur e, ergo b + e æquabitur a. Quoniam autem potestas in æquatione est cubus. Cubus autem ortus ex b + e est b^3 + 3 b^2 e, + 3 b e^2 † e^3. Hoc itaque substituatur loco ipsius a^3. Quoniam verò homogeneum vnum erat 3 b a^2 — propterea ducatur 3 b in b^2 † 2 b e † e^2, quadratum scilicet ex b † e, & proueniet 3 b^3 + 6 b^2 e + 3 b e^2, & quia aliud homogeneum erat d pl. a propterea ducatur b † e in d pl., & proueniet d pl. b † d pl. e. Subtrahatur autem 3 b^3 † 6 b^2 e + 3 b e^2, ex b^3 + 3 b^2 e † 3 b e^2 + e^3, & remanebit e^3 — 3 b^2 e — 2 b^3 ex quo subtrahatur d pl. b — d pl. e, & remanebit e^3 — 3 b^2 e — 2 b^3 $\overline{-\ d\ pl.\ b}$ — d pl. e, quod æquabitur z sol., & per reiteratam antithesin fiet $e^3 - 3\ \overline{b^2} - \overline{d\ pl.}$ e ⩵ z sol. + 2 b^3 + d pl. b.

Conspectus Demonstrationis.

a^3 — 3 b a^2 — d pl. a æquatur z solido.
e æquetur a — b.
b + e æquabitur a.
+ *b^3 + 3 b^2 e + 3 b e^2 † e^3 æquabitur a^3.*
— *3 b^3 + 6 b^2 e † 3 b e^2 æquabitur 3 b a^2.*
— *d pl. b + d pl. e æquabitur d pl. a.*
e^3 — 3 b^2 e — 2 b^3 æquabitur a^3 — 3 b a^2.
e^3 — $\underline{3\ b^2 e}$ — $\underline{2\ b^3}$ — d pl. b — d pl. e æquabitur z sol.
$e^3 - \overline{3\ b^2} - \overline{d\ pl.}$ e æquabitur z sol. † 2 b^3 † d pl. b.

Proponitur æquatio cubica amphibola dupliciter affecta.

1 C — 15 Q — 30 R æquatur 68, & est 1 R 17. 1 C — 105 R æquabitur 468 sitq; 1 R 12.

Hic nihil obseruandum occurrit.

Si d pl. a — 3 b a^2 — a^3 ęquetur z solido. Supponatur autem a + b æquari e.

Dico

Proponitur æquatio reducenda.

Dico $\overline{d\ pl.\ ✣\ 3\ b^2}$ e — e^3 æquari z ſolido ✣ 2 b^3 ✣ d pl. b.

Theorema.

Quandoquidem. Si recta quæpiam diuiſa ſit trifariam, & quædam accepta ſit ſub cuius quadrato, & ſub diuiſa ſolidum ſubductum ſit a ſolido ſub quodam plano, & ſub accepta, ac ex reſiduo ſubductus ſit cubus acceptę, reſiduum autem æquale ſit cuidam ſol. Etiam ſolidum ſub aggregato, ex plano iam dicto, ac triplo quadrato trientis, & ſub aggregato ex accepta, & triente minus cubo huiuſmodi aggregati, ęquale erit eidem, ſolido plus duplo cubo trientis, plus ſolido ſub iam dicto plano, & triente.

Ad cuius veritatis indagationem. Sic procedit Analyſta.

Indagatio Analytica, & propoſiti Theorematis propoſiti demonſtratio.

Quoniam a ✣ b ſupponitur e; ergo e — b æquabitur a quia autem poteſtas erat cubus. At verò cubus ortus ex e — b eſt e^3 — 3 b e^2 ✣ 3 b^2 e — b^3; propterea hoc eius loco ſuſtituatur. Quoniam autem homogeneum primum erat d pl. a; homogeneum alter erat 3 b a^2 affectum ſigno — quo etiam afficiebatur cubus; proinde ducatur d pl. in e — b, & proueniet d pl. e — d pl. b, ducatur autem e^2 — 2 b e ✣ b^2 in 3 b; & proueniet 3 b e^2 — 6 b^2 e ✣ 3 b^3, quod ſubtrahere oportet ex d pl. e — d pl. b, & remanet d pl. e — d pl. b — 3 b e^2 † 6 b^2 e — 3 b^3 ex quo oportet ſubducere e^3 — 3 b e^2 † 3 b^2 e — b^3, remanebit autem d pl. e — d pl. b — e^3 ✣ 3 b^2 e — 2 b^3; quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin fiet æquatio $\overline{d\ pl.\ ✣\ 3\ b^2}$ e — e^3 = z ſol. † 2 b^3 † d pl. b.

Conſpectus Demonſtrationis.

d pl. a — 3 b a^2 — a^3 æquatur z ſolido.
e æquetur a ✣ b.
e — b æquabitur a.
— *e^3 — 3 b e^2 ✣ 3 b^2 e — b^3 æquabitur a^3.*
✣ *d pl. e — d pl. b æquabitur d plano a.*
— *3 b e^2 — 6 b^2 e ✣ 3 b^3 æquabitur 3 b a^2.*
d pl. e — d pl. b — 3 b e^2 † 6 b^2 e — 3 b^3 æquabitur d pl. a — 3 b a^2.
d pl. e — d pl. b — e^3 ✣ 3 b^2 e — 3 b^3 æquabitur z ſolido.
$\overline{d\ pl.\ ✣\ 3\ b^2}$ e — e^3 æquabitur z ſolido ✣ 2 b^3 ✣ d pl. b.

96 R — 27 Q — 1 C æquatur 76, eſt 1 R 2339 R — 1 C quabitur 2398 fitque 1 R, 12.

Nihil hìc obſeruandum occurrit.

Si 3 b a^2 † d pl. a — a^3 æquetur z ſolido, & a — b ſupponatur e.

Dico $\overline{d\ pl.\ ✣\ 3\ b^2}$ e — e^3, æquari z ſol. — d pl. b — 2 b^3.

Theorema.

Quandoquidem. Si recta diuiſa ſit trifariam, & alia quępiam accepta ſit, ſub cuius quadrato, & ſub diuiſa factum ſit ſolidum, cui additum ſit ſolidum, ſub quodam plano, & ſub accepta, & ex aggregato ſubductus ſit cubus ex accepta; reſiduum verò æquale ſit cuidam ſolido. Etiam ſolidum ſub aggregato ex plano prędicto & ex triplo quadrato trientis diuiſæ, & ſub differentia inter trientem, & acceptam, minus cubo huiuſmodi differentię æquale eſt eidem ſolido, minus ſolido ſub plano prędicto, & triente, minus duplo cubo eiuſdem trientis.

Ad cuius veritatis indagationem ſic procedit Analyſta.

Indagatio Analytica, & Theorematis demonſtratio.

Quoniam a — b ſupponitur e; ergo e † b æquabitur a, & quoniam in æquatione poteſtas erat cubus, cubus verò ortus ex e † b, eſt e^3 † 3 b e^2 † 3 b^2 e † b^3; Cubus autem negabatur de homogeneo; quorum vnum erat 3 b a^2, aliud d pl. a; ducatur 3 b in e^2 ✣ 2 b e † b^2, & proueniet 3 b e^2 † 6 b^2 e ✣ 3 b^3; nempe productum ex 3 b in quadratum ex e ✣ b ducaturque d pl. in e ✣ b, & proueniet d pl. e ✣ d pl. b horum aggregatum eſt 3 b e^2 † 6 b^2 e ✣ 3 b^3 ✣ d pl. e ex quo ſubtracto cubo iam dicto, remanebit 3 b e^2 † 3 b^2 e † 2 b^3 ✣ d pl. b ✣ d pl. e; quod æquabitur z ſolido, & per antitheſin fiet $\overline{d\ pl.\ ✣\ 3\ b^2}$ e † e^3 = z ſol. — d pl. b — 2 b^3.

Vel b — a eſto e, & $\overline{d\ pl.\ ✣\ 3\ b^2}$ e — e^3 æquabitur 2 b^3 ✣ d pl. b — z ſol., &c.

Conspectus Demonstrationis.

3 b a^2 † d pl. a — a^3 aequatur z solido.
e aequetur a — b.
e ✣ b aequabitur a.
— *e^3 † 3 b e^2 † 3 b^2 e † b^3 aequabitur a^3.*
✠ *3 b e^2 ✠ 6 b^2 e ✣ 3 b^3 aequabitur 3 b a^2.*
✠ *d pl. b ✠ d pl. e aequabitur d pl. a.*
3 b e^2 † 6 b^2 e † 3 b^3 † d pl. b † d pl. e aequabitur 3 b a^2 † d pl. a.
3 b e^2 † 3 b^2 e † 2 b^3 † d pl. b † d pl. e aequabitur z sol.
d pl. ✣ 3 b^2 *e — e^3 aequabitur z solido — d pl. b — 2 b^3.*

Numerosa aequationes. 24 *Q* ✣ 100 *R* — 1 *C aequatur* 2400, *& est* 1 *R* 10.
292 *R* — 1 *C aequabitur* 576, *sitque* 1 *R* 2.

Obseruanda quaedam. Hìc obserua in primitiua æquatione comparationis homogeneum maius esse aggregato ex duplo cubo trientis coefficientis longitudinis subquadraticæ, & solido facto ab eodem triente, in coefficiens planum sublaterale.

Numerosa aequationes. 30 *Q* ✠ 100 *R* — 1 *C aequabitur* 1464, *& est* 1 *R* 6.
400 *R* — 1 *C aequabitur* 1536; *sitque* 1 *R* 4.

Obseruanda quaedam. Hìc obserua in primitiua æquatione comparationis homogeneum minus esse aggregato solidorum, quorum vnum est duplum cubi trientis coefficientis longitudinis subquadraticæ; aliud verò est solidum factum ab eodem triente in coefficiens planum sublaterale.

Proponitur aequatio quadratocubica. Si 3 b a^2 — d pl. a — a^3 æquetur z solido. Supponatur autem a — b esse e.
Dico 3 b^2 — d pl. e — e^3 æquari z solido ✣ d pl. b — 2 b^3.

Quandoquidem. Si recta quædam diuisa sit trifariam, & alia quæpiam accepta sit; sub cuius quadrato, & sub diuisa factum sit solidum, à quo subtrahatur solidum, sub plano quodam, & accepta, & ex residuo subtrahatur cubus ipsius acceptę. Etiam solidum sub differentia inter triplum quadratum trientis, & planum prædictum, & sub differentia inter acceptam, & trientem, minus cubo eiusdem differentię; æquale est eidem solido, plus solido sub plano prædicto, & sub triente, minus duplo cubo trientis.

Theorema. Ad cuius veritatis indagationem sic procedit Analysta.

Indagatio Analytica, & propositi Theorematis demonstratio. Quoniam a — b supponitur e, ergo b ✣ e ęquabitur a; cùm autem potestas in æquatione foret cubus, cubus autem ortus ex b ✣ e est b^3 ✣ 3 b^2 e ✣ 3 b e^2 † e^3; proinde loco ipsius a^3 substituatur. Cùm verò de homogeneis negaretur potestas; homogeneum autem vnum erat 3 b a^2; ob id 3 b ducatur in b^2 † 2 b e ✠ e^2, vt fiat 3 b^3 ✣ 6 b^2 e ✠ 3 b e^2. Quoniam verò alterum erat d pl. a affectum signo — ducatur d pl. in b † e, vt proueniat d pl. b ✣ d pl. e auferendum ex 3 b^3 ✣ 6 b^2 e † 3 b e^2, & remanebit 3 b^3 † 6 b^2 e † 3 b e^2 — d pl. b — d pl. e, ex quo dematur cubus iam dictus, & remanebit 2 b^3 † 3 b^2 e — d pl. b — d pl. e — e^3, quod æquabitur z solido, & per antithesin 3 b^2 ✣ d pl. e — e^3 æquabitur z solido ✣ d pl. b — 2 b^3.

Conspectus Demonstrationis.

3 b a^2 — d pl. a — a^3 aequatur z solido.
e aequetur a — b.
b † e aequabitur a.
— *b^3 ✣ 3 b^2 e ✣ 3 b e^2 ✣ e^3 aequabitur a^3.*
✣ *3 b^3 ✣ 6 b^2 e ✣ 3 b e^2 aequabitur 3 b a^2.*
— *d pl. b ✣ d pl. e aequabitur d pl. a.*

$3 b^3 \dagger 6 b^2 e \dagger 3 b e^2 - d\, pl.\, b - d\, pl.\, e$ *æquabitur* $3 b a^2 - d\, pl.\, a$.

$\overline{2 b^3 + 3} b^2 e - d\, pl.\, b - d\, pl.\, e - e^3$ *æquabitur z solido.*

$3 b^2 - d\, pl.\, e - e^3$ *æquabitur z sol.* $\dagger\, d\, pl.\, b - 2 b^3$.

24 Q — 80 *R* — 1 *C æquatur 600, & est* 1 *R* 10. 112 *R* — 1 *C æquabitur* 216 *fitque* 1 *R* 2.

12 Q — 19 *R* — 1 *C æquetur* 10, *& est* 1 *R* 10. 1 *C* — 29 *R æquabitur* 42 *fitque* 1 *R* 6.

Obserua in primitiua æquatione prioris exempli aggregatum ex comparationis homogeneo, & solido à triente coefficientis longitudinis subquadraticæ in coefficiens planum sublaterale maius esse duplo cubo eiusdem trientis. *Obseruanda quædam.*

Obserua in primitiua æquatione secundi exempli aggregatum ex comparationis homogeneo, & solido a triente coefficientis longitudini subquadraticę in coefficiens planum sublaterale, minus esse duplo cubo eiusdem trientis. *Obseruanda quædam.*

Vel b — a esto c $\overline{3 b^2 - d\, pl.}$ c — c^3 æquabitur 2 b^3 — d pl. b — z solido.

30 Q — 100 *R* — 1 *C æquetur* 264, *& est* 1 *R* 6. 200 *R* — 1 *C æquabitur* 736 *fitque* 1 *R* 4.

Hìc porrò non pigebit aduertere æquationes canonicas secundarias à primarijs, ad solinomiam cùm alias esset binomia sic à quibusdam reduci. Vt si fuerit $a^2 \mp b a \mp c a \equiv + b c$ ad hanc reducunt $a^2 \equiv b^2$, mutata scilicet specie c in speciem b, vt illa euadat $a^2 \mp b a \pm b a \equiv + b^2$ sublatisque ijs, quę se mutuo interimunt ob contrarias notas fieri ęquationem $a^2 \equiv b^2$, & hæc de ordine quadratico, ad cubicum ordinem, quod attinet, ęquationem trinomiam cuiusmodi est $a^3 - b a^2 + b c a$. *Quædam reductionis forma, vt à quibusdam perficitur.*

$- c a^2 - b d a$

$+ d a^2 - c d a \equiv - b c d$

Ad binomiam hanc $a^3 - b^2 a$

$- b c a$

$- c^2 a \equiv - b^2 c$

$- b c^2$ reducunt

per ablationem secundi termini a^2. Ponunt enim b + c æquari d, & in ęquatione trinomia reducenda mutant d in b + c, & prouenit æquatio, è qua reiectis particularibus ex contraditione redundantibus, prouenit ęquatio binomia iam dicta, & fit suo modo de cæterit, quod animaduertisse iuuat.

Æquationes negationis vitio laborantes transmutatione quæ *πρωτοτεσχατος* appellatur, emendantur; hęc autem transmutationis species nomenclatura est consecuta ab eo analogismo ad quem primum proposita æquatio, reuocatur, cùm in eius formula, terminus ille, qui primo quærebatur est primus; is, qui post metabuphosin primus. fit postremus, vel contra. Per hanc autem transmutationem, vt diximus emendantur æquationes negationis vitio laborantes, in quibus affectionum homogenea validiora, de Potestate negantur; fitque per analogiam rationis implicitæ de quà supra verba fecimus, applicando scilicet homogeneum, ad radicem ipsam de qua quæritur, vnde quædam alia suboritur incerta radix, sub cuius specie primum propositam æquationem dirigere, & nouam ordinare liceat, ita fit, vt illic affectiones negatæ, transeant hìc in affirmatas, & contra salua numerorum symmetria exemplis hæc autem illustriora fient. *Emendatio æquationum negationis vitio laborantium quo pacto fieri debeat. Hæc operatio dicitur Protonesaton.*

A^3 — b pl. a æquetur z solido. Quoniam potestas est negatè affecta debet æquatio in explicabilem transmutari, & quidem in affirmatè affectam. Propterea $\frac{z\ solidum}{a}$ esto e planum; ergo $\frac{z\ sol.}{e\ pl.}$ erit a; ex $\frac{z\ sol.}{e\ pl.}$ fiat cubus, isq; est $\frac{z\ sol.\ sol.\ solidum}{e\ pl.\ pl.\ plano}$. Deinde $\frac{z\ sol.}{e\ pl.}$ ducatur in b planum; cum enim homogeneum esset b pl. a, hoc est b planum ducebatur in a; modo duci debet in id, quod ipsi a æquipollet, & fiet $\frac{b\ pl.\ z\ sol.}{e\ pl.}$ quod si auferatur abs $\frac{z\ sol.\ sol.\ solido}{e\ pl.\ pl.\ plano}$ remanebit $\frac{z\ sol.\ sol.\ solidum}{e\ pl.\ pl.\ plano} - \frac{b\ pl.\ z\ sol.}{e\ pl.}$, & hoc æquabitur z solido; omnibus autem ductis in e pl.pl.planum, & z sol.sol.solidum — b pl. z sol. e pl. pl. æquabitur z sol. e pl.pl.plano. *Proponitur æquatio emendanda.*

Omnibus autem applicatis ad z solidum, & z solidosolidum — b pl. e pl.planum æquabitur e pl.pl.plano, & per antithesin e pl.pl.planum + b pl. e pl.pl. æquabitur z solidosolido, vel e plani cubus + b pl. e pl. quadrato, ęquabitur z solidi quadrato. *Æquatio emendata explicatur arte quam Auctor in prima huius operis parte tradidit.*

Hęc autem æquatio explicabilis est ea Arte, quam in prima huius operis parte

tradidimus ad explicandas cubicas æquationes affirmatè affectas ſub data coefficiente magnitudine.

Obſeruanda buadam.

Cum autem innoteſcit e pl. etiam innoteſcet a; nimirum applicatione z ſol. ad e planum cognitum. Analogiſmus verò enunciatiuus de a; erat vt a ad ℞ C z ſol. ita ℞ C z ſol.ſol. ad a^2 — b pl. hoc eſt e planum. Vnde terminus de quo primùm quærebatur eſt primus, &c. Vbi obſerua nouam radicem æquari quadrato veteris radicis, minus coefficiente plano; perinde enim eſt a^2 — b pl. ac eſt e pl. quę vt meliùs intelligas.

Exemplum per numeroſã æquationum.

Sit 1 C — 96 R æqualis 40 effectâ $\frac{40}{1R}$ eſſe 1 R ergo 1 C ✱ 96 Q ęquabitur 1600 ſitque 1 R 4, vnde applicato 40, comparationis homogeneo ad 4, fit quotiens 10, pro radice ęquationis propoſitæ; eſt autem, vt 10, ad ℞ C 40, ita ℞ C 1600 ad 4, vt conſtat ex opere multiplicationis. Si enim per e planum intelligamus 1 R, & per z ſolidum 40; certè z ſol.ſol.ſolidum valebit 64000, & e pl.pl.planum valebit 1 C, quare $\frac{\text{z sol. sol. solidum}}{\text{e pl. pl. plano}}$ valebit $\frac{64000}{1C}$. At verò b pl.ſolidum valet 3840, ob id $\frac{\text{b pl. z sol.}}{\text{e pl.}}$ valebit $\frac{3840}{1R}$. Itaque $\frac{64000}{1C}$ — $\frac{3840}{1R}$ ęquabitur 40. Omnibus ductis in 1 C, fiet ęquatio 64000 — 3840 Q = 40 C. At verò per antitheſin fiet 40 C ✱ 3840 Q = 64000 omnibus diuiſis per 40, fit 1 C ✱ 96 Q = 1600. Huius autem æquationis radix eſt 4, applicetur 40 ad 4, fit quotiens 10, radix primùm quæſita, & fit analogiſmus, vt ſupra dictum eſt.

Supradictorũ explicatio:

Numeris hoc æquationis genus explicatur

Si 1 C — 98 R ęquetur 20, & 1 C ✱ 98 Q æquabitur 400, ſitque 1 R 2, applicetur 20 ad 2, & orietur 10.

Si 1 C — 60 R æquetur 32, etiam 1 C ✱ 60 Q æquabitur 1024 huius æquationis radix eſt 4, ob id 32 applicetur ad 4, & orietur 8, radix, de qua primùm quærebatur.

Quando comparationis homogeneum fuerit irrationale.

Quod ſi comparationis homogeneum in ſua ſoliditate ſit irrationale; facultate tamen velut quadratica rationale; in noua enim æquatione euaneſcit aſymmetria, propterea ſufficit homogeneo comparationis auferre characterem irrationalitatis, in reliquis procedere, vt ſupra, nempe loco ſigni — ſubſtituere ✱, & loco R ſubrogare Q. Itaque.

Numeris eadem tractantur.

Si 1 C — 10 R æquetur ℞ 48. Effecta $\frac{℞ 48}{1R}$ eſſe 1 R, & 1 C ✱ 10 Q æquabitur 48; ſitque 1 R 2, atque adeo 12 erit radix primùm quæſita. Si enim 1 R valor eſt ℞ 12; cubus erit ℞ 1728, & inſuper 10 R valebunt ℞ 1200; auferamus minorem à maiori, & remanebit ℞ 48; communis enim diuiſor eſt 3, qui diuidens 1728 facit quotientem 576, cuius ℞ eſt 24; & diuidens 1200, facit quotientem 400, cuius ℞ eſt 20; ablato 20 à 24 remanet 4, cuius quadratum eſt 16; quo ducto in 3 communem diuiſorem, fit 48; cuius ℞ eſt ℞ 48, eſtque differentia inter ℞ 1728, & ℞ 1200.

Exemplum alterum ad idẽ

Si 1 C — 2 R æquetur ℞ 45, etiam 1 C ✱ 2 Q æquabitur 45; ſitque 1 R 3; quamobrem ſi applicetur ℞ 45 ad 3 fiet quotiens ℞ 5; eſtque radix, de qua primum quærebatur.

Sed hæc Analyticè demonſtremus.

Nota.

Aduerte poſtpoſito numero ſignificari poteſtatẽ vt z ſol. 2 ſignificat z ſol.quadratum, &c.

Analyticè hæc omnia demonſtrantur.

A^3 — b pl. a æquetur z ſolido, & e pl. equetur $\frac{\text{z sol.}}{\text{a}}$ Oſtendendum eſt e pl. 3 † b pl. e pl. 2 æquari z ſol. 2.

Quoniam enim $\frac{\text{z sol.}}{\text{a}}$ ęquatur e pl. omnibus ductis in a, z ſol. ęquabitur e pl. a; Omnibus applicatis ad e pl. ergo $\frac{\text{z sol.}}{\text{e pl.}}$ æquabitur a; omnibus ductis in b planum. Ergo $\frac{\text{z sol. b pl.}}{\text{e pl.}}$ æquabitur b pl. a, & quia $\frac{\text{z sol.}}{\text{e pl.}}$ erat æquale a; ergo eorum cubi æquales erunt, quare $\frac{\text{z sol. 3}}{\text{e pl. 3}}$ æquabitur a^3, hinc auferatur b pl. a, illinc æquipollens $\frac{\text{z sol. b pl.}}{\text{e pl.}}$, & $\frac{\text{z sol. 3}}{\text{e pl. 3}}$ — $\frac{\text{z sol. b pl.}}{\text{e pl.}}$ æquabitur a^3 — b pl. a. Sed a^3 — b pl. a, æquabatur z ſol., ergo $\frac{\text{z sol. 3}}{\text{e pl. 3}}$ — $\frac{\text{z sol. b pl.}}{\text{e pl.}}$ æquabitur z ſolido. Omnibus ductis in e pl. 3, & z ſol. e pl. 3 æquabitur z ſol. 3 — z ſol. b pl. e pl. 2, omnibus diuiſis per z ſol., & e pl. 3 æquabitur z ſol. 2 — b pl. e pl. 2, & per antitheſin e pl. 3 ✱ b pl. e pl. 2 æquabitur z ſol. 2.

Proponitur æquatio cubica affecta ſubquadrato, & latere.

Ita ſi a^3 — b a^2 † d pl. a æquetur z ſol. Ex hypotheſi quod e pl. æquetur $\frac{\text{z sol.}}{\text{a}}$, & e pl. 3 ✱ b z ſol. e — d pl. e pl. 2 æquari z ſol. 2 demonſtrabimus.

Rurſus

Rurſus, $a^3 - b\,a^2 + b$ pl. a æquetur z ſolido, e planum æquetur $\frac{z\ sol.}{a}$ e planicubus † b z ſol. e — d pl. e pl.quadrato ęquabitur z ſolidiquadrato. *Æquatio quadratoquadratica.*

Deinde, $a^4 - b\,a^3 + d$ pl. a^2 ęquetur z pl.plano e ſol. ęquetur $\frac{z\ pl.pl.}{a}$ ergo e ſol. quadratoquadrato — d pl. z pl.pl. e ſol.quadrato † b z pl.pl.quadrato e ſolido ęquabitur z pl.pl.cubo. *Explicatio.*

Si $a^4 - b\,a^3 - d$ pl. a^2 æquetur z pl.plano. Hæc ęquatio tranſmutanda eſt in explicabilem, cum negatione laboret; ob id explicationi minus idonea ſit. $\frac{z\ pl.planum}{a}$ eſto e ſol. ergo $\frac{z\ pl.pl.}{e\ sol.}$ erit a. Proinde ex his quæ proponuntur $\frac{z\ pl.pl.pl.pl.pl.pl.pl.planum}{e\ sol.sol.sol.sol.}$ — $\frac{b\ z\ pl.pl.pl.pl.pl.pl.}{e\ sol.sol.sol.}$ — $\frac{d\ pl.\ z\ pl.pl.pl.pl.}{e\ sol.sol.}$ ęquabitur z pl.plano.

Ductis omnibus in e ſol.ſol.ſol.ſol., & z pl.pl.pl.pl.pl.pl.pl.planum — b z pl.pl. pl.pl.pl.pl. e ſol. — d pl. z pl.pl.pl.pl. e ſol.ſol. æquabitur z pl.pl. e ſol.ſol.ſol.ſolido, adhibita congrua antitheſi, omnibuſque diuiſis per z pl.pl., & e ſol. quad.quadratum + d pl. z pl.pl. e ſol. quadrato † b z pl.pl.pl.pl. e ſol. æquabitur z pl.pl. cubo; ſeu e ſol. quadratoquadratum + d pl. z pl.pl. e ſol. quadrato + b z pl.pl. quadrato e ſol. æquabitur z pl.pl. cubo. *Æquatio quadratoquadratica numeris tractata.*

Æquatio numeroſa ſit 1 QQ — 3 C — 8 Q = 50 efficta $\frac{50}{1R}$ eſſe 1 R, & 1 Q Q + 400 Q + 7500 R ęquabitur 125000, & fiet 1 R 10.

Itaque ſi ad 10, applicetur 50, emerget 5, pro radice primum quæſita; hoc autem ſic intelligendum eſt, vt 8, coefficiens ſub quadrato, ducatur in 50, comparationis homogeneum, & producetur 400; Deinde 3 coefficiens ſub cubo ducatur in 2500, quadratum ex 50, comparationis homogeneo, & producetur 7500. Deinde 50, homogeneum comparationis ducatur in ſe cubice, & fiet 125000. *Quando comparationis homogeneum in huiuſmodi æquationibus fuerit in ſua planoplanitia irrationale.*

Quando verò ęquationis quadratoquadraticæ comparationis homogeneum in ſua pl. planitie fuerit irrationale, facultate tamen veluti cubica rationale, vt ſi 1 Q Q — 8 R æquetur ℞ C 80, & 1 Q Q † 8 C æquabitur 80, fitque 1 R 2, quamobrem radix primùm quæſita erit ℞ C 10, proueniens ex applicatione ℞ C 80 ad ℞ C 8 nempe ad 2. Itaque noua æquatione aſymmetria euaneſcit. *Æquatio cubica. Æquatio quadratoquadratica.*

Quod ſi hactenus dicta numeris aptentur, longe faciliùs percipientur.

Æquationes inuerſè negatę minus ſunt explicabiles; ad earum tamen difficultatem tollendam, conducit metamorphoſis qua videlicet in ſuas correlatas tranſmutantur; vtiliſſima quidem eſt ad tollendas vocum amphibolias in correlatis æquationibus ad habendam ex data radice vnius, alteriùs notitiam. Ob eum autem finem inſtituitur, vt quæ æquatio primò propoſita per irregularem climacticum deſcenſum fuit, ea ope ſuæ correlatæ reducatur ad depreſſiorem, ac ob id magis explicabilem; quanto enim depreſſior, tanto etiam explicabilior æquatio eſt. Valet aduerſus amphiboliam, atque diſmechanian in ęquationibus cubicis, quadratocubicis, & ex inde per binos alternos gradus climacticos; non ita tamen proficit reductioni æquationum quadraticarum, quadratoquadraticarum, & ex inde per binos alternos gradus climacticos, ad quarum explicationem Analyſta vtitur climactica paraplerosi. *Quando fuerint æquationes inuerſè negatę.*

Huius verò tranſmutationis quæ Ἀναστροφή dicitur perficiendæ forma, ſic ſe habet. Poteſtati radicis, de qua quęritur adijcienda eſt poteſtas radicis ęquę altę, ſiquidem harũ aggregatũ commodè in prędicto climacticarum ordine diuiſionem ſuſcipit. Secundò homogeneum comparationis, vna cum translatis affectionum homogeneis, & addita poteſtate affectæ magnitudinis comparatur, quæ recipiat eandem diuiſionem; hac enim comparatione inciditur in æqualitatem correlatam, vel affirmatam, vel directè negatam. Cognita autem radice poteſtatis addititię comparantur magnitudines ex vna parte oriundæ; magnitudinibus oriundis ex altera. Hęc tamen præcepta difficile ſine exemplorum illuſtratione intelligi poſſunt. *Anaſtrophe qua Arte fiat.*

Decepiuntur autem, qui putant huiuſmodi tranſmutationem abſolui per hoc, quod inuerſè negatę, in ſuas correlatas tranſmutentur; non enim ob eum finem inſtituitur, ſed tranſmutatio in correlatas eſt veluti medium, quo vtitur Artifex ad conſequandum intentum, nempe propoſitam æquationem amphibolam altioris ordinis, ad depreſſiorem reducere. *Quorundam error.*

Proponatur b pl. a — a^3 æquari z ſolido. Hęc eſt æquatio ambigua, ob id minime *Proponitur altera æquatio*

me

nempe cubici ordinis āphibola emendāda.

me ad resolutionem idonea. Ad amphiboliam igitur e vitandam. hæc est instituenda, de qua loquimur, transmutatio. Cum igitur b pl. a — a^3 æquetur z solido; adhibita transpositione, a^3 ęquabitur b pl. a — z sol. Vtrique parti addatur e^3, vt primo enunciatum fuit; Primùm enim potestati radicis de qua quæritur, nempe a^3 addi debet potestas radicis ęquę altę; videlicet e^3, & fiet a^3 + e^3, & hoc ęquabitur b pl. a + e^3 — z solido. Hoc potestatum aggregatum a^3 + e^3 diuisionem commode recipit ab a + e dum enim laterum aggregato applicatur summa cuborum, quadratorum aggregatum emergit, minus rectangulo comprehenso sub ipsis lateribus, quapropter ex huiusmodi applicatione orietur a^2 — e a + e^2. Reliquum est, vt altera ęqualitatis pars, nimirum b pl. a + e^3 — z sol. applicata ad a + e; faciat aliquod planum datum, iam ortis reliquis comparandum; nempe a^2 — e a + e^2. Hoc commodissimè fiet, si in locum ipsius e^3 — z sol. substituatur b pl. e, erit enim b pl. a + b pl. e, quod quidem diuisionem recipiens abs a + e, facit b planum, ex hac enim applicatione, oritur b planum. Cùm verò e^3 — z sol. æquetur b plano e ergo etiam per metathesin e^3 — b pl. e ęqeabitur z solido. Quoniam autem a^3 + e^3 ęquatur b pl. a + e^3 — z solido, & in locum ipsius e^3 — z sol. substituitur b pl. e. Si fiat communis applicatio; hoc est vtriusque partis ad a + e inter orta, erit æqualitas, atque adeo a^2 — e a + e^2 æquabitur b plano. Innotescat autem e esse d; ex analysi, adhibita congrua, decentique pręparatione, & a^2 — d a + d^2 æquabitur b plano, & ordinata æquatione d a — a^2 ęquabitur d^2 — b plano. Et ita ęquatio illa inuersè negata b pl. a — a^3 = z solido, transmutata est in directè negatam, & eiusdem ordinis e^3 — b pl. e = z solido. Itaut, fiat climacticus irregularis descensus in ęquationem depressiorem de radice primùm proposita, explicabilem. Itaque a^2 — d a + d^2 ęquabitur b^2, & ordinatione facta d a — a^2 ęquabitur d^2 — b plano. Vnde

Hæc præparatio paulo supra perprotonoscaton explicata est.

Demonstratio Analytica supradictorum.

Supponatur b pl. a — a^3 æquari z sol., ex hypothesi, quod e^2 — a e ęquetur b pl. — a^2. Ostendendum est e^3 — b pl. e ęquari z solido.

Quoniam igitur b pl. a — a^3 ęquatur z solido, ergo per antithesin b pl. a ęquabitur z solido + a^3, & rursus b pl. a — z solido ęquabitur a^3 at ex hypothesi e^2 — a e ęquatur b pl. — a^2 ergo e^2 — a e + a^2 ęquabitur b plano, sed factum ex e^2 — a e + a^2 in a + e est a^3 + e^3, & factum ex b pl. in a + e est b pl. a + b pl. e ergo a^3 + e^3 ęquabitur b pl. a + b pl. e. Sed b pl. a — z sol. ęquatur a^3 ergo e^3 + b pl. a — z sol. ęquabitur b pl. a + b pl. e; vtrinque sublato b pl. a & e^3 — z sol. æquabitur b pl. e ergo e^3 ęquabitur b pl. e + z solido, quare e^3 — b pl. e æquabitur z solido.

Atque hunc in modum facta est transmutatio inuersè negatæ in directè negatam eiusdem ordinis; Sed hìc non sistit Antificis industria; Si igitur innotescat e esse d, a^2 — d a + d^2 æquabitur b plano, & ordinando d a — a^2 æquabitur d^2 — b plano.

Numeris eadem tractantur.

Numeris hæc eadem tractemus, 19 R — 1 C æquetur 30, ergo 1 C — 19 R ęquabitur 30. Hæc autem ęquatio reducetur ad hanc 5 R — 1 Q = *6* fitque 1 R 2, vel 3. Nam si sit 2, 5 R valebunt 10, à quibus subtracto 4, quadrato ex 2, remanet *6*. Item si sit 3; 5 R valebunt 15 à quibus subtracto 9, quadrato ex 3 remanet *6*. Modo, si vnius radicis valor est 2, 19 R valebunt 38, a quibus subtracto 8; cubo ex 2, remanent 30. At si 1 R valet 3; 19 R valebunt 57, à quibus subtracto 27 cubo ex 3, remanent 30. Cęterum illius æquationis 1 C — 19 R = 30, innotescit radix 5; Nam reducitur ad 1 C + 19 Q = 900 cuius radix est *6* per quam si diuidatur 30, comparationis homogeneum propositæ æquationis, fit quotiens 5, sumendus pro coefficiente nouæ æquationes 5 R — 1 Q = *6*, in qua comparationis homogeneum est radix illius æquationis 1 C + 1 QQ = 900.

Proponitur altera æquatio cubica, sic licet amphibola.

Proponitur b a^2 — a^3 æquari z solido; facienda sit transmutatio de qua loquimur; cum etiam a^3 æquetur b a^2 — z solido; addito e^3 vtrique æquationis parti, & a^3 + e^3 æquabitur b a^2 + e^3 — z solido; in locum verò ipsius z solidi — e^3 substitubtur b e^2, vt videlicet diuisio institui possit per a + e, diuisio inquam vtriusque partis, cùm itaque ex hypothesi z sol. — e^3 æquetur b e^2 fiet per antithesin e^3 + b e^2 = z solido itaque a^3 + e^3 æquabitnr b a^2 — b e^2, si verò instituatur diuisio per a + e fiet æquatio

quatio $a^2 - e\,a + e^2 = b\,a - b\,e$, hoc eſt b in a − e; at verò innoteſcat e eſſe d per doctrinam ſuperiùs traditam, & ordinata æquatione $b\,a + d\,a - a^2$ æquabitur $b^2 + b\,d$, quamobrem æquatio illa inuersè negata, nimirum $b\,a^2 - a^3 =$ z ſolido transformata eſt in affirmatam ordinis eiuſdem, nempe $e^3 + b\,e^2 =$ z ſol. ita vt data radice nouæ æquationis fiat irregularis deſcenſus clymacticus in æquationem depreſſiorem, Itaque.

Si $b\,a^2 - a^3$ æquatur z ſol. & $b\,e^2 + e^3$ æquetur z ſol. innoteſcat autem e eſſe d, & $d\,a + b\,a - a^2$ æquabitur $b\,d \dagger d^2$, vnde. *Proponitur æquatio cubica*

Si 7 Q — æquetur 36 ergo 7 Q + 1 C æquabitur 36, cuius æquationis radix eſt 2, ergo ex dictis 9 R — 1 Q æquabitur 18, & fit 1 R 3, vel 6. *Numeris eadem tractantur.*

Proponatur a pl.pl. b — a^5 ęquari z pl. ſol. effingatur quadrato-quadratum ex e — a & ſumantur ſingularia planoplana ſimpliciter, nec repetita, & erunt $e^4 - a\,e^3 \dagger a^2 e^2 - a^3 e + a^4$. Ducantur omnia in e + a, & fiet $e^5 + a^5$, at verò ex ijs, quę proponuntur a^5 valet b pl.pl. a — z pl. ſol. ſiquidem cum ſit b pl.pl. $a - a^5 =$ z pl. ſol. erit per antitheſin $a^5 =$ b pl.pl. a — z pl.ſol. vtrique parti addito e^5, & $e^5 + a^5$ ęquabitur $e^5 \dagger$ b pl.pl. a — z pl. ſol. applicetur vtraque æquationis pars ad e + a, & ex prima parte orietur $e^4 - a\,e^3 + a^2 e^2 - a^3 e + a^4$, quid autem oriatur ex ſecunda non liquet; comparetur tamen tali planoſolido, vt plano-planum ortiuum nequeat ignorari, itaque b pl.pl. e + b pl.pl. a æquetur alteri eius parti, nempe $e^5 \dagger$ b pl.pl. a — z pl.ſol. proinde vtrinque deleatur affectio ſub a gradu, & fiat antitheſis, nam e^5 — b pl.pl. e æquabitur z pl.ſol. Innoteſcat autem e eſſe d, & $d^4 - d^3 a \dagger d^2 a^2 - d\,a^3 + a^4$ æquabitur b pl.pl., & ordinata æquatione ſecundùm Artem $d^3 a - d^2 a^2 - d\,a^3 + a^4$ æquabitur d^4 — b pl.pl. Itaque ſi b pl.pl. $a - a^5$ æquetur z pl.ſol., & e^5 — b pl.pl. e æquetur z pl.ſol. innoteſcat autem e eſſe d, & $d^3 a - d^2 a^2 + d\,a^3 - a^4$ æquabitur d^4 — b pl.pl. 11 R — 1 Q C æquetur 10, ergo 1 Q C — 11 R æquabitur 10, ſitque 1 R 2, quamobrem 8 R — 4 Q + 2 C — 1 QQ æquabitur 5, ſitque vna R 1, & radix primùm quęſita; Si ſit æquatio 1 Q C — 11 R = 10 radicis valor erit 2, nam 1 Q C valebit 32, hinc ablato 22 omnium radicum pretio, remanebit 10.

Proponatur $b\,a^4 - a^5$ æquari z pl. ſol., & per metatheſin vtrique ſcilicet parti addito e^5, & $a^5 + e^5$ æquabitur $b\,a^4$ — z pl. ſol. + e^5, vtraque pars applicetur ad a + e, illic oritur $a^4 - a\,e^3 + a^2 e^2 - a^3 e + a^4$, quod ſi $b\,a^4 - b\,e^4$ æquetur alteri parti, ea quoque commodam diuiſionem recipiet ad a † e, & orietur $b\,a^3 - b\,a^2 e + b\,e^2 a - b\,e^3$ facta, poſitaque æqualitate, vt æquatio ritè ordinetur, ſtatuatur $e^5 + b\,e^4$ æquari z pl.ſol., & innoteſcat e eſſe d, & $d^4 - d^3 a + d^2 a^2 - d\,a^3 + a^4$ æquabitur $b\,a^3 - b\,a^2 d + b\,d^2 a - b\,d^3$, omnibuſque ordinatis $b\,d^2 a \dagger d^3 a - b\,d\,a^2 - d^2 a^2 \dagger b\,a^3 + d\,a^3 - a^4$ æquabitur $b\,d^3 \dagger d^4$. *Proponitur æquatio per reducenda.*

11 Q Q — 1 Q C æquetur 10000. Igitur 11 Q Q † 1 Q C æquabitur 10000. Fitque 1 R 5. Quapropter 400 R — 80 Q + 16 C — 1 Q Q æquabitur 2000, & quæſita radix ſit 10. Quoniam autem Anaſtrophe contraria via aliquando vſurpatur, vt cùm in ambigua æquatione, contingit radicem vnam dari ex duabus vel pluribus, de quibus poteſt æquatio explicari; hìc repetuntur Anaſtrophes veſtigia ad radicem correlatam aſſequendam; & inde varia proficiſcuntur Theoremata. *Anaſtrophe cõtraria via perficitur.*

Si a^3 — b pl. a æquetur z ſolido, & rurſus b pl. e — e^3 æquetur z ſolido. Innoteſcat autem e eſſe d, & $a^2 - d\,a$ æquabitur b pl. — d^2. Cum enim a^3 — b pl. a æquetur z ſol., & rurſus b pl. d — d^3 æquetur z ſol. ergo a^3 — b pl. a æquabitur b pl. d — d^3, & per metatheſin $a^3 \dagger d^3$ ęquabitur b pl. a † b pl. d, & vtraque æquationis parte diuiſa per a † d, & $a^2 \dagger d^2 - d\,a$ æquabitur b pl., qua æquatione ordinata ſecundùm Artem $a^2 - d\,a$ æquabitur b pl. — d^2, vnde *Alia æquatio.*

Si 1 Q — 1 R 1 C — 8 Q æquetur 7, ſequitur 8 R — 1 C æquari 7, cùmque 1 R poſſit eſſe 1; & 1 Q — 1 R æquabitur 7, quapropter radix primò quæſita erit ℞ $\frac{29}{4} + \frac{1}{2}$. *Numeris eadem tractantur.*

B $a^2 \dagger a^3$ æquabitur z ſol., & rurſus $b\,e^2 - e^3$ æquetur z ſol. Innoteſcat e eſſe d, & $a^2 \dagger \overline{b - d}\,a$ æquab. $b\,d - d^2$. Cùm enim $b\,a^2 \dagger a^3$ ęquetur z ſol. inſuper $b\,d^2 - d^3$ ęquetur z ſol. propterea $b\,a^2 \dagger a^3$ æquabitur $b\,d^2 - d^3$, & per metatheſin $d^3 \dagger a^3$ æquabitur $b\,\overline{d^2 - a^2}$, vtraque æquationis parte ducta per d + a, & $d^2 \dagger a^2 - d\,a$ æquabitur $b\,\overline{d - a}$, qua æquatione *Alia æquatio.*

tione concepta secundum Artem $a^2 + \overline{b - d}\, a$ æquabitur $b\,d - d^2$, itaque.
Si 9 Q ✠ 1 C æquetur 8 ergo 9 Q — 1 C æquatur 8, & quia 1 R potest esse 1, & 1 Q ✠ 8 R æquatur 8, ob id radix primùm quæsita erit ℞ 24 — 4.

Altera æquatio.

Si b pl. $a - a^3$ æquetur z sol., & rursus b pl. $e - e^3$ æquetur z sol. Innotescat e esse d, & a^2 ✠ d a æquabitur b pl. — d^2, cum enim b pl. $a - a^3$ æquetur z solido; ergo b pl. $a - a^3$ æquabitur b pl. $d - d^3$, & per antithesin $a^3 - d^3$ æquabitur b pl. a — b pl. d, vtraque æquationis parte diuisa per a — d, & a^2 ✠ d^2 ✠ d a æquabitur b pl. æquatione concepta secundum Artem a^2 ✠ d a æquabitur b pl. — d^2, Vnde.

Numeris eadem explicantur.

Si 8 R — 1 C æquetur 7 potest 1 R esse 1, & 1 Q ✠ 1 R æquatur 7, fitque rursus 1 R, ℞ $\frac{28}{4} - \frac{1}{2}$.

Altera æquatio cubica.

Si b $a^2 - a^3$ æquetur z sol.; Et rursus b $e^2 - e^3$ æquetur z sol. innotescat autem e esse d, & $a^2 + \overline{d - b}\, a$ æquabitur b d — d^2. Cum enim b $a^2 - a^3$ æquetur z sol. & sursus b $d^2 - d^3$ æquetur z sol. ergo b $a^2 - a^3$ æquabitur b $d^2 - d^3$, & per metathesin $a^3 - d^3$ æquabitur b $\overline{a^2 - d^2}$, itraque æquationis parte diuisa per a — d, & a^2 ✠ d^2 ✠ d a æquabitur b a † b d, qua æquatione concepta secundum Artem a^2 ✠ d a — b a æquabitur b d — d^2, vndè.

Numeris eadem tractantur.

Si 9 Q — 1 C æquetur 8 potest 1 R esse 1. Quare 1 Q — 8 R æquabitur 8, & rursus 1 R erit ℞ 24 — 4.

Isomoeria quid, & qua ratione ipsa perficiatur.

Cùm verò æquationes fractionibus laborant, ex quo capite minus Analysi sunt idoneæ oportet; Isomoeriam adhibere; est autem Isomoeria species transmutationis per multiplicationem ita instituta, vt æqualitates à fractionibus, quibus laborant, liberentur.

Reducuntur autem fractiones ad eandem denominationem ex præceptis Logistices; duciturq; communij homogeneorum denominator, vel ortum ab eo graduorum in datas coefficientes, daturaque comparationis homogeneum Radices ducuntur in coefficientes longitudines, quadrata in coefficientes magnitudines; planas homogenea datæ mensuræ plana; cubi in parabolas solidas. homogeneaue datæ mensuræ solida, & ita deinceps eodem ordine seruato, quod autem fit ex denominatore communi, & radice æqualitatis propositæ, est radix æqualitatis præparatæ, &c.

Sæpe euidit, vt hæc trasmutatio non multiplicatione, sed diuisione perficiatur.

Plerumque contingit, vt hæc transmutatio, non multiplicatione, sed diuisione perficitur. Sed exempli omnia facilius intelligentur solum id notandum superest, nem Isomoeriam perfecisse nil aliud esse, quàm propositæ æqualitatis potestatem, & affectionum, & comparationis homogenea per eunde terminum multiplicasse aut diuisisse.

Propo natur a^3 ✠ $\frac{b\ sol.\ a}{d}$ æquari z solido. Vt igitur à fractionibus æqualitas, quibus laborat, liberetur, reducendæ sunt fractiones ad eandem denominationem, fitque hoc modo, da esto e planum; ergo $\frac{e\ pl.}{d}$ erit a; ex ijs verò, quæ proponuntur e pl. cubus † $\frac{b\ sol.\ d\ e\ pl.}{d^3}$ æquabitur z solido. Cùm enim $\frac{e\ pl.}{d}$ sit a, fieri debet cubus ex ipso; siquidem a^3 est potestas æquationis propositæ. Deinde $\frac{e\ pl.}{d}$ duci debet in b sol. quoniam a ducebatur in b sol., & productum diuidi debet per d, siquidem b sol. a, erat applicatum magnitudini d; proinde $\frac{e\ pl.}{d}$ ducatur in $\frac{b\ sol.}{d}$, & fiet $\frac{b\ sol.\ e\ pl.}{d^2}$ atque adeo fiet $\frac{b\ sol.\ d\ e\ pl.}{d^3}$, quo addito ad $\frac{e\ pl.\ cubum}{d^3}$, nempe cubum ex $\frac{e\ pl.}{d}$, & fiet $\frac{e\ pl.\ cub. + b\ sol.\ d\ e\ pl.}{d^3}$ quod æquabitur z solido.

Hæc operatio exemplis illustratur.

Ductis omnibus in d^3, & e pl. cubus ✠ b sol. d e pl. æquabitur z solido d^3. Itaque

Exemplum alterum.

Sit a^3 ✠ $\frac{b\ sol.\ a}{d}$ æqualis z sol. Supponatur e plannm æquari a ostendendum est e pl. cubum † b sol. d e pl æquari z sol. d^3.

Quoniam e pl. æquatur d a, vtique $\frac{e\ pl.}{d}$ æquabitur a ergo $\frac{e\ pl.\ cubus}{d^3}$ æquabitur a^3 quare $\frac{e\ pl.\ cub.}{d^3}$ ✠ $\frac{b\ sol.\ e\ pl.}{d^2}$ æquabitur z solido; omnibusque ductis in d^3, & e pl. 3 † b sol. e pl. d æquabitur z sol. d^3.

Numeris eadem tractantur.

Proponatur 1 C † $\frac{3}{2}$ R æquari 225. Hæc æquatio per isomoeriam ad hanc reuocabitur 1 C ✠ 6 R = 1800, & quidem huius radix est 12, illius verò 6. Hæc vt melius intelligantur, speciebus numeros aptabimus. Per b sol. intellgamus 3 per d verò 2; per z sol. intelligamus 225, & iuxta speciosam analysin, 1 C ✠ 6 R æquabitur 1800.

Quo-

Quoniam igitur eſt æquatio 1 C † $\frac{3}{2}$ R = 225. Ortum propterea duxit à Paraboliſmo, quare neceſſe eſt aliquando fuiſſe 2 C † 3 R = 450. Itaque erit 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = $\frac{450}{2}$. Cum itaque radix diſtet à cubo per quadratum; propterea quadraticè multiplicetur 2 denominator, & fiet 4, quo multiplicato per 3 numeratorem, fit 12, quo diuiſo per 2 fit 6, radicum numerus pręparatæ æquationis, & quia numerus diſtat à cubo per cubum; ducatur 2 in ſe cubicè, vt fiat 8, quo ducto in 450 fit 3600, quo diuiſo per 2, fit quotiens 1800, & comparationis homegeneum præparatæ, & nouę ęquationis; ergo 1 C † 6 R ęquabitur 1800. *Iſomoerie opus magis explicatur.*

De his autem multa ſcripſimus in Algebra veteri. Huius ęquationis radix eſt 12; Quoniam verò radix pręparatę æquationis ſe habet in hoc exemplo ad primò quęſitam, vt 2 denominator, ad 1, ob id radix primò quęſita erit 6; Diximus autem in Arte veteri de Iſomoeria loquentes, radicem præparatę æquationis diuidendam eſſe per denominatorem. *Auctor hac de re multa ſcripſit in Algebra veteri.*

Hęc vt meliùs intelligantur. Sit ęquatio 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = 225, reſpondens illi a^3 ✠ $\frac{b \text{ ſol.}}{d}$ a = z ſolido. Supponamus d a eſſe e pl. ergo $\frac{e \text{ pl.}}{d}$ erit a, itaque e pl. noua ſcilicet radix, diuiſa per denominatorem fractionis exhibet radicem ęquationis propoſitę; noua verò hæc radix tractetur, vt dicebamus, & innoteſcet radix primò quęſita; prouenit enim e pl. 3 ✠ b ſol. d e pl. = z ſol. d^3. Vnde ſi per e planum, intelligamus ſecundam radicem; manifeſtum eſt huius cubum, vna cum homogeneo ſub eadem radice, & producto abs denominatore in numeratorem ęquari dato comparationis homogeneo ducto in cubum denominatoris, vt Analyticè demonſtratum fuit. *Explicantur numeris, quæ paulo antea tradita ſunt.*

Sit 1 C — $\frac{3}{2}$ R = 5; hoc eſt 1 C — $\frac{3}{2}$ R = $\frac{10}{2}$. Quoniam radix diſtat a cubo per Q; ob id ducatur denominator 2 in ſe quadraticè, & productum 4, ducatur in 3 numeratorem, quod enim prouenit ſi diuidatur per 2 fit quotiens 6, & numerus radicum nouæ ęquationis. Deinde quia numerus diſtat à cubo per C; cubicè ducatur denominator 2 in ſe, vt fiat 8, quo ducto in 10, fit 80, hoc autem diuiſo per 2, fit quotiens 40, & comparationis homogeneum nouę ęquationis, nempe 1 C — 6 R = 40. *Numeris eadem tractantur.*

Redeuntes ad æquationem illam, 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = 225. Iuxta pręſcriptum Speciolæ Logiſtices reduci ad 1 C ✠ 6 R = 1800. Manifeſtè patet, colligitur enim fieri e pl. 3 ✠ b ſol. d e pl. = z ſol. d^3. In allata æquatione b ſol. eſt 3, & z ſol. eſt 225, at verò d eſt 2, igitur, vt ſi ducatur b ſol in d, & fit b ſol. d; quo ducto in e pl. fit b ſol. d e pl. cubus ex e pl. eſt e pl. 3 vnde e^3 b pl. 3 ✠ b ſol. d e pl. facit vnam ęquationis partem; ita ducatur 3 in 2, & fit 6, quo ducto in R fit 6 R, faciet vnam ęquationis partem. Alteram verò conſtituit in ſpecioſa multiplicatio z ſol. in d^3 ita hic ducatur 225 in 8, cubum ex 2, & fit 1800 pro altera æquationis parte. *Fit reditus ad ſuprapoſitam æquationem*

In idem autem recidunt pręcepta tradita. Cum enim fuerit 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = 225, & per primum modum iſomoeriam perficimus; reducimus numerum abſolutum ad fractionem ſic fit 1 C ✠ $\frac{3}{2}$ R = $\frac{450}{2}$. Deinde ducimus quadraticè 2, denominatorem, & productum 4, multiplicamus per numeratorem, productum verò 12, diuidimus per 2, vt proueniat 6; productum enim eſt $\frac{12}{2}$ hoc autem idem eſt, quod 2 denominatorem ducere in 3 numeratorem; idem enim prouenit, & hoc pręcipit pręceptum Analyticum. *Concordantia præceptorum cum ſuprapoſitis.*

Deinde denominatoris cubum 8 ducimus in 450, numeratorem fractionis $\frac{450}{2}$ productum verò 3600, diuidimus per 2, vt fiat 1800 productum enim eſt $\frac{3600}{2}$. Idem eſt autem ducere 225 in 8, cubum ex 2; Quod pręceptum analyticum iubet. *Explicationis continuatio.*

Primus igitur Iſomoerię modus hinc facile demonſtratur, & inde quoque ſecunda methodus oſtendi poteſt.

Proponatur 1 C ✠ $\frac{9 R}{4}$ ęquari 530, & 1 C ✠ 36 R, ęquabitur 33920. *Proponitur æquatio.*

Ducatur 1 C in 4, fit 4 C huius cubus 64 ſi diuidatur per 64 cubum ex 4, denominatore, prouenit 1 C. Deinde 9 R ducantur in 16, quadratum ex 4 denominatore, & fiunt 144 quibus diuiſis per 4; fit 36, vnde 36 R. Demum 530, comparationis homogeneum ducatur in 64 cubum ex 4 denominatore, & producetur 33920.

Per diuisionẽ hæc operatio perficitur.

Et quidem per diuisionem perficitur hęc operatio; si inueniatur numerus, qui diuidi possit absque fractione per omnes denominatores æquationis propositæ; mox verò multiplicetur per illum, numerus illius gradus, qui proximus est ad potestatem; per quadratum illius, numerus sequentis gradus; per cubum numerus tertij gradus, & ita deinceps, donec ad comparationis homogeneum deueniatur; quoniam verò hisce multiplicationibus valor radicis æquationis propositæ augetur: numerus, qui inuenitur pro valore radicis nouæ æquationis diuisus per numerum illum inuentum, dabit valorem radicis æquationis propositæ.

Hoc idem assequemur, omnes æquationis partes disponendo secundùm graduum parodicorum seriem, additis numeralibus circulis, vbi series interrupta fuerit, collocata autem vnitate sub potestate, communique denominatore sub proximo inferiori gradu, continuetur series continuè proportionalium vsque ad vltimam partem, quæ homogeneum est comparationis, qui quidem numeri sunt quæsiti multiplicatores ad euitandas fractiones, vel sunt diuisores, quibus æquatio in minores numeros redigitur.

Multa de hac methodo scripsit Auctor in prima parte.

Sed de hac methodo videnda sunt, quę scripsimus in prima huius Operis parte, dum de Isomoeria tractaremus, & aliqua exempla paulò infra nos afferemus in medium.

Alia proponitur æquatio emendanda.

Proponatur a^3 + $\frac{b\ sol.\ e}{4}$ æquari $\frac{z\ pl.\ pl.}{4}$, certè e plani-cubus + b sol. d e pl. æquabitur z pl.pl. d^3; propterea quòd d a esto e pl., ergo $\frac{e\ pl.}{d}$ erit a, quare $\frac{e\ plani\text{-}cubus}{d^3}$ + $\frac{b\ sol.\ d\ e\ pl.}{d^3}$ æquabitur $\frac{z\ pl.\ pl.}{4}$. Omnibus autem applicatis ad d^3, proueniet æquatio vt supra, e plani-cubus + b sol. d e pl. = z pl.pl. d^3; Si namque ducatur $\frac{z\ pl.\ pl.}{4}$ per d^3, fiet productum z pl.pl. d^3.

Eadem numeris tractantur

Proponatur 1 C + $\frac{3}{2}$ R æquari $\frac{265}{2}$, per Isomoeriam 1 C † 6 R æquabitur 1060; sitque 1 R 10, quare prioris æquationis radix erit 5; etenim si 1, numerus cuborum ducatur in 2 denominatorem, fit 2, cuius cubus est 8, quo diuiso per 8 cubum denominatoris, prosilit in quotiente 1, & erit 1 C. Deinde 4 denominatoris quadratum ducatur in 3 numeratorem, & producetur 12, quo diuiso per 2, fit 6; eritque numerus radicum. Demum si multiplicetur 265 per 8 cubum denominatoris, producetur 2120, quo diuiso per 2, fit 1060.

Exemplum alterum.

Proponatur 1 C † $\frac{9}{4}$ R æquari $\frac{545}{4}$; etiam 1 C † 36 R æquabitur 8720; huius autem æquationis radix est 20; ob id primùm propositæ erit 5; diuidi enim debet hæc per denominatorem fractionis, nempe per 4, & quidem radix distat à cubo per Q; quare 4 denominator in se quadraticè ducatur, vt fiat 16, quo ducto in 9, numeratorem, fit 144, hoc autem diuiso per eundem denominatorem 4, fit quotiens 36, & numerus radicum nouæ ęquationis; & 545; ducatur in 64 cubum ex 4, productum 34880 diuidatur per 4, prosilit 8720 pro comparationis homogeneo nouæ æquationis.

Æquatio cubica emendanda.

Proponatur a^3 + $\frac{b\ pl.\ a\ a}{2}$ æquari z solido. Sit e pl. æquale d a, & e pl. 3 † b pl. e pl. 2 ęquabitur z sol. d^3.

Proponatur 1 C † $\frac{3}{2}$ Q æquari 270, ergo 1 C † 3 Q æquabitur 2160.

Huius æquationis radix est 12; ergo illius est 6. Quadratum distat à cubo per radicem, quare ducatur 2, denominator in 3, numeratorem, & productum 6, diuidatur per eundem 2, & prouenit 3, vnde idem numerus quadratorum est retinendus, & quia numerus distat à cubo per cubum, ob id cubicè multiplicetur 2, & fit 8, numerus autem 270, ad fractionem reductus, vt denominator sit 2, erit $\frac{540}{2}$, & 540 ducto in 8, fit 4320, quo diuiso per eundem 2, fit quotiens 2160, & comparationis homogeneum nouæ æquationis.

Idem contingit, cùm varij sunt denominatores fractionum.

Hinc autem obserua, idem euenturum, si alia sit denominatio fractionis ipsius comparationis homogenei, vnde si foret 1 C + $\frac{3}{2}$ Q = $\frac{1620}{6}$, consideremus eodem modo numerum distare à cubo per cubum; ob id fractio $\frac{1620}{6}$ reuocetur ad $\frac{540}{2}$; & 2 cubicè multiplicetur, fitque 8, quo ducto in 540, fit 4320, quo diuiso per 2 fit 2160, ergo 1 C † 3 Q æquabitur 2160; huius radix est 12, illius igitur 6.

Exemplum alterum.

Proponatur a^3 + $\frac{b\ pl.\ a\ a}{2}$ æquari $\frac{z\ pl.\ plano}{4}$, & e pl. 3 † b pl. e pl. 2 æquabitur z pl. pl. d^3.

Si 1 C † $\frac{3}{2}$ Q ęquetur $\frac{325}{2}$; per Isomoeriam 1 C † 3 Q æquabitur 1300. Huius

ęqua-

æquationis radix eſt 10, ergo illius eſt 5, quoniam enim Q diſtat à C per R, propterea, &c.

Proponitur æquatio cubica numeroſa emēdanda.

Et ſi 1 C + $\frac{7}{3}$ Q ęquetur $\frac{550}{3}$ etiam 1 C + 7 Q ęquabitur 4950. Huius æquationis radix eſt 15; Illius igitur erit 5.

Æquatio cubica ſpecioſa fractionum vitio laborans.

Proponatur a³ + $\frac{b\ sol.\ a}{d}$ æquari $\frac{z\ pl.\ sol.}{h\ pl.}$; d h pl. a eſto e pl.pl. ergo e pl.pl. 3 † b ſol. d h pl.pl. e pl.pl. ęquabitur z pl. ſolido d³ h pl.pl. Cum enim d h pl. a ęquetur e pl.pl. ergo $\frac{e\ pl.pl.}{d\ h\ pl.}$ ęquabitur a; quare e pl.pl. 3 $\frac{+\ d\ h\ pl.pl.\ b\ sol.\ e\ pl.pl.}{d^3\ h\ pl.\ pl.\ pl.}$ ęquabitur $\frac{z\ pl.\ sol.}{h\ pl.}$ omnibus ductis in d³ h pl.pl.pl., & e pl.pl. 3 + b ſol. d h pl.pl. e pl. pl. æquabitur z pl. ſol. d³ h pl.pl.

Numeris eadē æquatio tractantur.

Si 1 C + $\frac{11}{12}$ R æquetur $\frac{19}{4}$ ergo per Iſomoeriam 1 C + 2112 R, æquabitur 525312, huius radix eſt 72, & illius erit 1 $\frac{1}{2}$. Ita Vieta.

Sed hoc per normam ſpecioſam deduxit. Verùm, vt alibi notauimus, iuuat ad primęuam ęquationem recurrere; eſt enim hęc oriunda ab illa 12 C + 11 R = 57. Vnde inſtituto paraboliſmo, fit 1 C + $\frac{11}{12}$ R = $\frac{19}{4}$ ſeu quod idem eſt 1 C + $\frac{11}{12}$ R = $\frac{57}{12}$.

Explicatio.

Perpendamus autem radicem à cubo diſtare per quadratum, quare 12 denominator quadraticè in ſe ducatur, proueniet autem 144, quo multiplicato per 11, producitur 1584, quo diuiſo per 12 denominatorem eundem, prouenit 132, pro numero radicum nouæ ęquationis. Deinde ducatur 1728, cubus ex 12 in 57, numeratorem comparationis homogenei, & fiet 98496, quo diuiuiſo per 12, fit quotiens 8208, comparationis homogeneum nouæ ęquationis 1 C + 132 R = 8208. Huius ęquationis radix eſt 18, quo diuiſo per 12, denominatorem, fit quotiens 1 $\frac{1}{2}$ pro radice æquationis propoſitę.

Alia methodus explicatur.

Alia autem methodo, hunc in modum. Communis diuiduus numerus, ſit 24, qui nempe ſine fractionibus diuidi poteſt per denominatores fractionum ęquationis propoſitę, fiat autem 1, primus terminus, ſintque continuè proportionales 1. 24. 576. 13824. diſpoſiti ſub æquationis membris, vt a latere cernitur; ducantur autem numeri graduum parodicorum, in ſibi ſubditos, ac reſpondentes numeros, nempe $\frac{11}{12}$ per 576, fit 528, inſuper $\frac{19}{4}$ per 13824, fitque 65664.

1 C + o Q + $\frac{11}{12}$ R = $\frac{19}{4}$.			
1.	24.	576	13824.
		528	65664.

Itaque erit æquatio 1 C + 528 R = 65664; productum enim ex numero radicum, in ſibi numerum reſpondentem è quatuor proportionalibus, eſt numerus radicum nouæ, præparatæque æquationis, & productum ex comparationis homogeneo in ſibi reſpondentem, è quatuor proportionalibus, eſt comparationis homogeneum nouæ æquationis. Huius verò æquationis pręparatæ radix eſt 36, quæ ſi diuidatur per 24 communem diuiduum fit quotiens, 1 $\frac{1}{2}$, & radix æquationis propoſitę.

Quando ſecundus terminus deeſt.

Obſerua, cum ſecundus æquationis terminus deſit, hoc eſt terminus, Q qui proximè cubo ſuccedit, deſſideratur, ſuppleri per cifram, &c.

Quando in æquatione ſunt magnitudines aſymmetræ qua via procedendum.

Si verò contingat, vt in æquatione ſint magnitudines aſymmetræ. Ita procedendum.

Sit æquatio 14 R — 1 C = 1288; fieri debet metatheſis vt proueniat — 1 C + o Q + 14 R = ℞ 288, & ſub ſingulis membris diſponantur numeri continuè proportionales, & ad euitandam aſymmetriam comparationis homogenei, puta ℞ 288, multiplicari, vel diuidi debet per aliquem numerum, qui reddat rationalem; huiuſmodi eſſe poteſt ℞ 8; nam diuidens ℞ 288 dat ℞ 36, hoc eſt 6; erunt igitur proportionales 1; ℞ 2; 2; ℞ 8 per quos diuiſis numeris æquationis, proueniet 7, & 6.

— 1 C + o Q † 14 R = ℞ 288.			
1.	℞ 2.	2.	℞ 8.
		7.	6.

Si enim 14, diuidatur per 2 fit

 quo-

quotiens 7, si diuidatur ℞ 288 per ℞ 8, fit quotiens ℞ 36, vt dixi, hoc est 6. Vnde proueniet æquatio — 1 C † 7 R ⊏ 6, seu 7 R — 1 C ⊏ 6. Huius radix est 1; vel 2; qui multiplicati per numerum assumptum ℞ 2, dabunt ℞ 2, & ℞ 8; propositę igitur æquationis radices sunt ℞ 2, & ℞ 8.

Quando operatio diuisione perficitur.

Cùm autem diuisione operatio perficitur, coefficientes longitudines applicantur ad radices coefficientis planę, & homogeneę datę mensuræ, solidæ ad cubos, & ita deinceps; quod verò ab huiusmodi oritur applicatione radicis ad ipsum communem diuisorem, est radix æqualitatis præparatæ, nouęque æquationis.

Exemplum.

Proponatur e pl. 3 † d g e pl. 2 † b pl. d^2 e pl. æquari z sol. d^3. $\frac{e\ pl.}{d}$ esto a; ergo d a erit e pl., quod facilè ex supradictis deducitur. Cùm igitur d a sit e planum; certè d^3 a^3 † g d d^2 a^2 † b pl. d^2 d a, æquabitur z sol. d^3. Omnibus verò diuisis per d^3, hoc est vtraque æquationis parte diuisa per d^3, & a^3 † g a^2 ✠ b pl. a æquabitur z solido.

Numeris eadem exhibentur.

Si 1 C † 12 Q † 8 R ęquetur 2280; huius æquationis radix est 10; Omnibus diuisis per 2; & 1 C † $\frac{12}{2}$ Q † $\frac{8}{4}$ R ęquabitur $\frac{2280}{8}$; fitque 1 R $\frac{10}{2}$, hoc est 5, sublatis fractionibus, ad hanc reuocabitur 1 C † 6 Q † 2 R ⊏ 285.

Rursus eadem numeris tractantur.

Si 1 C † 12 Q ✠ 8 R æquetur 696, & 1 C † 6 Q † 2 R æquabitur 87. Illius ęquationis radix est 6, huius verò est 3.

Quando potestates non sunt affectæ.

Si verò potestates non sint affectæ. Vt si 1 C æquetur 1728, radix cubica est 12, & 1 C æquabitur $\frac{1728}{216}$, & radix est $\frac{12}{6}$, hoc est 1 C æquabitur 8; fitque 1 R; 2. Numeri enim 1728, & radix cubica est 12, numeri 216 est 6.

Si 1 C æquetur 512, fit 1 R, 8, & 1 C æquabitur $\frac{512}{64}$; fitque 1 R $\frac{8}{4}$, hoc est 1 C æquabitur 8, fitque 1 R 2.

Symmetricus climactismus qua Arte perficiatur. Quando asymmetria fuerit in planitie.

Plurimùm vexat animum operantis numerorum asymmetria, quam is tamen euitare studet beneficio symmetricæ climactismi; est autem hæc operatio species quædam ascensus climactici; est autem regularis, cùm vtraque pars æquationis ducatur quadraticè, vel cubicè, hoc est climacticè attollitur; quadratica, cùm quadraticè, cubica cùm cubicè, &c. eoque ordine deinceps, secundùm potestatum gradus. Quod in hac pragmatia contingit,

Æquatio proponitur asymmetriæ vitio laborans, & qua arte sit liberanda

Proponatur a^3 — b pl. a æquari ℞ z sol.solido. Si hanc æquationem ab asymmetria, qua laborat, liberare velimus; quandoquidem asymmetria est in planitie; propterea sunt omnia quadraticè multiplicanda. Quadratum autem ab a^3 — b pl. a, est a^6 ✠ b pl.pl. a^2 — 2 b pl. a^4. Sed quadratum ex ℞ z sol.sol., est z sol.sol., ergo erit æquatio huiusmodi a^6 † b pl.pl. a^2 — 2 b pl. a^4 ⊏ z sol.solido.

Numeris eadẽ tractantur.

Hæc verò numeris perspicua fient, 1 C — 2 R æquetur ℞ 1200. Quadrentur omnia, & fiet æquatio huiusmodi 1 C ✠ 4 Q — 4 Q Q ⊏ 1200; quæ reducetur ad hanc 1 C C ✠ 4 R — 4 Q Q ⊏ 1200.

Huius ęquationis radix est 12, quadratum, radicis, de qua quæritur.

Supradictorũ declaratio.

Hæc declarari possunt hoc pacto. Si 1 R valor est ℞ 12, cubus valebit ℞ 1728; & 2 R valebunt ℞ 48. Si à ℞ 1728 auferamus ℞ 48, remanebit 1200. Etenim communis diuisor est 12, qui diuidens 1728, facit quotientem 144; diuidens 48, facit quotientem 4, horum latera sunt 12, & 2, quorum differentia est 10, cuius quadratum est 100, quo ducto in 12, communem diuisorem, producitur 1200, cuius radix est ℞ 1200, quæ est differentia inter ℞ 1728, & ℞ 48.

Exemplum.

Si 1 C — 2 R æquetur ℞ 3. Quadrentur omnia, & fiet 1 C † 4 R — 4 Q ⊏ 3. Huius æquationis radix est 3, nimirum quadratum quæsitæ radicis; fit ob id quęsita radix ℞ 3, & ita est; siquidem si 1 R, valet ℞ 3; vtique 1 C valebit ℞ 27, & 2 R, valebunt ℞ 12, differentia inter ℞ 27, & ℞ 12, est ℞ 3, & hoc quantùm ad primam æquationem. Ad aliam, quod attinet. Si 1 R valet 3, 1 C valebit 27, & 4 R, valebunt 12; quorum summa est 39, & 4 Q valebunt 36; differentia verò inter 39, & 36 est 3.

Rursus eadem tractantur, asymmetria cũ fuerit in soliditate.

Proponatur a^3 — ℞ C b sol.sol. a, æquari z solido, & sit æqualitas expurganda ab asymmetria, qua ipsa laborat, est hęc autem nempe asymmetria in soliditate; per ea, quę proponuntur, adhibita metathesi, factoque parabolismo; $\frac{a^3 - z\ sol.}{a}$ æquabitur ℞ C b sol.solido. Omnia cubicè ducantur; $\frac{a^9 - 3\ z\ sol.\ a^6 + 3\ z\ sol.sol.\ a^3 - z\ sol.sol.sol.}{a^3}$ æquabitur b solido

ſolidoſolido; Omnibus ductis in a^3, & ſecundùm Artem ordinatis a^9 — 3 z ſol. a^6 † 3 z ſol.ſol. — b ſol.ſol. a^3 æquabitnr z ſol.ſol.ſolido.

Si 1 C — ℞ C 18 R æquetur 6, & 1 C — 18 Q ✠ 90 R æquabitur 216; ſitque 1 R 12, cubus radicis quæſitæ. Etenim ſi 1 R valor eſt 12; certè 1 C valebit 1728, & 18 Q valebunr 2592. Demum 90 R valebunt 1080, at verò ad 1728, addito 1080, fiet ſumma 2808, à qua ſi auferatur 2592; & remanebit 216. *Exemplum ad idem.*

Si 1 C — ℞ C 18 R æquetur 6, adhibita metatheſi $\frac{1C-6}{1R}$ æquabitur ℞ C 18, vtraque æquationis pars cubicè ducatur, & quidem illa $\frac{1C-6}{1R}$ cubicè ducta facit hoc productum $\frac{1CCC-18CC+108C-216}{1C}$; ſi verò cubicè ducatur ℞ C 18, fiet 18; vtraque pars ducatur in 1 C, & fiet 1 C C C — 18 C C † 108 C — 216 = 18 C; quæ ſi ordinetur, ad hanc reuocabitur 1 C C C — 18 C C † 90 C = 216, atque demum 1 C — 18 Q ✠ 90 R æquabitur 216. *Rurſus eadẽ explicantur exemplis.*

Cæterùm oportet cautum eſſe Artificem in hac pragmatia, quando ſcilicet æquationes ad altiſſimos gradus aſcendunt, non enim ſine magno errandi periculo perfici poteſt; quod etiam in prima huius Operis parte, nos adnotauimus. *Artificis cautela in operando.*

Quoniam verò plurimùm obeſt reſolutioni nimia elatio poteſtatis; opportunum propterea videbatur difficultati aliquo præſidio occurrere, huiuſmodi quidem eſt climactica parapleroſis, nempe ſcalare ſupplementum, eſtque ſpecies quædam irregularis deſcenſus; hac autem induſtria quadratoquadraticas æquationes ad quadraticas per medium cubicarum à radice plana, imò etiam cubocubicas, & exinde per binos alternos gradus climacticos, deprimere licet. *Climactica paraplerosis qua arte ſit inſtituenda.*

Quo verò pacto hæc perficienda ſint, paucis aperiemus.

Proponatur a^4 ✠ b ſol. a æquari z planoplano. Oporteat autem hanc per medium cubicæ æquationis à radice plana ad quadraticam deprimere. *Proponitur æquatio emendanda per climacticã paraplerosin.*

Quoniam igitur a^4 ✠ b ſol. a æquatur z planoplano; per antitheſin a^4 æquabitur z planoplano — b ſol. a, vtrique parti æquationis addatur a^2 e^2 † $\frac{1}{4}$ e^4, & hoc eſt illud ſupplementum, quod climactica parapleroſis importat; ergo a^4 ✠ a^2 e^2 † $\frac{1}{4}$ e^4 æquabitur z pl.pl. — b ſol. a ✠ a^2 e^2 ✠ $\frac{1}{4}$ e^4. Diuidantur omnia ſubquadraticè; & illic orietur a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ e^2, ſi enim a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2, ducatur in ſe quadraticè, producetur a^4 † a^2 e^2 † $\frac{1}{4}$ e^4. At verò ad a^4, fuerunt addita in ſupplementum, duo illa planoplana a^2 e^2, & $\frac{1}{4}$ e^4, quæ alioquin deficiebat à canonica quadrati geneſi inſtituta à duabus radicibus planis. Quod ſi altera æqualitatis pars, nempe z pl.pl. — b ſol. a † a^2 e^2 † $\frac{1}{4}$ e^4 ſubquadraticè diuidi poſſet, quotiens emergens æquaretur a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2.* Propterea opus eſt effingere quadratum à radice plana, cui altera illa æqualitatis pars commodè poſſit comparari, vt ei denique radici planę æquetur a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2. Quod ergo quadratum effingimus eſto abs $\frac{b\ ſol.}{2e}$ — e a, cuius quadratum eſt $\frac{b\ ſol.ſol.}{4e^2}$ † e^2 a^2 — b ſol. a ęquandum z pl.pl. — b ſol. a † e^2 a^2 † $\frac{1}{4}$ e^4. Deletis porro affectionibus vtrinque, e^2 a^2 — b ſol. a, omnibuſque in 4 e^2 ductis, & e^6 † 4 z pl.pl. e^2 æquabitur b ſol.ſol. Innoteſcat autem e^2 eſſe d^2, & $\frac{b\ ſol.}{2d}$ — d a æquabitur a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ d^2, & ordinata ęqualitate ſecundùm Artem; a^2 ✠ d a æquabitur $\frac{b\ ſol.}{2d}$ — $\frac{1}{2}$ d^2.

** Si enim quadrata ſunt æqualia, etiam latera æqualia erunt.*

Hucuſque de ęquatione cataphatica; ſi verò extiterit apophatica; vt ſi a^4 — b ſol. a ęquetur z planoplano. Radix plana effingendi quadrati ſtatuetur $\frac{b\ ſol.}{2e}$ ✠ e a comparanda ipſi a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ e^2.

Quod in æqualitate negata inuersè conuertendo, & ſub contraria affectionis nota arguendo, contingit. *Cum æquatio fuerit negata inuerſa, &c.*

A^4† bſol. a ęquetur z pl.pl., & $\frac{b\ ſol.}{2e}$ — e a æquetur a^2 † $\frac{1}{2}$ e^2. Oſtendendum eſt e^6 ✠ 4 z pl.pl. e^2 ęquari b ſol. 2. Quoniam enim a^4 ✣ b ſol. a ęquatur z pl.pl., ergo a^4 æquabitur z pl.pl. — b ſol. a; commune addatur a^2 e^2 † $\frac{1}{4}$ e^4, & a^4 † a^2 e^2 ✠ $\frac{1}{4}$ e^4 æquabitur z pl.pl. — b ſol. a † a^2 e^2 ✠ $\frac{1}{4}$ e^4. At quadratum ex a^2 ✠ $\frac{1}{2}$ e^2 eſt a^4 ✣ a^2 e^2 ✣ $\frac{1}{4}$ e^4, & quadratum ex $\frac{b\ ſol.}{2e}$ — e a, eſt $\frac{b\ ſol.\ 2}{4e^2}$ ✣ e^2 a^2 — b ſol. a, eſt verò ex hypotheſi $\frac{b\ ſol.}{2e}$ — e a ęquale a^2 ✣ $\frac{1}{2}$ e^2;* quare $\frac{b\ ſol.\ 2}{4e^2}$ ✠ e^2 a^2 — b ſol. a ęquabitur z pl.pl. — b ſol. a ✣ a^2 e^2 ✣ $\frac{1}{4}$ e^4, & $\frac{b\ ſol.\ 2}{4e^2}$ æquabitur z pl.pl. † $\frac{1}{4}$ e^4; quamobrem b ſol. 2 æquabitur 4 z pl.pl. e^2 † e^6. *Demonſtratio ſupradictorum*

** Si enim latera etiam quadrata ſunt æqualia; & quæ vni æquantur inter ſe æqualia ſunt.*

Si a^4 — b ſol. a æquetur z pl.plano ex hypotheſi, quod $\frac{b\ ſol.}{2e}$ — $\frac{1}{2}$ e^2 ęquetur

tur $a^2 - e a$, & $e^6 + 4$ z pl.pl. e^2 æquatur b sol. 2 Innotescat autem e esse d, & a^2 † d a æquabitur $\frac{b\ sol.}{2d} - \frac{1}{2} d^4$.

Æquatio quadratoquadratica emendanda. Si b sol.a $- a^4$ æquetur z pl.pl. ex hypothesi, quod $\frac{1}{2} e^2 - \frac{b\ sol.}{2e}$ æquetur e a $- a^2$, & $e^6 - 4$ z pl.pl. e^2 æquetur b sol. 2. Innotescat e esse d, & d a $- a^2$ æquabitur $\frac{1}{2} d^2 - \frac{b\ sol.}{2d}$.

Ita etiam hoc artificio æqualitatem quadratoquadrati affecti sub cubo per medium cubicæ radicem habentis planam, ad quadraticam deprimere licet. Vt si $a^4 + 2$ b a^3 æquetur z planoplano.

Insuper æqualitas quadratoquadrati affecti tam sub latere quam quadrato per medium cubicę radicem habentis planam, ad quadraticam deprimitur. Vt si a^4 † 2 g pl. $a^2 +$ b sol. a ęquetur z pl.plano, de quibus consulendus Vieta; multa enim dicenda hac in re, vt & in cæteris superessent; sed opus nimium excresceret quare breuitati studentes ea cogimur silentio præterire.

De duplicata hypostasi suscipitur tractandum. Superest differendum de methodo, qua æquationes cubicæ deprimuntur ad quadraticas à radice solida, vt initio monuimus; diciturque duplicata hypostasis.

Quomodo transmutetur cubus affectus sub latere. Si itaque hac transmutatione cubum affectum sub latere affirmatè ad quadratum, radicem solidam habens, idemque affectum reducere sit iniunctum, sic procedendum.

Proponatur $a^3 + 3$ b pl. a æquari 2 z sol. sitque propositum facere, quod iniungitur, $e^2 +$ a e æquetur b pl., igitur b pl. ex huiusmodi constitutione intelligendum est rectangulum sub duobus lateribus, quorum minus est e, maius autem a. Quoniam verò $e^2 +$ a e supponitur æquari b pl. propterea a e æquabitur b plano $- e^2$, atque adeo $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$ equabitur a; propterea $\frac{b\ pl.\ pl.\ pl. - 3 e^2\ b\ pl.\ pl. + 3 e^4\ b\ pl. - e^6}{e^3} + \frac{3\ b\ pl.\ pl. - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$ æquabitur 2 z sol. Omnibus verò ductis per e^3, & secundùm Artem dispositis, e cubiquadratum + 2 z sol. e^3 ęquabitur b planicubo. Sic autem hęc demonstrabimus, supponamus $a^3 + 3$ b pl. a ęquari 2 z sol., & $e^2 +$ a e ęquari b pl. Si autem iniunctum ostendere e^6 † 2 z sol. e^3 æquari b plano 3. Quoniam igitur $e^2 +$ a e æquatur b plano, propterea a e æquabitur b pl. $- e^2$; atque adeo a ęquabitur $\frac{b\ pl. - e^2}{e}$; ergo, & eorum cubi æquales erunt, quare a^3 æquabitur $\frac{b\ pl.\ 3 - 3\ b\ pl.\ 2\ e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3}$; ac proinde $a^3 + 3$ b pl. a æquabitur $\frac{b\ pl.\ 3 - 3\ b\ pl.\ 2\ e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3} + \frac{3\ b\ pl.\ 2 - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$. Nam $\frac{3\ b\ pl.\ 2 - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$ æquiualet 3 b pl. a, æqualia verò si æqualibus addantur, orta sunt æqulia. Atque adeo 2 z sol. æquabitur $\frac{b\ pl.\ 3 - 3\ b\ pl.\ 2\ e^2 + 3\ b\ pl.\ e^4 - e^6}{e^3} + \frac{3\ b\ pl.\ 2 - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$. Nam $a^3 + 3$ b pl. a æquabatur 2 z solido. Omnibus ductis in e^3, & 2 z sol. e^3 æquabitur b pl. 3 $- 3\ b^2 e^2 + 3$ b pl. $e^4 - e^6 + 3$ b pl. 2 $e^2 - 3$ b pl. e^4; ac proinde, $e^6 + 2$ z sol. e^3 æquabitur b pl. 3; eadem enim homogenea affecta signis †, & − se mutuò interimunt.

Proponitur æquatio cubica. Quòd si $a^3 + 3$ b pl. a æquetur 2 z sol. ex hypothesi, quòd $e^2 -$ a e æquetur b pl., & $e^6 - 2$ z sol. e^3 æquabitur b pl. 3.

Præterea si $a^3 - 3$ b pl. a æquetur 2 z sol. ex hypothesi, quod a e $- e^2$ æquetur b pl., cedat autem b pl. 3, cedat inquam z sol. 2, & 2 z sol. $e^3 - e^6$ æquabitur b pl. 3.

Alia æquatio proponitur transmutanda hoc eodem artificio. Licet etiam hac eadem transmutationis specie illud absoluere, nimirum cubum affectum sub latere negatè ad quadratum sub radice solida negatum de plano reducere; si tamen cubus è triente coefficientis affectionis cedat solidi comparationis subquadruploquadrato; quamobrem.

Si $a^3 - 3$ b pl. a ęquetur 2 z sol., sitque perficiendum, quod iniungitur, & a e $- e^2$ æquetur b pl., tunc enim b pl. iuxta huiusmodi ęquationis constitutionem intelligitur rectangulum sub duobus lateribus, quorum siue maius, siue minus est e; summa verò est a; itaque $\frac{b\ pl. + e^2}{e}$ æquabitur a. Nec dissimili ratiocinatione ab ea, qua superiùs vsi sumus, concludemus $\frac{b\ pl.\ pl.\ pl. + 3 e^2\ b\ pl.\ pl. + 3 e^4\ b\ pl. - e^6}{e^3} - \frac{3\ b\ pl.\ pl. - 3\ b\ pl.\ e^2}{e}$ æquabitur 2 z sol. Omnibus verò ductis in e^3, & 2 z sol. $e^3 -$ e cubiquadrato ęquabitur b planicubo.

De his consulendus Vieta. Auctor multa causa breuitatis ommittit. De his consulendus Vieta, multa quidem superessent dicenda, sed studio breuitatis præstabit ommittere.

Quomodo æquationes præparentur, vt coefficientes, & comparationis homogenea, sint quæ præscribuntur. Non raró expedit sic æquationes præparare, vt subgraduales coefficientes, vel comparationum homogenea sint, quæ præscribuntur; propterea iuuabit nonnulla subijcere; vnde hæc pragmatia innotescat.

Propo-

Proponitur exemplum quādo coefficiens subgradualis debet esse, qua præscribitur.

Proponatur $a^3 + b\,a^2$ æquari z sol. Oporteat verò æquationem ita transmutare, vt affectio sit sub eodem gradu parodico, nempe quadrato, eademque retineatur affirmationis nota, coefficiens tamen subquadratica varietur ad libitum, eaque sit d, sit autem vt b ad d; ita a ad e; ergo $\frac{be}{d}$ æquabitur a, & secundùm ea, quæ proponuntur $\frac{b^3e^3}{d^3} + \frac{b^3e^2}{d^2}$ æquabitur z sol. Omnibus verò ductis in d^3, & applicatis ad b^3, necessariò $e^3 + d\,e^2$ æquabitur $\frac{d^3 z\,sol}{b^3}$; vnde demonstrandum est: Si fuerit $a^3 + b\,a^2 = z$ sol., & ad arbitrium accepta sit d pro coefficiente; sitque vt b ad d, ita a ad e; Ostendendum est inquam $e^3 + d\,e^2$ æquari $\frac{z\,sol.\,d^3}{b^3}$.

Explicatio.

Quoniam igitur est vt b ad d, ita a ad e; propterea b e æquabitur d a; ergo $\frac{be}{d}$ æquabitur a; quamobrem & eorum quadrata æqualia erunt; propterea $\frac{b^2e^2}{d^2}$ æquabitur a^2; & eorum cubi æquales erunt; ob id $\frac{b^3e^3}{d^3}$ æquabitur a^3. Quoniam verò a^2 æquabatur $\frac{b^2e^2}{d^2}$; afficiens homogeneum erat $b\,a^2$, ducatur b in $\frac{b^2e^2}{d^2}$, vt fiat $\frac{b^3e^2}{d^2}$: erat autem $a^3 + b\,a^2 = z$ sol., propterea $\frac{b^3e^3}{d^3} + \frac{b^3e^2}{d^2}$ æquabitur z sol. Omnibus verò ductis in d^3, & $b^3 e^3 + b^3\,d\,e^2$ æquabitur z sol. d^3. Omnibus autem applicatis ad b^3, & $e^3 + d\,e^2$ æquabitur $\frac{z\,sol.\,d^3}{b^3}$.

Numeris eadem tractantur.

Numeris autem hæc facilè aptari possunt. Supponamus 1 C + 6 Q æquari 896, cuius radix est 8. Vt autem est 6, numerus quadratorum, ad 12, arbitrarium, ita 8, radicis pretium ad 16, erit propterea 1 C + 12 Q = $\frac{1548288}{216}$, cuius radix est 16, numerus quartus proportionalis, in suprapositο analogismo.

Exemplum alterum.

Proponatur $a^3 - b^2 a$ æquari z solido. Sitque transmutanda æquatio, vt eodem gradu parodico retento, eademque affectionis nota seruata, varietur coefficiens planum sublaterale, itaut illud sit d^2; sit igitur vt b^2 ad d^2, ita a^2 ad e^2; atque adeo vt b ad d, ita a, ad e; ergo $\frac{be}{d}$ æquabitur a.

Quamobrem secundùm ea, quæ proponuntur $\frac{b^3e^3}{d^3} - \frac{b^3e}{d}$ æquabitur z solido. Omnibus autem ductis in d^3, & per b^3 diuisis e^3; $- d^2 e$ æquabitur $\frac{d^3 z\,sol.}{b^3}$.

Numeris eadem explicantur.

1 C — 4 R æquetur 480, cuius radix est 8, vt 2, numeri radicum radix, ad 3, arbitrarium; ita 8, radix propositæ æquationis ad 12; propterea 1 C — 9 R æquabitur 1620, cuius radix est 12, numerus quartus proportionalis in suprapositò analogismo; est autem 9, quadratum ex 3; &c.

Cautela obseruanda.

Cautè procedendum tamen, quia sæpe accidit subductionem fieri non posse; vnde Problema determinatione eget.

Exemplum quando comparationis homogeneum debet esse quod præscribitur.

Proponatur $a^3 +$ b pl. a æquari z^3, & oporteat retento eodem gradu parodico, & eadem affectionis nota, comparationis homogeneum variare, itaut illud sit d^3. Fiat igitur, vt z ad d; ita a ad e. Nam $\frac{ze}{d}$ æquabitur a, quamobrem $\frac{z^3e^3}{d^3} + \frac{b\,pl.\,z\,e}{d}$ æquabitur z^3, omnibus autem in d^3 ductis, & per z^3 diuisis, & $e^3 + \frac{b\,pl.\,d^2 e}{z^2}$ æquabitur d^3.

Numeris eadem explicantur.

Si 1 C + 38 R æquetur 216, cuius radix est 4; fiat autem vt 6, latus cubicum numeri 216, ad 12, arbitrarium, ita 4, radix æquationis propositæ, ad 8, erit 1 C + $\frac{2432}{16}$ R seu 152 R æqualis 1728, cuius æquationis radix est 8, quartus proportionalis in suprapositο analogismos. De hac autem transmutationis specie paulò infra sermo redibit.

Numeri quo pacto in numeros decimarū transmutentur.

Numeros decimarum plerumque nos in æquationibus desideramus, vt scilicet illi, quos in his adhibemus, in decimarum numeros transmutentur. Et quia de numeris agitur; liberum est speciem adhibere, cui aliæ comparatæ homogeneæ non sint, propterea quod numeri vel actu, vel potentia homogenei sunt; cùm vnitas naturæ similitudinem largiatur.

Exemplum.

Proponatur $a^2 + a\,b$ æquari z. Supponamus d æquari 10, vel 100, &c. Supponamus deinde e æquari a d: ostendendum est $e^2 + e\,b\,d$ æquari z d^2. Quoniam enim a d æquatur e, ergo $\frac{e}{d}$ æquabitur a; quare eorum quadrata æqualia erunt; ob id $\frac{e^2}{d^2}$ æquabitur a^2; ergo $\frac{eb}{d}$ æquabitur a b; propterea $a^2 +$ a b æquabitur $\frac{e^2}{d^2} + \frac{eb}{d}$; ergo cùm $a^2 +$ a b æquaretur z, sequitur $\frac{e^2}{d^2} + \frac{eb}{d}$ æquari z, ac ob id omnibus ductis in d^2, & $e^2 + e\,b\,d$ æquabitur z d^2.

Numeris eadem explicantur.

Proponatur 1 Q + 12 R = 64, cuius radix est 4. Supponamus 1 A æquari 10 R, & 1 A Q + 120 A æquabitur 6400. Et ita res se habet, nam cùm 1 R valeat 4, propterea 10 R valebunt 40, cùmque 1 A, æquetur 40, vtique 1 A Q æquabitur

bitur

bitur 1600, at si 1 A æquatur 40, certè 120 A, valebunt 4800, quo addito ad 1600, fit 6400, nempe numerus alter cum quo instituitur comparatio.

Nec dissimiliter. Si $a^3 - a^2 b + a f$, æquetur z. Supponamus e æquari a d, & concludemus $e^3 - e^2 b d + e f d^2$ æquari $z d^3$.

Et quia Plurimæ sunt æquationes, quarum reductio minus benè præceptis continetur, quoniam earum obest anomalia, quæ eousque porrigitur quo solertis Artificis industria; præcipuas tamen perpendere haud mediocriter prodest, quas apud Vietam videndas relinquimus. Vt

Si $a^3 - 2 b^2 a$ æquetur b^3, & $a^2 - b a$ æquabitur b^2. Insuper si $2 b^2 a - a^3$ æquetur b^3, & $a^2 + b a$ æquabitur b^2, & ita de reliquis, quas cuique apud præcitatum Auctorem cernere licet.

Instituitur speciatim reductio æquationũ

Cum autem hìc de æquationum reductione differatur, magnique momenti sit, præsertim in Geometricis æquationes altioris ordinis ad cubicas, in quibus secundus terminus deest, reuocare; non pigebit propterea hìc nonnihil immorari, modumque tradere, quo huiusmodi æquationum reductio perficiatur, præcipuè ad eum, quem explicuit modum ingeniosissimus Cartesius; adiectis ijs, quæ nox vberioris, & clarioris quoque doctrinæ ratio poscere videbatur.

Primùm autem differendum occurrit de multiplici æquationum radice.

In æquatione quacunque tot sunt radices, quot dimensiones sunt potestatis.

Illud est igitur animaduersione summopere dignum in æquatione quacunque tot diuersas radices dari posse, quot ipsa dimensiones habet, quamobrem si nos supponamus a, æquari duabus vnitatibus, atque adeo quod idem est $a - 2 = 0$, hoc autem multiplicemus per $a - 3 = 0$, productum verò ducamus in $a - 4 = 0$, cum productum ex illa priori multiplicatione sit $a^2 - 5 a + 6 = 0$, fit vt si hoc multiplicetur per $a - 4$, producatur $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, quod si multiplicetur per $a - 5 = 0$ producetur quidem $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$.

Explicatio.

Et quidem si $a^2 - 5 a + 6 = 0$, ducatur in $a - 4$, producetur, vt diximus $a^3 - 9 a^2 + 2 6 a - 24 = 0$, huius porrò æquationis radices sunt 2, 3, 4.

Si verò $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, ducatur in $a - 5$, æquatio fit vt diximus $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$. Huius verò æquationis radices erunt 2, 3, 4, 5. Prior autem illa æquatio producta $a^2 - 5 a + 6 = 0$, propterea quod duas dimensiones habet, ob id duplicem radicem sortitur; quoniam autem ista $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, tres habet dimensiones, tres quoque radices obtinet, ita quia $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$, quatuor obtinet dimensiones, quatuor etiam radices habet. Itaque æquationis istius $a^2 - 5 a + 6 = 0$, duæ erunt radices, nimirum 2, & 3; deinde istius $a^3 - 9 a^2 + 26 a - 24 = 0$, tres radices erunt videlicet 2, 3, 4; huius autem $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 164 a + 120 = 0$, quatuor hę radices erunt 2, 3, 4, 5.

Explicationis continuatio.

Quod si deinde $a^4 - 14 a^3 + 71 a^2 - 154 a + 120 = 0$ nos multiplicemus per $a - 6$, producetur $a^5 - 20 a^4 + 155 a^3 - 580 a^2 + 10440 a - 720 = 0$, cuius æquationis quinque sunt radices 2, 3, 4, 5, 6, pro numero silicet dimensionum eiusdem; Vt autem quę hactenus à nobis dicta sunt luculentiùs appareant, non erit abs re vnum, vel alterum exemplum numeris explicare. Dicebamus æquationis illius $a^2 - 5 a + 6 = 0$, esse quidem radices 2, & 3. Quoniam igitur radix est 2, quadratum ipsius erit 4, cui si addatur 6, fit 10; at verò si radix est 2, 5 a, valebunt 10; quamobrem si 10, subtrahatur a 10, remanebit 0. Item si radix est 3 eius quadratum erit 9, cui si addideris 6, fiet 15; at verò si radix est 3, 5 a, valebunt 15, quo dempto ex 15, remenet 0. Deinde alterius æquationis $a^3 - 9 a^2 + 26 a; - 24 = 0$, dicebamus esse tres radices, puta 2, 3, 5.

Si radix est 2, eius cubus est 8, & 26 a, valebunt 52, quo addito ad 8, fit 60, at verò 9 a^2, valebunt 36, quo subtracto ex 60, remanebit 24, à quo si subduxeris 24, remanebit 0; & ita de duabus alijs radicibus 3, & 4; neque dissimili modo in reliquis æquationibus periculum fieri poterit ad maiorem veritatis illustrationem.

Æquatio Amphibola proponitur.

Et ita hæc æquatio amphibola $40 a - a^2 = 204$, seu quod idem est $a^2 - 40 a$

$+ 204$

$+ 204 = 0$, omnisque consimilis, duplicem habens radicem, per multiplicationem similem præcedentibus generatur. Huius porrò æquationis radices sunt 6, & 34. Si itaque supponamus $a - 34$, æquari o, & $a - 6$, itidem æquari o, & inter hæc instituatur multiplicatio, producetur $a^2 - 40a + 204 = 0$.

Item si sit æquatio $50a - a^2 = 336$, seu quod idem est $a^2 - 50a + 336 = 0$, genita erit ex multiplicatione $a - 42$, per $a - 8$, sunt enim huius æquationis radices 8, & 42. Si igitur supponamus $a - 42$, æquari o, quemadmodum $a - 8$, æquari itidem o, instituta multiplicatione, producetur $a^2 - 50a + 336 = 0$. Et ita de alijs consimilibus huius generis æquationibus intelligendum est. *Proponitur æquatio altera, & vnde originem trahat inquiritur.*

Non est parui facienda falsæ radicis indagatio; propterea quod eius cognitio plurimùm inseruit ad radices veras inueniendas; siquidem falsis radicibus cognitis æquationes, diuisionis ope, citra difficultatem ad pauciores dimensiones reuocari possunt; ex quibus deinde radices veræ iuxtà Artis præcepta eruuntur. Hæ porrò falsæ radices sunt nihilo minores; quod eueniet, cùm nos verbi gratia supponimus a, designare defectum quantitatis alicuius à nihilo; adeò vt inter a, & nihilum æquatio non contingat, nisi a sibi aliquam quantitatem adsciscat. Supponamus igitur a, talem esse defectum, & vt æquetur o, requirat 4. Si itaque multiplicemus $a^2 - 5a + 6 = 0$, per $a + 4$, producetur $a^3 - 1a^2 - 14a + 24 = 0$. Huius porrò æquationis, iuxtà numerum dimensionũ ipsius, erunt quidem tres radices, ex quibus nimirum 2, & 3, hoc est duæ ex tribus, veræ erunt, vna autem falsa, videlicet 4; & ità est, vt quisque poterit experiri. Si verò nos supponamus $a^2 - 5a + 6 = 0$, hanc verò æquationem ducamus in $a + 5$, producetur $a^3 - 19a + 30 = 0$, & quidem huius æquationis tres erunt radices, nimirum 2, 3, & 5, duæ scilicet veræ, vna autem falsa. Veræ autem sunt 2, & 3, falsa autem 5. Quòd si sit æquatio $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$, & hanc multiplicemus per $a + 5$, fiet æquatio $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$; huius autem æquationis, vt quatuor est dimensionum, ita quatuor radices existunt, nimirum 2, 3, 4, 5, quarum tres, scilicet 2, 3, & 4, veræ sunt, alia verò, puta 5, falsa est; quoniam autem idem de reliquis intelligi potest; nõ erit, cur alia exempla nos afferamus in medium. At verò quoniam æquatio plures radices admittens, per ipsarum multiplicationem constituitur; quemadmodum ex hactenus explicatis cuique facilè est intelligere; indè fit, vt æquationes huiusmodi per illas radices diuisionem subeant. *De falsis radicibus disquiritur.*

Si quidpiam enim est per aliqua duo inuicem multiplicata constitutum; illud idem per alterutrum diuidi poterit; factaque diuisione necessariò alterum emerget; quod enim multiplicatione componitur, diuisione resoluitur. Quoniam autem huiusmodi diuisio ad æquationis dimensiones minuendas conducit; præstabit hac de re sermonem instituere. *Quomodo æquationum parabolismus instituatur.*

Parabolismus, siue diuisio æquationis plures radices continentis per binomium instituitur, quod nimirum compositum est ex incognita quantitate, minus valore, seu pretio alicuius ex veris radicibus, quæcunque sit illa: vel plus valore alicuius ex falsis. Huiusmodi autem diuisione dimensiones eius diminuuntur; atque adeo innotescit æquatio simplex; vt ad extremum incognita quantitas, cognita euadat. Ad huius autem doctrinæ explicationem, supponamus æquationem illam superius allatam, nimirum $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$; hæc æquatio diuidi potest per $a - 2$, per $a - 3$, per $a - 4$, & per $a + 5$. Ita etiam si sit æquatio.

$$\begin{array}{llll} a^3 - b\,a^2 & + b\,c\,a & - b\,c\,d & = 0. \\ - c & + c\,d. & & \\ - d & + b\,d, & & \end{array}$$

Hoc est a cubus minus b, minus c, minus d,) in a quadratum plus b in c, plus c in d, plus b in d) in a, minus b in c in d, æqualis o. Diuisio poterit institui per $a - b = 0$, per $a - c = 0$, per $a - d = 0$. Vides igitur, quo pacto diuisionem subeat æquatio. *Explicatio.*

At verò si ex aduerso æquatio diuisionem non patiatur per binomium, constans ex quantitate incognita plus, vel minus certa alia quadam quantitate; id planè argumento est, quantitatem hanc non esse realem alicuius è radicibus æquationis propositæ. *Quãdo æquatio diuisionem non patiatur.*

Positæ. Quamobrem si foret æquatio vt suprà; illa quidem diuidi posset per $a - 2$ per $a - 3$, per $a - 4$; atque demum per $a + 5$. At verò nullo modo per a, Plus, vel minus alia quantitate quacunque. Cùm igitur res sic se habeat; inferendum erit huius æquationis non alias esse radices præter illas quatuor recensitas 2, 3, 4, & 5, quarum tres priores 2, 3, & 4, veræ sunt, posterior autem 5, nimirum falsa.

Altera æquatio superiùs posita diuidi potest.

Ità quoque æquatio altera superiùs allata diuidi quidem potest per $a - b = 0$, per $a - c = 0$, per $a - d = 0$, sed non per a plus, vel minus aliqua alia quantitate, vnde propterea constat huius æquationis radices esse tantummodo b, c, d.

Sic etiam, & alia ordinis biquadrantis.

Item si sit, æquatio $a^4 - 14a^3 + 71a^2 - 154a + 120 = 0$, quatuor erunt radices veræ, puta 2, 3, 4, 5, & rursus si sit æquatio $a^5 - 20a^4 + 155a^3 - 580a^2 + 1044a - 720 = 0$, erunt radices veræ 2, 3, 4, 5, & 6. Itaque si $a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0$, multiplicetur per $a - 5 = 0$, fit æquatio $a^4 - 14a^3 + 71a^2$ $- 154a + 120 =$, cuius radices veræ sunt 2, 3, 4, 5; quod si rursus productum istud multiplicetur per $a - 6 = 0$, fiet æquatio huiusmodi $a^5 - 20a^4 + 155a^3 - 580a^2 + 1044a - 720 = 0$, cuius radices veræ sunt 2, 3, 4, 5, & 6, vt dicebamus. Illud autem est obseruandum quod si superior; dicta æquatio $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$, multiplicata fuisset per $a - 6 = 0$, prouenisset æquatio ista $a^5 - 10a^4 + 5a^3 - 220a^2 - 756a + 720 = 0$; cuius æquationis radix, non esset 6; Si igitur æquatio aliqua, qualis illa, nimirum $a^3 - 9a^2 + 26a$ $- 24 = 0$, multiplicetur per quantitatem ignotam plus quantitate aliqua; deinde productum quidem ducatur in quantitatem ignotam minus aliqua alia quantitate; hæc alia quantitas non erit vera illius æquationis radix, quæ per talem multiplicationem producitur.

Superior æquatio cubica rursus multiplicatur per binomium ex incognita, & cognita quantitate.

Si verò eadem illa superior æquatio

$$\begin{array}{llll} a^3 & - b\,a^2 & + bc\,a & - bcd = 0, \\ & - c & + cd & \\ & - d & + bd & \end{array}$$

multiplicaretur per $a + f = 0$, fieret æquatio

$$\begin{array}{lllll} a^4 & - b\,a^3 & + bc\,a^2 & - bcd\,a & - bcdf = 0. \\ & - c & + cd & + bcf & \\ & - d & + bd & + cdf & \\ & + f & - bf & + bdf & \\ & & - cf & & \\ & & - df & & \end{array}$$

Hæc æquatio producta multas subit diuisiones.

Hæc autem æquatio ex supradicta multiplicatione producta diuidi potest per $a - b = 0$, per $a - c = 0$, per $a - d = 0$, & per $a + f = 0$. At non per a, plus, vel minus aliqua alia quantitate.

Rebus autem sic se habentibus illud perspicuum est, per huiusmodi diuisiones ipsas dimensiones diminui; atque adeò postremùm innotescere simplicem æquationem; vt indè cognoscatur incognita quantitas. Proindè si sit æquatio huiusmodi $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$; eaque diuidatur per $a - 5$, orietur æquatio a^3, $- 9a^2 + 26a - 24 = 0$, quæ si rursus diuidatur per $a - 4$, proueniet æquatio $a^2 - 5a + 6 = 0$, quę si rursus diuidatur per $a - 3 = 0$ fit $a - 2$. Quod enim superefficit multiplicatio; illud idem resoluit diuisio. Huius autem æquationis postremæ radices sunt 2, 3, 4, 5, quatuor nimirum, quia quatuor dimensiones habet; illa verò $a^3 - 9a^2 + 2b\,a - 24 = 0$, tres dimensiones habet; propterea tres quoque radices obtinet, nimirum 2, 3, 4; sicut illius superioris, quatuor erant 2, 3, 4, 5; & quoniam $a^2 - 5a + 6 = 0$, duas dimensiones habet, duas quoque continet radices 2, & 3. Diminuuntur itaque dimensiones, vt suprà dictum est, beneficio diuisionis.

$$
\begin{array}{r}
a - 2 = 0 \\
a - 3 = 0 \\
\hline
-3a + 6 \\
a^2 - 2a \\
\hline
a^2 - 5a + 6 = 0 \\
a - 4 \\
\hline
-4a^2 + 20a - 24 \\
a^3 - 5a^2 + 6a \\
\hline
a^3 - 9a^2 + 26a - 24 = 0 \\
a - 5 \\
\hline
-5a^3 + 45a^2 - 130a + 120 \\
a^4 - 9a^3 + 26a^2 - 24a \\
\hline
a^4 - 14a^3 + 71a^2 - 154a + 120 = 0 \\
a - 6 \\
\hline
-6a^4 + 84a^3 - 426a^2 + 924a - 720 \\
a^5 - 14a^4 + 71a^3 - 154a^2 + 120a \\
\hline
a^5 - 20a^4 + 155a^3 - 580a^2 + 1044a - 720 = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
a - b = 0 \\
a - c = 0 \\
\hline
-ca + bc \\
a^2 - ba \\
\hline
a^2 - ba - ca + bc = 0 \\
a - d \\
\hline
-da^2 + bda + cda - bcd \\
a^3 - ba^2 - ca^2 + bca \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
a^3 & -ba^2 & +bca & -bcd = 0 & \\
 & -c & +cd & & \\
 & -d & +bd & & \\
 & & & a + f & \\
\hline
a^4 & -ba^3 & +bca^2 & -bcda & -bcdf = 0 \\
 & -c & +cd & +bcf & \\
 & -d & +bd & +cdf & \\
 & +f & -bf & +bdf & \\
 & & -cf & & \\
 & & -df & &
\end{array}
$$

Explicatur diuisio superioris æquationis.

Quamobrem æquatio illa superiùs allata, & quam hìc iterum repetimus diuidi potest per $a + f$, per $a - d$, per $a - c$, & per $a - b$; Si diuidatur per $a + f$, fiet æquatio trium dimensionum tantummodo; nimirum

$$\begin{array}{lll} a^3 - b\,a^2 & + b\,c\,a & - b\,c\,d = 0 \\ \quad\;\; - c & + c\,d & \\ \quad\;\; - d & + b\,d & \end{array}$$

Si verò hæc diuidatur per $a - d$ orietur $a^2 - b\,a - c\,a + b\,c = 0$, quæ quidem æquatio duarum est dimensionum. Hæc porrò si rursus diuidatur per $a - c$, fiet æquatio $a - b = 0$, vel si diuidatur per $a - b$, fiet $a - c = 0$. Hoc itaque diuisionis præsidio æquationes habentes plures, ac plures dimensiones diminuuntur, efficiunturque potestatis depressioris, vnà cùm suis parodicis gradibus. Et quidem æquatio illa $a^3 - 9\,a^2 + 26\,a - 24 = 0$, si diuidatur per $a - 4$, reducetur ad illam $a^2 - 5\,a + 6 = 0$; quæ si diuidatur per $a - 3$, reducetur ad hanc $a - 2 = 0$.

Alio æquationis exemplo superiora explicantur.

Ita quoque ęquatio illa

$$\begin{array}{llll} a^4 - b\,a^3 & + b\,c\,a^2 & - b\,c\,d\,a & - b\,c\,d\,f = 0 \\ \quad\;\; - c & + c\,d & + b\,c\,f & \\ \quad\;\; - d & + b\,d & + c\,d\,f & \\ \quad\;\; + f & - b\,f & + b\,d\,f & \\ & - c\,f & & \\ & - d\,f & & \end{array}$$

quę, quatuor dimensiones habet; si diuidatur per $a + f = 0$, reuocabitur ad hanc quæ nimirum

$$\begin{array}{lll} a^3 - b\,a^2 & + b\,c\,a & - b\,c\,d = 0 \\ \quad\;\; - c & + c\,d & \\ \quad\;\; - d & + b\,d & \end{array}$$

trium est dimensionum, qua rursus diuisa per $a - d = 0$ prodibit $\begin{array}{l} a^2 - b\,a \\ \quad\;\; - c \end{array} + b\,c = 0$, quę duarum est dimensionum; qua quidem diuisa postremùm per $a - c = 0$, oritur $a - b = 0$.

Quomodo se habeant æquationes, quarũ plures sunt radices.

His autem obseruatis facilè deprehendemus in æquatione habente plures radices, secundi termimini quantitatem ęqualem esse summę omnium radicum; atque etiam quantitatem cognitam tertij termini æquari aggregato productorum ex singulis binis, quemadmodum quantitatem cognitam quarti termini æquari aggregato productorum ex singulis terminis; atque demum quantitatem vltimi termini æquari producto ex omnibus illis. Ità quidem perspicuum est in adiuncta æquatione trium dimensionum, ac proinde habente tres radices, quę suum ortum habuit ex multiplicatione $a - b$, per $a - c$, & eius producti $a^2 - c\,a - b\,a + b\,c = 0$, per $a - d$; sunt enim istius æquationis, quę prouenit tres radices, nimirum b, c, d, ex quibus componitur secundus æquationis terminus, siuè quantitas secundi termini; est enim hęc, scilicet $\begin{array}{l} - b; \\ - c \\ - d \end{array}$

Explicantur Æquationis termini.

Explicationis continuatio.

Ita etiam quantitas tertij termini ęqualis est aggregato productorum ex singulis binis; est enim tertij termini quantitas $+ b\,c$;

$$\begin{array}{r} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ \hline - c\,a + b\,c \\ a^2 - b\,a \qquad\; \\ \hline a^2 - c\,a - b\,a + b\,c = 0 \\ a - d \qquad\qquad\quad\; \\ \hline - d\,a^2 + c\,d\,a + b\,d\,a - b\,c\,d \\ a^3 - c\,a^2 - b\,a^2 + b\,c\,a \qquad\qquad\quad \\ \hline a^3 - b\,a^2 + b\,c\,a - b\,c\,d = 0 \\ - c \quad\;\; + c\,d \qquad\qquad\quad\; \\ - d \quad\;\; + b\,d \qquad\qquad\quad\; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a - 2 = 0 \\ a - 3 = 0 \\ \hline - 3\,a + 6 \\ a^2 - 2\,a \qquad \\ \hline a^2 - 5\,a + 6 = 0 \\ a - 4 = 0 \\ \hline - 4\,a^2 + 20\,a - 24 = 0 \\ a^3 - 5\,a^2 + 6\,a \qquad\qquad \\ \hline a^3 - 9\,a^2 + 26\,a - 24 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +\,b\,c \\ +\,c\,d \\ +\,b\,d \end{array}$$; constat autem hoc esse aggregatum productorum ex singulis binis radicibus; At verò quartus terminus, seu ipsa quantitas cognita quarti termini est b c d d, ac proindè ęqualis aggregato productorum ex singulis ternis.

Alio æquationis exempla superiora explicantur.

Ità pariter in æquatione illa $a^3 - 9\,a^2 + 26\,a - 24 = 0$; cernere licet huius enim æquationis tres sunt radices 2, 3, & 4, liquet autem secundi termini quantitatem esse 9; numerum ęqualem aggregato trium radicum 2, 3. & 4; constat præpterea si ducatur 2, in 3,, fieri 6, si verò 3, in 4, fieri 12, si demum 2, in 4, fieri 8, at verò 6, 12, & 8, si simul addantur fit 26, quantitas tertij termini; quæ proinde fit ex singulis binis radicibus. At verò si ducatur 2, in 3, fit 6, quo ducto in 4, fit 24, quantitas quarti termini facta quidem ex singulis ternis radicibus.

Propterea sit æquatio $a^3 - 15\,a^2 + 74\,a - 120 = 0$, cuius tres sunt radices 4, 5, 6, quarum summa est 15, nimirum quantitas secundi termini, at verò si ducatur 4, in 5. fit 20, & si ducatur 5, in 6, fit 30, si demum 4, in 6, fit 24, horum autem summa est 74, nimirum quantitas tertij termini. Præterea si ducatur 4, in 5, fit 20, si 20 multiplicetur per 6, fit 120, quantitas nimirùm quarti termini, quæ facta est ex singulis ternis, vt patet, radicibus.

Proponitur æquatio trium dimensionũ cuius sunt tres radices.

Insuper sit æquatio $a^3 - 48\,a^2 + 752\,a - 3840 = 0$; Huius æquationis tres sunt radices, 12, 16, & 20. Manifestum est autem quantitatem, secundi termini nimirum 48, esse aggregatum trium supradictarum radicum; deinde numerum 752, quantitatem silicet tertij termini fieri ex singulis binis radicibus, vt constat; si enim ducatur 12, in 16, fit numerus 192, si verò 16, ducatur in 20, fit numerus 320, si 12, ducatur in 20, fit 240; ex his porrò simul additis consurgit numerus 752; Demum numerus 3840, hoc est quantitas quarti termini fit ex singulis ternis si enim multiplicetur 20, per 12, fit 240, hoc verò productum si multiplicetur per 16, fit 3840, vt perspicuum est.

Proponitur æquatio quatuor dimensionum.

Supponamus iterum $a^4 - 4\,a^3 - 19\,a^2 + 106\,a - 120 = 0$. Huius æquationis radices sunt 2, 3, 4, & — 5, quę quidem ęquatio sic ordinari debet, quemadmodum hic cernere licet $a^4 - 19\,a^2 - 120 = 4\,a^3 - 106\,a$.

Quod si placet per species ęquationem exhibere, illud quidem facillimum est, erit autem hoc modo

$$a^4 \begin{array}{l} +\,b\,c \\ +\,c\,d \\ +\,b\,d \\ -\,b\,f \\ -\,c\,f \\ -\,d\,f \end{array} a^2 - b\,c\,d\,f = \begin{array}{l} +\,b \\ +\,c \\ +\,d \\ -\,f \end{array} a^3 \begin{array}{l} +\,b\,c\,d \\ -\,b\,c\,f \\ -\,c\,d\,f \\ -\,b\,d\,f \end{array} a.$$

Illius enim æquationis radices videlicet 2, 3, 4, & — 5, designatę intelligentur per + b, † c, † d, & — f. Vbi quantitas ignota a, pares habens dimensiones, vnam constituit æquationis partem reliquæ autem aliam.

Conclusio ex supradictis.

Concludendum est igitur, vt supra dicebamus in ęquatione plures radices habente; quantitatem cognitam secundi termini, æqualem esse summæ omnium radicum, & quantitatem cognitam tertij termini, æqualem esse summæ productorum ex singulis binis, & quantitatem cognitam quarti termini esse æqualem summæ productorum ex singulis ternis, at verò quantitatem cognitam vltimi termini, siuè vltimum terminum ipsum, æqualem esse producto ex omnibus.

Radicum numerus inquiritur.

De numero radicum reliquum est, vt verba faciamus. & inquiramus quot veræ, & quot falsæ radices in æquatione ipsa reperiantur. Illud igitur præ oculis diligenter habendum est, tot nimirum radices veras in æquatione haberi posse quot signorum †, & —, variationes contingunt. Tot verò falsas existere qnot vicibus ibidem deprehenduntur duo signa +, vel duo signa — se mutuò consequentia. Hæc tamen intelligi debent de æquationibus illis, quæ ex suis radicibus inter se multiplicatis deducuntur; alioquin optimè fieri poterit, vt in æquatione non sint tot radices, quot incognita quantitas dimensiones habet, neque tot veræ, quot in æquatione ipsa variationes signorum †, & —, contingunt, aut tot falsæ, quot vicibus deprehendere

Continuatio doctrinæ de radicum numero indagando, de ipsarum æquationum transmutatione.

hendere licet duo illa signa † vel duo signa — se inuicem sequentia. Ita planè si hæc impossibilis æquatio $a^2 - 4a + 5 = 0$, multiplicetur per $a - 2 = 0$, producetur æquatio $a^3 - 6a^2 + 13a - 10 = 0$. Hęc certè producta non erit ex multiplicatione trium radicum; quantumuis igitur in ea tres radices veræ concipiantur; nihilominus vna tantùm ex illis realis est, nimirum 2, reliquæ autem imaginarię, seù tales quarum valor mente comprehendi non potest,

Superiora iterum considerantur.

Redeamus vndè discessimus. Erat æquatio superiùs allata $+ a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$. Quoniam igitur post † a^4, sequitur — $4a^3$, quæ est vna variatio signi ✠, in signum —, & insuper post — $19a^2$, sequitur † $106a$ quemadmodum post † $106a$, subsequitur — 120, ac proindè duæ aliæ variationes contingunt signorum †, & —; proindè tres esse radices admittendas veras in supradicta æquatione colligimus; vnam autem esse falsam, eo quod duo signa — terminorum $4a^3$, & $19a^2$, se inuicem sequuntur.

Superioris æquationis radices.

Sunt porrò supradictæ æquationis radices veræ 2, 3, & 4. Si supponamus enim radicem esse 2, æquatio stabit, vt vides $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$
$16 - 32 - 76 + 212 - 120 = 0$.

Si supponamus esse 3, stabit hoc modo $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$, $81 - 108 - 171 + 318 - 120 = 0$. Si verò supponamus esse 4, stabit hoc pacto $a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$. $256 - 256 - 304 + 424 - 120 = 0$.

Ex ijs, quæ supra.

Vna verò radix erit falsa puta 5. Quæ autem hactenus diximus intelligenda sunt tam de æquationibus in quibus nullus terminus deest, sed completæ sunt; quàm de illis, quæ incomplete dici possunt, eo quod in ipsis aliquis terminus desideretur. Supponamus itaq; c † R — N = o, intelligi debet in hac æquatione esse Q, vel affectum signo †, vel signo —, si fuerit affectum signo †, erunt duæ falsæ radices, & vna vera; si autem affectum fuerit signo —, erunt tres radices veræ.

Earundem rerum consideratio.

In prima æquatione quoniam c, & Q, supponuntur affici signo †, proindè erit radix vna falsa. Quia verò Q & R, supponuntur eodem affici signo, erit alia radix falsa; Hoc autem constat ex pręceptis hac de re supra traditis. Quia demùm R, & N, supponuntur affici diuersimodè, nempè R, signo †, & N signo —, proindè erit radix vna vera. Si verò Q afficiatur signo —, quoniam c, affectus supponitur signo † at Q signo — proindè erit radix vna vera.

Quia verò Q, & R, afficiuntur; illud quidem signo —, hæc autem signo †, erit altera radix vera. Quia demum R, affici supponitur signo †, & N, signo — proindè erit tertia radix vera; quamobrem in hac supposita æquatione tres radices verę erunt.

Proponitur æquatio cubici ordinis.

** Perinde est siue signo ✠ siue signo — intelligatur affici.*

Supponamus e^3 æquari $c - be$, seù vt alij faciunt $e^3 = - be + c$. Oportet autem æquationem hunc in modum concipere e^3 ⌒ o e^2 ✠ $be - c = 0$. At verò supponamus primo o e^2, affici signo ✠,* & erit e^3 ✠ o e^2 ✠ $be - c = 0$, & ità propter terminos † e^3, & o e^2, eodem signo affectos, erit vna radix falsa; & ità ob terminos ✠ o e^2, & † be, eodem affectos signo vna erit falsa radix. Demum propter terminos † be, & — c, diuersis notis affectos, vna erit radix vera. Si verò nos supponàm o e^2, secundum terminum affectum esse signo —, erit propter terminos ✠ e^3, & — o e^2, varijs signis affectos, erit inquam radix vna vera; & propter terminos — o e^2, & ✠ be, qui varijs signis afficiuntur, erit etiam alia radix vera. Postremo, propter † be, & — c, erit alia vera.

Quoniam autem supponendo secundum terminum affectum signo alterutro ✠, aut —, certi sumus nihil in proposita æquatione mutari posse. Vt cognoscamus multiplicationem, qua proposita æquatio producta fuit oportet earum radices inter se conferre.

Quomodo se habeant radices veræ, & falsæ in æquatione.

Supponamus o e^2, terminum esse affectum signo ✠, & erunt duæ radices falsæ vna autem vera. Suppenamus deinde terminum illum esse affectum signo — radices tres veræ erunt. Quare in illa falsa, sumpta verę istius respondet: quemadmodum iterum accepta falsa verę respondet; vera demum veræ consentit. Inde fit vt hęc ęquatio vnicam radicem habeat veram, atque realem, quæquidem possit explicari. Alias autem radices immaginarias esse: ac proindè æquationem productam originem non ducere à multiplicatione trium radicum, vt suprà de alijs dictum fuit;

fuit; ſed potiùs per multiplicationem alicuius æquationis impoſſibilis.

Prima æquatio dicatur illa, in qua o e^3 afficitur nota +; deinde altera intelligatur eſſe, in qua o e^3 afficitur nota —. Hæc autem, quæ dicta ſunt locum etiam habent in radicibus falſis.

Altera æquatio cubica proponitur.

$\backsim$; Significat plus vel minus.

Ità pariter ſupponamus $e^3 = * - be - c$, vel $e^3 \backsim$; o $e^3 + be + c = 0$. Priori facta ſuppoſitione tres erunt radices falſę: facta autem ſecunda, erit vna falſa, & duę veræ. Quamobrem concludendum erit, æquationem hanc vnam tantùm radicem admittere, nempe falſam, duas reliquas eſſe imaginarias, ac ob id æquationem procreari non poſſe multiplicatione trium radicum.

Eodem pacto ſi fuerit ęquatio $e^3 = * + be + c$; ſeu quod idem eſt $e^3 \backsim$; o $e^3 - be - c = 0$.

Vnde æquatio propoſita suū ortum ducat.

Conſtat æquationem propoſitam oriri ex multiplicatione trium radicum; quarum duę ſint falſæ, vna autem vera; proptereà quod è priori illa hypotheſi duæ inueniuntur radices falſę, & vna vera: è ſecunda itidem duæ falſæ, & vna vera.

Si ſit $e^3 = * + be - c$, ſeù $e^3 \backsim$; o $e^3 - be + c = 0$. In priori ſuppoſitione duę ſunt verę radices, cum vna falſa, & in poſteriori ſimiliter duæ veræ, & vna falſa, itaut huiuſmodi æquatio procreari poſſit è multiplicatione trium radicum, quarum duę ſint verę, & vna falſa.

Metamorphoſis radicum qua Arte perficiatur.

Fit autem iſtarum radicum metamorphoſis; adeò vt in vna, & eadem æquatióne radices omnes, quæ falſæ ſunt euadant verę. Nec artificio diſſimili quæ veræ erant, euadant falſæ. Id autem fit mutando ſigna omnia +, & —, quę nimirum in ſecundo, quarto, & ſexto loco; & alijs quoque locis deſignatis per numeros pares reperiuntur: Non mutatis reliquis primi, & tertij, & quinti loci, aliorumque per impares numeros deſignatorum. Quamobrem ſi nos ſupponamus ęquationem eſſe, vt ſupra $+ a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106 - 120 = 0$, quę quidem æquatio tres radices habet veras, nimirùm 2, 3, & 4, atque vnam falſam, nempè 5, vt ſuperiùs dictum fuit. Mutatis ſignis vt hìc, fit æquatio huiuſmodi $+ a^4 + 4a^3 - 19a^2 - 106a - 120 = 0$, vnicam radicem veram habens; puta 5, quæ in ſuperiori æquatione falſa erat; reliquę autem, nimirum 2, 3, 4, quę verę erant, falſæ euadunt. At verò illius æquationis, nimirùm $+ a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$ tres eſſe radices veras, ſcilicet 2, 3, & 4, liquidò conſtat, vt hìc cernere licet $+ a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$

$+16 - 32 - 76 + 212 - 120 = 0$

$+81 - 108 - 171 + 318 - 120 = 0$

$+256 - 256 - 304 + 424 - 120 = 0$.

Conſtat autem æquationem hanc produci ex illis tribus radicibus veris, & altera falſa, vt manifeſtè conſtat ex adiuncto paradigmate.

Superoir æquatio producitur ex illis tribus radicibus veris, & altera falſa.

$$\begin{array}{r} a - 2 \\ a - 3 \\ \hline -3a + 6 \\ a^2 - 2a \\ \hline a^2 - 5a + 6 \\ a - 4 \\ \hline -4a^2 + 20a - 24 \\ a^3 - 5a^2 + 6a \\ \hline a^3 - 9a^2 + 26a - 24 \\ a + 5 \\ \hline 5a^3 - 45a^2 + 130a - 120 \\ a^4 - 9a^3 + 26a^2 - 24a \\ \hline a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0 \end{array}$$

Quemadmodum etiam perſpicuum eſt, æquationem hanc $+ a^4 + 4a^3 - 19a^2 - 106a - 120 = 0$ produci ex radice vna vera, nimirum 5, & tribus falſis 2, 3, & 4, multiplicatis ad inuicem, hoc eſt quemadmodum ſuperior æquatio producebatur ex quatuor radicibus inter ſe multiplicatis, quarum tres ſunt verę; puta 2, 3, & 4, altera autem falſa, nimirùm 5. Ità etiam & hæc producitur ex quatuor radicibus, multiplicatis ad inui-

cem

cem, quarum vna eſt vera, videlicet 5.

Quæ traduntur nedum locum habent in æquationibus completis, ſed etiam in incompletis.

Aliæ autem tres ſunt falſæ; puta 2, 3, & 4, quæ in ſuperiori æquatione veræ erant.

Hæc porrò nedum locum habent in æquationibus completis; ſed etiam in incompletis, in quibus nimirùm aliquis terminus deeſt, atque deſideratur exijs, qui in imparibus locis exiſtunt. Quamobrem ſi fuerit æquatio $a^3 = * - 8a - 24$. Seù quod idem eſt a^3 ⌒; 0 a^2 † 8 a † 24 $= 0$. Mutando ſigna †, & — ſecundi, & quarti loci in contraria, fiet æquatio a^3 ⌒; 0 a^2 † 8 a — 24 $= 0$. Siue $a^3 = * - 8a$ † 24. Illius autem ęquationis radix eſt $a = -2$, iſtius verò eſt $a = 2$. Et quidem res ita ſe habet; propterea quòd ſi nos ſupponamus $a^3 = * - 8a - 24$, certè huius ęquationis radix erit -2. Si verò ſupponamus eſſe $a^3 = * - 8a$ ✠ 24, huius æquationis radix erit 2.

$$
\begin{array}{r}
a - 5 \\
a + 2 \\
\hline
+ 2a - 10 \\
a^2 - 5a \quad\quad \\
\hline
a^2 - 3a - 10 \\
a + 3 \\
\hline
3a^2 - 9a - 30 \\
a^3 - 3a^2 - 10a \quad\quad \\
\hline
a^3 - 19a - 30 = 0 \\
a + 4 = 0 \\
\hline
4a^3 - 76a - 120 \quad\quad \\
a^4 - 19a^2 - 30a \quad\quad\quad\quad \\
\hline
a^4 + 4a^3 - 19a^2 - 106a - 120 = 0
\end{array}
$$

Proponitur alia æquatio.

Præterea ſit æquatio $a^3 = * - 10a - 276$. Seù quod idem eſt a^3 ⌒; 0 a^2 † 10 a † 270 $= 0$, mutando ſigna †, & —, ſecundi, & quarti loci in ſua contraria. Fiet æquatio a^3 ⌒; 0 a^2 † 10 a — 276 $= 0$; ſeu $a^3 = * - 10a$ † 276. Iſtius autem radix eſt $a = 6$; illius verò $a = -6$. Et ita eſt; namque cubus ex 6 eſt 216, at verò ſi a, valet 6, vtique 10 a, valebunt 60, quare cùm afficiantur ſigno —; eſt enim ęquatio $a^3 = * - 10a$ † 276; proindè erit 216 † 60 $= 276$. Idem eſt enim dicere $a^3 = * - 10a$ † 276, ac dicere a^3 † 10 a $= 276$. Huic porrò reſpondet illa 216 † 60 $= 276$.

Explicationis continuatio.

At verò ſi præſupponamus cubum ex -6, is erit -216; modò ſi 10, numerum radicum nos multiplicemus per -6, radicis valorem, fiet productum -60, quo addito ipſi numero -216, fiet aggregatum -276, à quo ſi demantur -60, fit reſiduum -216. Si enim eſt æquatio, vt ſupra $a^3 = * - 10a - 276$, & conſideremus valorem, ſiue pretium terminorum, ſuppoſita radice -6, comperiemus rem ſe habere, quemadmodum dicebamus.

Incognitæ radices poſſunt aliqua nota quantitate augeri, & minui

Radices incognitas æquationis propoſitæ poſſumus cognita quantitate aliqua augere, vel minuere, idque etiam ſuperiùs explicare tentauimus. Perficitur verò; ſi in locum incogniti termini alter ſubſtituatur, qui quidem hac eadem quantitate maior ſit, vel minor, & is loco primi vbique ſubrogetur. Quamobrem ſi foret æquatio iſta $a^4 - 8a^3 - 31a^2$ † 298 a $- 840 = 0$, quæ tres radices habet veras, videlicet 4, 5, & 6, falſam verò vnam, nempè 7. Si fiat ſignorum tranſmutatio; tres illæ radices euadent falſæ, vna autem vera erit, nimirum 7; reuocabitur igitur ad hanc † a^4 † 8 $a^3 - 31a^2 - 398a - 840 = 0$. Huius æquationis radix vera eſt 7. Oporteat autem radicem prædictam incognitam tamen, denotatam per a, oporteat inquam augere numero quinario. Subſtituatur e, loco ipſius a, intelligere autem oportet quantitatem hanc deſignatam per e, quinario excedere quantitatem denotatam per a, proinde $e - 5$, æquabitur a, erit itaque illa quantitas hæc, nimirum $e - 5$, atque tractanda eſt quemadmodum tractabatur a.

$$a - 4 = 0$$
$$a - 5 = 0$$
$$\overline{}$$
$$-5a + 20$$
$$a^2 - 4a$$
$$\overline{}$$
$$a^2 - 9a + 20 = 0$$
$$a - 6$$
$$\overline{}$$
$$-6a^2 + 54a - 120$$
$$a^3 - 9a^2 + 20a$$
$$\overline{}$$
$$a^3 - 15a^2 + 74a - 120 = 0$$
$$a + 7$$
$$\overline{}$$
$$7a^3 - 105a^2 + 518a - 840$$
$$a^4 - 15a^3 + 74a^2 - 120a$$
$$\overline{}$$
$$a^4 - 8a^3 - 31a^2 + 398a - 840 = 0$$

$$c - 5$$
$$c - 5$$
$$\overline{}$$
$$-5c + 25$$
$$c^2 - 5c$$
$$\overline{}$$
$$c^2 - 10c + 25$$
$$c - 5$$
$$\overline{}$$
$$-5c^2 + 50c - 125$$
$$c^3 - 10c^2 + 25c$$
$$\overline{}$$
$$c^3 - 15c^2 + 75c - 125$$
$$c - 5$$
$$\overline{}$$
$$-5c^3 + 75c^2 - 375c + 625$$
$$c^4 - 15c^3 + 75c^2 - 125c$$
$$\overline{}$$
$$c^4 - 20c^3 + 150c^2 - 500c + 625$$

Quemadmodum loco ipſius a, ſuſtituitur $c - 5$, ita loco a^2, ſuſtitui debet $c^2 - 10c + 25$, ſic etiam loco a^3, debet ſuſtitui $c^3 - 15c^2 + 75c - 125$; atque demum loco ipſius a^4 opoterter ſuſtituere $c^4 - 20c^3 + 150c^2 - 500c + 625$ &c.

$$c^4 - 20c^3 + 150c^2 - 500c + 625$$
$$+ 8c^3 - 120c^2 + 600c - 1000$$
$$- 31c^2 + 310c - 775$$
$$- 398c + 1990$$
$$- 840$$
$$\overline{}$$
$$c^4 - 12c^3 - 1c^2 + 12c * = 0$$

Huius autem æquationis radix est 12, cum prius esset 7, euasit verò 12, ob additionem numeri quinarij. Cæterum radicem esse 12 perspicuum est, quandoquidem quadratoquadratum ex 12, est 20736, huic si addas 144, valorem duodecim radicum fiet summa 20880, à qua si dempseris 20736, pretium duodecim cuborum, fiet residuum 144, à quo si subtraxeris 144, pretium vnius quadrati, nihil remanet.

Quæ de augenda radice dicta sunt de diminuenda intelligi quoque debent.

Quæ de augenda radice diximus, de diminuenda quoque possunt intelligi. Quamobrem si radicem eiusdem æquationis diminuere vellemus eodem numero quinario hunc in modum procedendum esset. Fiat c † 5 = a.

Cum autem superior æquatio esset huiusmodi a^4 ✠ 8 a^3 — 31 a^2 — 398 a — 840 = o. Oportet loco a^4; subrogare c^4 ✠ 20 c^3 ✠ 150 c^2 ✠ 500 c ✠ 625. Vlteris procedendo oportet loco 8 a^3, sustituere 8 c^3 † 120 c^2 † 600 c † 1000, nempe c^3 ✠ 15 c^2 ✠ 75 c † 125, ductum in ✠ 8. Deinde loco 31 a^2, sustitui debet 31 c^2 ✠ 310 c — 775, nempè c^2 ✠ 10 c ✠ 25, ductum in — 31. Posteà loco 398 a, subrogari debet 398 c ✠ 1990, nimirum c ✠ 5, ductum in — 398; facta autem sustitutione, vt vides fiet, vt infrà.

c † 5
c † 5
―――――
5 c † 25
c^2 † 5 c
―――――
c^2 † 10 c † 25
c † 5
―――――
5 c^2 † 50 c † 125
c^3 † 10 c^2 † 25 c
―――――
c^3 † 15 c^2 † 75 c † 125
c † 5
―――――
5 c^3 † 75 c^2 † 375 c † 625
c^4 ✠ 15 c^3 ✠ 75 c^2 ✠ 125 c
―――――
c^4 ✠ 20 c^3 ✠ 150 c^2 ✠ 500 c ✠ 625 = o

c^4 ✠ 20 c^3 ✠ 150 c^2 ✠ 500 c ✠ 625
8 c^3 ✠ 120 c^2 ✠ 600 c ✠ 1000
— 31 c^2 — 310 c — 775
— 398 c — 1990
— 840
―――――
c^4 † 28 c^3 † 239 c^2 † 392 c — 1980 = o

Huius autem æquationis radix est 2, vt quilibet poterit experiri.

Æquatio superior vnde collecta est.

Cæterùm æquatio ista collecta est ope multiplicationis, & quatuor habet radices veras; nempe 2, 4, 6, & 10, loquor de æquatione hac; nimirum a^4 — 22 a^3 † 164 a^2 — 488 a ✠ 480 = o, hęc enim colligitur si multiplicetur a — 2 per a — 4, deinde productum a^2 — 6 a ✠ 8, multiplicetur per a — 6, postea productum a^3 — 12 a^2 ✠ 44 a — 48, multiplicetur per a — 10, ex his enim multiplicationibus oritur æquatio illa a^4 — 22 a^3 ✠ 164 a^2 — 488 a ✠ 480 = o. Rursus si multiplicetur a ✠ 2 = o, per a ✠ 3, fit a^2 ✠ 5 a ✠ 6, quod si multiplicetur per a — 4, fit productum a^3 ✠ 1 a^2 — 14 a — 24 = o, quod si multiplicetur per a ✠ 6, producetur hoc nimirum a^4 ✠ 7 a^3 — 8 a^2 — 108 a — 144 = o.

Hæc autem æquatio tres habet radices falsas puta 2, 3, & 6, vnam autem veram nimirum 4 quam possumus arte superiùs explicata numero quocumque augere.

$$\begin{array}{r} a - 2 = 0 \\ a - 4 = 0 \\ \hline -4a + 8 \\ a^2 - 2a \\ \hline a^2 - 6a + 8 = 0 \\ a - 6 \\ \hline -6a^2 + 36a - 48 \\ a^3 - 6a^2 + 8a \\ \hline a^3 - 12a^2 + 44a - 48 = 0 \\ a - 10 \\ \hline -10a^3 + 120a^2 - 440a + 480 \\ a^4 - 12a^3 + 44a^2 - 48a \\ \hline a^4 - 22a^3 + 164a^2 - 488a + 480 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a + 2 = 0 \\ a + 3 = 0 \\ \hline 3a + 6 \\ a^2 + 2a \\ \hline a^2 + 5a + 6 \\ a - 4 \\ \hline -4a^2 - 20a - 24 \\ a^3 + 5a^2 + 6a \\ \hline a^3 + 1a^2 - 14a - 24 = 0 \\ a + 6 \\ \hline 6a^3 + 6a^2 - 84a - 144 \\ a^4 + 1a^3 - 14a^2 - 24a \\ \hline a^4 + 7a^3 - 8a^2 - 108a - 144 = 0 \end{array}$$

Illud autem ſilentio prætereundum non eſt ſcilicet falſas radices alicuius ęquationis quantitate diminui, ea nimirùm, qua radices veræ eiuſdem æquationis augentur: & contrà falſas augeri eà quantitate, qua veræ diminuuntur. Inſuper tam veras, quàm falſas prorſus euaneſcere ſi quantitate ipſis æquali diminuantur. Quod ſi prędicta quantitas illas ſuperauerit exueris falſæ, vt ex falſis veræ euadent.

Falſæ radices alicuius æquationis quantitate diminuuntur, qua radices veræ eiuſdem augentur

Supponamus æquationem eſſe $a^4 - 5a^3 - 52a^2 \dagger 356a - 480 = 0$, quæ quidem æquatio tres habet radices veras, nempè 2, 5, & 6, vnam autem falſam nimirùm 8. Factà verò permutatione ſignorum erit æquatio $a^4 + 5a^3 - 52a^2 - 356a - 480 = 0$. Huius autem ęquationis radix vera eſt 8, cum alię 2, 3, & 4, ſint falſæ.

Exempli explicatio

Hanc autem ſi binario numero nos augere velimus; ſumi debet e, loco ipſius a, atque debemus intelligere, quantitatem a, exceſſu 2, ſuperari ab e, adeò vt $e - 2$ æquetur a. Sustituatur itaque $e - 2$, loco ipſius a, quemadmodum loco a^2 ſubrogetur $e^2 - 4e + 4$, quod eſt quadratum ex $e - 2$; deindè loco a^3 ſuſtituatur $e^3 - 6e^2 + 12e - 8$, cubus nimirùm ex $e - 2$; demum loco ipſius a^4 ſuſtituatur $e^4 - 8e^3 + 24e^2 - 32e + 16$

$$
\begin{array}{r}
e^4 - 8e^3 + 24e^2 - 32e + 16 \\
5e^3 - 30e^2 + 60e - 40 \\
- 52e^2 + 208e - 208 \\
- 356e + 712 \\
- 480 \\
\hline
e^4 - 3e^3 - 58e^2 - 120e\ * = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
e - 2 \\
e - 2 \\
\hline
- 2e + 4 \\
e^2 - 2e \\
\hline
e^2 - 4e + 4 \\
e - 2 \\
\hline
- 2e^2 + 8e - 8 \\
e^3 - 4e^2 + 4e \\
\hline
e^3 - 6e^2 + 12e - 8 \\
e - 2 \\
\hline
- 2e^3 + 12e^2 - 24e + 16 \\
e^4 - 6e^3 + 12e^2 - 8e \\
\hline
e^4 - 8e^3 + 24e^2 - 32e + 16
\end{array}
$$

Explicationis continuatio

Huius æquationis radix eſt 10; & ità aucta eſt numero binario radix illa 8; eodemque binario numero diminuuntur radices illę falſæ 2, 5, 6; adeò vt 2, euaneſcat, & fiat 0, & 5, euadat 3; & 6, euadat 4. Dum igitur augetur binario radix vera: binario quoque diminuitur quęlibet ex falſis; ac proindè radix vera huius æquationis erit 10; falſæ autem erunt 3, & 4.

Idque euidenter colligitur ex adiuncto paradigmate. Opere enim multiplicationis cognoſcimus radices illas 3, 4, 0, falſas eſſe; vnam autem veram, nimirùm 10. Quod de additione diximus; nempè dum vera radix augetur, falſas diminui: illud etiam de diminutione intelligendum eſt; adeò vt dum vera diminuitur, falſæ augeantur. Quamobrem æquatio illa $e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0$, radicem habet veram 2; dumque fuit 7 radix illius æquationis $a^4 + 8a^3 - 31a^2 - 398a - 840 = 0$; diminuta numero quinario, habita eſt radix 2, pro $e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0$; & interim eiuſdem æquationis $a^4 + 8a^3 - 31a^2 - 398a - 840 = 0$, radices falſæ, quales ſunt 4, 5, 6, augentur eodem quinario; adeò vt ſint 9, 10, 11, huius æquationis $e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0$, radices falſæ idque cernere licet in adiuncto paradigmate.

$$
\begin{array}{r}
e - 10 \\
e + 3 \\
\hline
3e - 30 \\
e^2 - 10e \\
\hline
e^2 - 7e - 30 \\
e + 4 \\
\hline
4e^2 - 28e - 120 \\
e^3 - 7e^2 - 30e \\
\hline
e^3 - 3e^2 - 58e - 120 \\
e + 0 \\
\hline
e^4 - 3e^3 - 58e^2 - 120e\ * = 0
\end{array}
$$

$$e - 2 = 0$$
$$e + 9$$
$$9e - 18$$
$$e^2 - 2e$$
$$e^2 + 7e - 18$$
$$e + 10$$
$$10e^2 + 70e - 180$$
$$e^3 + 7e^2 - 18e$$
$$e^3 + 17e^2 + 52e - 180$$
$$e + 11$$
$$11e^3 + 187e^2 + 572e - 1980$$
$$e^4 + 17e^3 + 52e^2 - 180e$$
$$e^4 + 28e^3 + 239e^2 + 392e - 1980 = 0$$

Ita quoque si huius æquationis, puta $+ a^4 - 4a^3 - 19a^2 + 106a - 120 = 0$, signa mutentur; fit æquatio $+ a^4 + 4a^3 - 19a^2 - 106a - 120 = 0$. In hac autem vna tantum est radix, & quidem vera nimirum 5, falsæ verò sunt 2, 3, & 4, Si veram radicem 5, ternario diminuamus, faciendo $e + 3 = a$, & $e^2 + 6e + 9 = a^2$, sustituendo hanc loco illius æquationis $a^4 + 4a^3 - 19a^2 - 106a - 120 = 0$, sustituendo inquam hanc, quæ colligitur, vt patet ex adiuncto paradigmate. *Perpenditur æquatio proposita.*

$$e^4 + 12e^3 + 54e^2 + 108e + 81$$
$$+ 4a^3 + 36e^2 + 108e + 108$$
$$- 19e^2 - 114e - 171$$
$$- 106e - 318$$
$$- 120$$
$$e^4 + 16e^3 + 71e^2 - 4e - 420 = 0$$

Et huius æquationis radix vera erit 2. Dum autem ternario illa radix vera 5 diminuta fuit; interim falsæ 2, 3, & 4, sunt eodem ternario auctæ; adeò vt huius æquationis falsæ radices sint 5, 6, & 7, vt patet ex adiuncto paradigmate. *Explicatio suprà dictorum*

$$e - 2 = 0$$
$$e + 5$$
$$5e - 10$$
$$e^2 - 2e$$
$$e^2 + 3e - 10$$
$$e + 6$$
$$6e^2 + 18e - 60$$
$$e^3 + 3e^2 - 10e$$
$$e^3 + 9e^2 + 8e - 60$$
$$e + 7$$
$$7e^3 + 63e^2 + 56e - 420$$
$$e^4 + 9e^3 + 8e^2 - 60e$$
$$e^4 + 16e^3 + 71e^2 - 4e - 420 = 0$$

Modus mutandi valorem radicum ad quid conducat.

Modus iam explicatus mutandi valorem radicum ipsis non cognitis nobis suppeditabit viam per quam incedere debeamus ad tollendum de medio secundum terminum çquationis propositæ. Si igitur sit æquatio $e^4 + 28\, e^3 + 239\, e^2 + 392\, e - 1980 = 0$. Oporteat huius æquationis secundum terminum de medio tollere. Istius çquationis vera radix est 2. Diuidantur 28 per 4, propter quatuor dimensiones termini e^4, fit quotiens 7, fiat proinde $u - 7 = e$, & procedatur, vt infrà; reperietur enim vera radix 9, cum vera iam esset 2. Debent igitur diminui veræ radices, quantitate cognita secundi termini, diuisa per numerum dimensionum primi; si vnus ex hisce duobus terminis affectus sit signo + alter autem signo —. Vel etiam augendo illam quantitate eadem, si nimirùm vterque terminus eodem signo affectus exstiterit.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & & & u & -7 & \text{R} \\
 & & & u & -7 & \\
\hline
 & & -7 & u & +49 & \\
 & & u^2 - 7 & u & & \\
\hline
 & & u^2 - 14 & u & +49 & \text{Q} \\
 & & & u & -7 & \\
\hline
 & -7 & u^2 + 98 & u & -343 & \\
 & u^3 - 14 & u^2 + 49 & u & & \\
\hline
 & u^3 - 21 & u^2 + 147 & u & -343 & \text{C} \\
 & & & u & -7 & \\
\hline
-7 & u^3 + 147 & u^2 - 1029 & u & +2401 & \\
u^4 - 21 & u^3 + 147 & u^2 - 343 & u & & \\
\hline
u^4 - 28 & u^3 + 294 & u^2 - 1372 & u & +2401 & \text{QQ}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrr}
u^4 - 28\, u^3 & + 294\, u^2 & - 1372\, u & + 2401 \\
28\, u^3 & - 588\, u^2 & + 4116\, u & - 9604 \\
 & 239\, u^2 & - 3346\, u & + 11711 \\
 & & 392\, u & - 2744 \\
 & & & - 1980 \\
\hline
u^4 \; * & - 55\, u^2 & - 210\, u & - 216 = 0
\end{array}
$$

Huius autem æquationis radix est 9. Erat enim vera illius æquationis radix 2, & aucta est uumero 7, vndè fit, vt vera huius radix sit 9, erant autem radices falsæ 9, 10, 11, falsæ modo sunt 2, 3, 4, vt ex adiuncto paradigmate colligere licet.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & u & -\ 9 \\
 & & & u & +\ 2 \\
\hline
 & & & 2\ u & -\ 18 \\
 & & u^2 & -\ 9\ u & \\
\hline
 & & u^2 & -\ 7\ u & -\ 18 \\
 & & & u & +\ 3 \\
\hline
 & & 3\ u^2 & -\ 21\ u & -\ 54 \\
 & u^3 & -\ 7\ u^2 & -\ 18\ u & \\
\hline
 & u^3 & -\ 4\ u^2 & -\ 39\ u & -\ 54 \\
 & & & u & +\ 4 \\
\hline
 & 4\ u^3 & -\ 16\ u^2 & -\ 156\ u & -\ 216 \\
u^4 & -\ 4\ u^3 & -\ 39\ u^2 & -\ 54\ u & \\
\hline
u^4\ * & -\ 55\ u^2 & -\ 210\ u & -\ 216 & = 0
\end{array}$$

Ità quoque si foret æquatio $e^4 + 16\ e^3 + 71\ e^2 - 4\ e - 420 = 0$. Diuisis 16, per 4, propter quatuor dimensiones huius termini e^4, prouenit quotiens 4. Si itaque fiat $u - 4 = e$; ita procedendum erit. *Explicatur æquatio altera.*

$$\begin{array}{rrrrr}
u^4 & -\ 16\ u^3 & +\ 96\ u^2 & -\ 256\ u & +\ 256 \\
 & +\ 16\ u^3 & -\ 192\ u^2 & +\ 768\ u & -\ 1024 \\
 & & +\ 71\ u^2 & -\ 568\ u & +\ 1136 \\
 & & & -\ 4\ u & +\ 16 \\
 & & & & -\ 420 \\
\hline
u^4\ * & -\ 25\ u^2 & -\ 60\ u & -\ 36 & = 0
\end{array}$$

Erat autem illius superioris æquationis, scilicet $e^4 + 16\ e^3 + 71\ e^2 - 4\ e - 420 = 0$, erat inquam vera radix 2. Modo est, 6 quandoquidem illa quaternario est aucta.

Falsæ autem erant radices 5, 6, 7; Modo erunt 1, 2, 3, siquidem illæ sunt singulæ quaternario diminutæ.

Hoc totum cernere licet in adiuncto paradigmate. *Supradictorū comparatio.*

$$\begin{array}{r}
u - 6 \\
u + 1 \\
\hline
u - 6 \\
u^2 - 6\,u \quad \\
\hline
u^2 - 5\,u - 6 \\
u + 2 \\
\hline
2\,u^2 - 10\,u - 12 \\
u^3 - 5\,u^2 - 6\,u \quad\quad \\
\hline
u^3 - 3\,u^2 - 16\,u - 12 \\
u + 3 \\
\hline
3\,u^3 - 9\,u^2 - 48\,u - 36 \\
u^4 - 3\,u^3 - 16\,u^2 - 12\,u \quad\quad \\
\hline
u^4 * - 25\,u^2 - 60\,u - 36 = 0
\end{array}$$

Alia proponitur æquatio. Ita quoque si foret æquatio $a^4 - 2\,b\,a^3 + 2\,b^2\,a^2 - 2\,b^3\,a + b^4 = 0$. Tolleremus secundum æquationis terminum non dissimili artificio; siquidem diuisis $2\,b$ per 4, fiet quotiens $\frac{1}{2}\,b$. Modo supponendum est $u + \frac{1}{2}\,b = a$, & ita procedendum est.

$$\begin{array}{lllll}
u^4 + 2\,b\,u^3 + \frac{3}{2}\,b^2\,u^2 + \frac{1}{2}\,b^3\,u + \frac{1}{16}\,b^4 & & & & \text{Pro } a^4 \\
\quad - 2\,b\,u^3 - 3\,b^2\,u^2 - \frac{3}{2}\,b^3\,u - \frac{1}{4}\,b^4 & & & & \text{Pro } - 2\,b\,a^3 \\
\quad\quad + 2\,b^2\,u^2 + 2\,b^3\,u + \frac{1}{2}\,b^4 & & & & \text{Pro } + 2\,b^2\,a^2 \\
\quad\quad - c^2\,u^2 - b\,c^2\,u - \frac{1}{4}\,b^2\,c^2 & & & & \text{Pro } - c^2\,a^2 \\
\quad\quad\quad - 2\,b^3\,u - b^4 & & & & \text{Pro } - 2\,b^3\,a \\
\quad\quad\quad\quad + b^4 & & & & \text{Pro } + b^4 \\
\hline
u^4 * + \frac{1}{2}\,b^2\,u^2 - b^3\,u + \frac{5}{16}\,b^4 = 0 & & & & \\
\quad - c^2\,u^2 - b\,c^2\,u - \frac{1}{4}\,b^2\,c^2 & & & &
\end{array}$$

Quomodo innotescat valor primæ radicis. Cognito autem valore ipsius u, per additionem istius $\frac{1}{2}\,b$, innotescet valor radicis a.

$$
\begin{array}{r}
u + \frac{1}{2}b \\
u + \frac{1}{2}b \\
\hline
\frac{1}{2}bu + \frac{1}{4}b^2 \\
u^2 + \frac{1}{2}bu \qquad\quad \\
\hline
u^2 + b\,u + \frac{1}{4}b^2 \\
u + \frac{1}{2}b \\
\hline
\frac{1}{2}b\,u^2 + \frac{1}{2}b^2\,u + \frac{1}{8}b^3 \\
u^3 + b\,u^2 + \frac{1}{4}b^2\,u \qquad\quad \\
\hline
u^3 + 1\frac{1}{2}bu^2 + \frac{3}{4}b^2u + \frac{1}{8}b^3 \\
u + \frac{1}{2}b \\
\hline
\frac{3}{2}bu^3 + \frac{3}{4}b^2u^2 + \frac{3}{8}b^3u + \frac{1}{16}b^4 \\
u^4 + 1\frac{1}{2}bu^3 + \frac{3}{4}b^2u^2 + \frac{1}{8}b^3u \qquad\quad \\
\hline
u^4 + 2b\,u^3 + \frac{6}{4}b^2u^2 + \frac{4}{8}b^3u + \frac{1}{16}b^4 \\
\text{Seù } u^4 + 2b\,u^3 + \frac{3}{2}b^2u^2 + \frac{1}{2}b^3u + \frac{1}{16}b^4
\end{array}
$$

Primò igitur ſcribere oportet hoc plurinomium; deindè quia ſecundus illius æquationis terminus erat $2\,b\,a^3$, oportet ducere $2\,b$ in ipſum $u^3 + 1\frac{1}{2}b\,u^2 + \frac{3}{4}b^2\,u + \frac{1}{8}b^3$, nempè cubum ex $u + \frac{1}{2}b$. Quia verò tertius terminus erat $2\,b^2a^2 - c^2a^2$; proindè $2\,b^2 - c^2$ oportet multiplicare per $u^2 + b\,u + \frac{1}{4}b^2$. Quartus autem terminus erat $2\,b^3\,a$, proindè multiplicari debet $2\,b^3$ per $u + \frac{1}{2}b$; & quidem per primam multiplicationem fit $-2bu^3 - 3\,b^2u^2 - \frac{3}{2}b^3u - \frac{1}{4}b^4$. Per ſecundam verò producitur $+2\,b^2u^2 + 2\,b^3\,u + \frac{1}{2}b^4$. Per tertiam autem producitur $-c^2u^2 - b\,c^2u - \frac{1}{4}b^2c^2$. Per quartam demum habetur $-2\,b^3\,u - b^4$.

Quemomodo Procedendū in huiuſmodi pragmatia.

Ità quoque ſi foret æquatio $a^4 - 12\,b\,a^3 \begin{array}{l} + b^2 \\ - c^2 \end{array} a^2 - b^3\,a + b^4 = 0$

Diuidatur numerus 12 per 4, numerum dimenſionum huius termini a^4, & fiet quotiens 3. Modo fiat $u + 3 = a$, & ſubſtituantur ea, quæ ſubſtituenda ſunt; reperiemus enim æquationem huiuſmodi.

Proponitur alia æquatio, et ea explicatur.

$$
\begin{array}{l}
u^4 * - 55\,b^2\,u^2 - 211\,b^3\,u - 238\,b^4 = 0 \\
\qquad - c^2\,u^2 - c^2\,6\,b\,u - c^2\,9\,b^4
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
u^4 + 12\,b\,u^3 + 54\,b^2u^2 + 108\,b^3u + 81\,b^4 & \text{Pro } a^4 \\
-12\,b\,u^3 - 108\,b^2\,u^2 - 324\,b^3\,u - 324\,b^4 & \text{Pro } -12\,b\,a^3 \\
+ b\,u^2 + 6\,b^3\,u + 9\,b^4 & \text{Pro } + b^2\,a^2 \\
- c^2\,u^2 - c^2\,6\,b\,u - c^2\,9\,b^4 & \text{Pro } - c^2\,a^2 \\
- b^3\,u - 3\,b^4 & \text{Pro } - b^3\,a \\
+ b^4 & \text{Pro } + b^4 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
u^4 * - 55\,b^2u^2 - 211\,b^3u - 238\,b^4 = 0 \\
\qquad - c^2\,u^2 - c^2\,6\,b\,u - c^2\,9\,b^4
\end{array}
$$

Vel

Tollitur secũdus æquationis terminus.

Vel etiam eiuſdem ęquationis ſecundum terminum de medio tollemus diminuendo quantitatem cognitam ſecundi termini diuiſam per numerum dimenſionum primi vnaquaque radicum verarum ſi vnus ex hiſce duobus terminis notatus fuerit ſigno $+$ alter autem ſigno $-$.

Operationis institutio.

Diuidatur itaque $2b$ per 4, vt habeatur quotiens $\frac{1}{2}b$. Faciendo igitur $\frac{1}{2}b - a = u$, ſeu $\frac{1}{2}b - u = a$, ita eſt ordinanda æquatio.

$$
\begin{array}{llr}
+\frac{1}{16}b^4 - \frac{1}{2}b^3u + \frac{3}{2}b^2u^2 - 2bu^3 + u^4 & & \text{Pro } + a^4 \\
-\frac{1}{4}b^4 + \frac{3}{2}b^3u - 3b^2u^2 + 2bu^3 & & \text{Pro } - 2ba^3 \\
+\frac{1}{2}b^4 - 2b^3u + 2b^2u^2 & & \text{Pro } + 2b^2u^2 \\
-\frac{1}{4}b^2c^2 + bc^2u - c^2u^2 & & \text{Pro } - c^2a^2 \\
-b^4 + 2b^3u & & \text{Pro } - 2b^3a \\
+b^4 & & \\
\hline
+\frac{5}{16}b^4 + b^3u + \frac{1}{2}b^2u^2 \; * \; u^4 = 0 & & \\
-\frac{1}{4}b^2c^2 + bc^2 - c^2 & &
\end{array}
$$

Proponitur æquatio altera cuius secũdus terminus tollendus sit.

Ita quoque ſi fuerit æquatio $a^4 - 6a^3 + 2a^2 - 54a + 81 = 0$. Tolleretur ſecundus terminus ſupponendo a, æquari $u + 1\frac{1}{2}$. Hoc enim pacto, vt ſupra diximus fieret æquatio operando iuxtà præcepta iam tradita, & æquatio foret huiuſmodi $u^4 * - 11\frac{1}{2}u^2 - 75u - 10\frac{11}{16} = 0$.

Si etiam foret ęquatio $a^4 - 14a^3 - 478a^2 - 686a + 2401 = 0$. Tolleretur ſecundus terminus ſupponendo $a = u + 3\frac{1}{2}$. Et operando ſecundum Artem fieret æquatio huiuſmodi $u^4 * - 551\frac{1}{2}u^2 - 4375u - 6305\frac{11}{16} = 0$.

Ad quid tendat ablatio secundi termini.

Ablatione ſecundi termini poſſunt ęquationes ſimpliciores non tranſcendentes quadratum, facili negotio explicari adeò, vt earum radices ſtatim innoteſcant. Ità plenè ſi foret æquatio $u^2 - bu = c^2$; Vel $u^2 - bu - c^2 = 0$. Diuidatur b per 2, & ſiet $\frac{1}{2}b$; ponatur autem $u - \frac{1}{2}b = a$, ſeu $u = a + \frac{1}{2}b$. Fiat autem operatio hunc in modum vt vides. Quoniam igitur erat æquatio $u^2 - bu - c^2 = 0$; proindè loco ipſius u^2, ſubſtituatur $+ a^2 + ba + \frac{1}{4}b^2$, & pro $-bu$, ſubrogetur $- ba - \frac{1}{2}a^2$, & pro $- c^2$, retineatur idem. Et quidem ſic operando reſultabit æquatio quemadmodum hic cernere licet; nimirum fiet æquatio huiuſmodi $a^2 * - \frac{1}{4}b^2 - c^2 = 0$; Vel $a^2 = \frac{1}{4}b^2 + c^2$; Cuius radix eſt iſta $\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + c^2)} = a$. Vel $a = -\sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + c^2)}$. Quamobrem prioris æquationis $u^2 - bu = c^2$, radix erit $u = \frac{1}{2}b + \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + c^2)}$; Siuè $u = \frac{1}{2}b - \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 + c^2)}$.

$$
\begin{array}{r}
a + \frac{1}{2}b \\
a + \frac{1}{2}b \\
\hline
\frac{1}{2}ba + \frac{1}{4}b^2 \\
a^2 + \frac{1}{2}ba \quad\quad\quad \\
\hline
a^2 + ba + \frac{1}{4}b^2 \\
\\
a + \frac{1}{2}b \\
- b \\
\hline
- ba - \frac{1}{2}b^2 \\
\\
a^2 + ba + \frac{1}{4}b^2 \\
- ba - \frac{1}{2}b^2 \\
- c^2 \\
\hline
a^2 * - \frac{1}{4}b^2 - c^2 = 0
\end{array}
$$

Explicatio supradictorum. Superiora declarantur.

Supponamus ad ſupradictorum maiorem declarationem æquationem eſſe huiuſmodi $1\,Q - 12\,R = 160$. Seù quod idem eſt $1\,Q - 12\,R - 160 = 0$. Et quidem $1\,R$; eſto æqualis $A + 6$, hoc eſt vna prima radix æqualis ſe-

cundæ plus 6, numero emergente ex diuisione 12, numeri radicum per 2 numerum dimensionum illius termini 1 Q; & fiat substitutio, vt vides, adeo, vt + A Q + 12 A + 36, substituatur loco ipsius + 1 Q; deinde pro — 12 R substituatur — 12 A — 72; demum retineatur idem — 160, & fiet æquatio inter A, & 14. Cumque poneremus A + 6, æquari 1 R; proindè ipsius 1 R pretium erit 20; quamobrem illius æquationis 1 Q — 12 R — 160 = 0, radix erit 20. Vel erit A = — 14; ac proindè R = 6 + 14, vel R = 6 — 14, vt dicebamus.

$$\begin{array}{r} R + 6 \\ A + 6 \\ \hline 6A + 36 \\ AQ + 6A \qquad \\ \hline AQ + 12A + 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A + 6 \\ -12 \\ \hline -12A - 72 \end{array}$$

Qua arte etiam aliter secundus æquationis terminus tollatur.

Tollitur etiam secundus æquationis terminus hunc in modum. Sit æquatio vt suprà $u^2 - b\,u - c^2 = 0$. Diuidatur b, per 2, & fit $\frac{1}{2}b$; Quamobrem fiat $\frac{1}{2}b - a = u$, & eius quadratum puta $\frac{1}{4}b^2 - b\,a + a^2$, substituatur loco ipsius u^2, propterea pro $-b\,u$ subrogetur $-\frac{1}{2}b^2 + b\,a$, ac demum constituatur in eadem æquatione idem terminus $-c^2$, & fiet æquatio $-\frac{1}{4}b^2 - c^2$ * $+ a^2 = 0$.

$$\begin{array}{r} AQ + 12A + 36 \\ -12A - 72 \\ -160 \\ \hline AQ - 196 = 0 \\ AQ = 196 \\ A = 14 \\ +6 \\ \hline 20 \end{array}$$

Quanam eruatur radix.

Siuè $a^2 = \frac{1}{4}b^2 + c^2$, erit autem radix huiusmodi. $\sqrt{}(\frac{1}{4}b^2 + c^2) = a$, siuè $a = -\sqrt{}(\frac{1}{4}b^2 + c^2)$, ac proinde u, æquabitur $\frac{1}{2}b - \sqrt{}(\frac{1}{4}b^2 + c^2)$, Siuè u, æquabitur $\frac{1}{2}b + \sqrt{}(\frac{1}{4}b^2 + c^2)$. Quæ nos facile quidem numeris explicabimus.

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}b - a \\ \frac{1}{2}b - a \\ \hline -\frac{1}{2}ba + a^2 \\ \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}ba \qquad\quad \\ \hline \frac{1}{4}b^2 - ba + a^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}b - a \\ -b \\ \hline -\frac{1}{2}b^2 + ba \end{array}$$

$$\begin{array}{l} +\frac{1}{4}b^2 - ba + a^2 \\ -\frac{1}{2}b^2 + ba \\ -c^2 \\ \hline -\frac{1}{4}b^2 - c^2 * + a^2 = 0 \end{array}$$

Supponamus æquationem eandem 1 Q — 12 R = 160; Siuè 1 Q = 12 R — 160 = 0. Dicamus autem 6 — A, æquari 1 R; proindè quadratum ipsius erit 36 — 12 A + A Q, substituendum pro 1 Q. Insuper ducamus 6 — A, in — 12; & fiet — 72 + 12 A. Atque demum retento eodem numero 160 fiet æquatio.

— 196 + A Q = 0; Seù A Q = 196; quare A, æquabitur 14, ac proindè cum diceremus 6 — A, æquari 1 R; si ex hactenus dictis rem explicemus; comperiemus A, æquari 14; Vel A, æquari — 14; atq; adeò 1 R æquari 6 — 14, vel 1 R, æquari 6 + 14.

Dicebā-

Falsæ radices æquationis euadunt veræ; at veræ non fiunt falsæ.

Dicebamus suprà bene fieri posse, vt falsæ radices æquationis euadant veræ; neque tamen veræ falsę fiant. In cuius gratiam illud non est silentio prætereundum, quod scilicet dum verarum radicum valor augetur quantitate maiori aliqua radice ex falsis; omnes radices veræ semper fieri possint; adeò vt non intersint duo signa ✠, aut duo signa —, quæ nimirum se inuicem consequantur. Præterea, vt quantitas cognita tertij termini quadrato semissis secundi sit maior. Licet enim id fiat incognitis falsis radicibus; nihilo tamen secius de ipsarum magnitudine iudicium ferri potest; atque aliquam assumere quantitatem haud est difficile, quæ ipsas in tantum, vel plus superet, quantum ad id requisitum esse iudicatur, atque requiritur.

Radices æquationis quamuis incognitæ, multiplicari diuidiq; possunt per quamlibet cognitã quantitatem.

Radices alicuius æquationis quantumuis incognitę, multiplicari diuidique possunt per quamlibet cognitam quantitatem. Hoc autem fit supponendo quantitatem incognitam, multiplicatam, vel diuisam per quantitatem illam, quæ multiplicare, vel diuiderę debet radices ipsas; supponendo inquam alicui alteri æqualem esse. Deinde verò multiplicando, vel diuidendo cognitam quantitatem secundi termini per hanc ipsam, quę multiplicare, vel diuidere debet radices; & per ipsius quadratum, quantitatem tertij, & per eiusdem cubum quantitatem quarti; atque ità deinceps ad vltimum vsque terminum procedendo. Hæc autem operatio vtilissima quidem est; propterea quod maximè conducit ad reductionem quantitatum fractarum ad integras, atque adeò ad hoc vt fracti numeri ad integros reuocentur: & etiam, vt surdi ad rationales redigantur.

Proponitur æquatio cuius loco alia substituenda sit, in qua omnes termini per numeros rationales exprimantur.

Supponamus æquationem esse huiusmodi $a^3 - a^2$ ℞ 3 † $\frac{26}{27}$ a — $\frac{8}{27}$ $\frac{}{\text{℞ } 3}$ $=$ o

Si altera desideretur æquatio, in qua quidem omnes termini per rationales numeros exprimantur. Oportet supponere e $=$ a ℞ 3; deinde multiplicanda est ℞ 3, quantitas cognita secundi termini; quæ quidem est quoque ℞ 3; modo per 3 quadratum ipsius multiplicari debet quantitas tertij termini, quæ est $\frac{26}{27}$; demum per cubum eiusdem, qualis est 3 ℞ 3, seù ℞ 27; multiplicari debet quantitas postremi termini, nempè $\frac{8}{27}$ $\frac{}{\text{℞ } 3}$; fiet enim æquatio $e^3 - 3\,e^2$ † $\frac{26}{9}$ e — $\frac{8}{9}$ $=$ o. In qua termini sunt omnes rationales. Rem autem sic se habere patet; Si namque ℞ 3, secundus terminus, ducatur in ℞ 3; cui quidem ducto in a, fecimus æqualem e; fiet 3 pro secundo termino; quamobrem erit $e^3 - 3\,e^2$. At verò si per 3 quadratum illius, multiplicetur $\frac{26}{27}$, tertius terminus; & producetur $\frac{26}{9}$, atque erit $e^3 -$ $3\,e^2 -$ $\frac{26}{9}$ e. Idem est enim ducere $\frac{26}{9}$, in 3, multiplicando 26 per 3, relicto eodem denominatore: ac eundem retinere numeratorem diuiso denominatore per 3. Modo ducamus $\frac{8}{27}$ $\frac{}{\text{℞ } 3}$; in cubum ipsius ℞ 3; cubus est 3 ℞ 3 seù ℞ 27, qua ducta in 8 fit ℞ 1728. Si verò ducatur ℞ 3 in 27, fit ℞ 2187. At si reuocemus fractionem hanc $\frac{\text{℞ } 1728}{\text{℞ } 2187}$, ad minores terminos, fractio illa reducetur ad hanc $\frac{\text{℞ } 64}{\text{℞ } 81}$ hoc est $\frac{8}{9}$; erit itaque $\frac{8}{9}$, vltimus æquationis terminus; ac proinde fiet æquatio $e^3 - 3\,e^2$ † $\frac{26}{9}$ e — $\frac{8}{9}$ $=$ o.

Propositum artificium exemplo explicatur.

Sed hoc artificium declarare præstabit vno, vel altero exemplo in numeris rationalibus. Esto igitur æquatio 1 c — 4 q † 10 R — 132 $=$ o, cuius est radix 6. Dicamus itaque e, æquari 4 R; & fiat e^3, loco ipsius 1 c; deindè multiplicetur 4, quantitas cognita secundi termini per 4, & fiet 16; scribaturque — 16 e^2, pro secundo termino; deindè sumatur 16, quadratum ex 4, atque ducatur in 10, quantitatem cognitam tertij termini, & producetur † 160 e; pro tertio termino; mox autem cubicè multiplicetur 4, vt fiat 64, in quem ducatur 132; vt fiat 8448; erit igitur æquatio $e^3 - 16\,e^2$ † 160 e — 8448 $=$ o.

Cùm autem diceremus e, æquari 4 R, essetque radix 6; proinde e valebit 24; & ità 24, radix erit huius æquationis $e^3 - 16 e^2$ † 160 e — 8448 $=$ o; & ita est, namque cubus ex 24, est 13824, cui si addatur 3840, pretium numeri 160 e, fit 17664, cui si dematur 9216, pretium numeri 16 e^2, fit residuum 8448; rectè proindè instituitur operatio; & habetur æquatio $e^3 - 16\,e^2$ ✠ 160 e — 8448 $=$ o.

Alia proponitur æquatio.

Sit alia æquatio puta 1 c — 6 q † 40 R — 800 $=$ o; cuius radix est 10. Supponamus e, æquari 6 R, ducatur 6, quantitas cognita secundi termini in 6, fit 36; & erit $e^3 - 36 e^2$; deinde multiplicetur 6, in se nempè quadraticè, vt fiat 36, mox

ducatur

ducatur 40, in 36, vt producatur 1440, atque adeò, fiat $e^3 - 36e^2 + 1440\,e$, demum sumatur, cubus ipsius 6, nempè 216, ducatur in 800, vt fiat — 171800; quamobrem erit æquatio $e^3 - 36\,e^2 + 1440\,e - 172800 = 0$; huius autem radix erit 60; cum enim e, posuerimus, æquari 6 R, radix verò valeret 10; consequenter 6 R, valebunt 60; atque adeò huius æquationis radix erit 60; cubus erit 216000; 1440 e, valebunt 86400, additione facta, habebitur 302400, à quo si subtrahatur 129600, pretium ipsius $36e^2$, remanebit 172800, à quo si auferatur 172800; remanebit 0. Itaque rectè instituta est operatio, quam etiam possumus exercere in vno, vel alio exemplo, in quo reperiantur numeri irrationales; eadem enim regula eodem modo rectè semper colliget, quod intendimus. *Continuatio explicationis supradictæ.*

Sit rursus æquatio $a^3 - a^2$ ℞ 24 + 12 a — ℞ 216 = 0. Supponamus e, æquari a ℞ 24, deinde multiplicari debet ℞ 24, per ℞ 24, & fit 24, scribatur itaque $e^3 - 24\,e^2$; deindè quadraticè multiplicetur ℞ 24, vt fiat productum 24, quod duci debet in 12, vt fiat 288, erit igitur $e^3 - 24\,e^2 + 288\,e$, demum cubicè multiplicetur ℞ 24, vt fiat productum ℞ 13824; quo ducto in ℞ 216, fit productum ℞ 2985984, nempe 1728, est enim hic numerus quadratus, cum eius radix sit 1728. Nunc erit æquatio ista $e^3 - 24\,e^2 + 288\,e - 1728 = 0$. Cum autem diceremus e, æquari a ℞ 24, & illius æquationis radix esset ℞ 6, consequenter a ℞ 24, valebit ℞ 144, nempè 12, huius cubus est 1728, cui addi debet ob signum +, 3456, pretium ipsius 298 e, & fit 5184, à quo subtrahi debet 1728, ob signum —, & à residuo 3456, subduci debet 3456, pretium quadratorum, puta $24\,e^2$, & nihil remanet; quamobrem, rectè dicebamus operationem ad eum modum institui.

Posset etiam desiderari, vt loco illius suprapositæ æquationis alia substitueretur, in qua omnes quantitates cognitæ solis integris numeris exprimerentur; id autem fit supponendo $u = 3\,e$, multiplicando verò 3, per 3, $\frac{26}{9}$ per 9, & $\frac{8}{9}$, per 27; fiet enim æquatio $u^3 - 9\,u^2 + 26\,u - 24 = 0$. Huius autem æquationis radices sunt 2, 3, 4; illius verò erant $\frac{2}{3}$; 1, & $\frac{4}{3}$. Superioris autem erunt $\frac{2}{3}$ ℞ 3. $\frac{1}{1}$ ℞ 3, $\frac{4}{3}$ ℞ 3. *Quomodo loco vnius æquationis alia substituatur.*

Hæc autem nos longè melius intelligemus supponentes aliquam æquationem numeris exhibitam. Sit igitur $a^3 - 6\,a^2 + 3\frac{1}{5}\,a - \frac{768}{5} = 0$. Si itaque loco istius alia substituenda est, in qua quantitates omnes cognitæ solis integris numeris exprimantur. Oportet supponere $e = 5\,a$. Et quidem a, radix illius æquationis valet 8; quamobrem 5 a, valebunt 40; proindè e, valebit pariter 40. Multiplicemus autem 6, per 5, fit 30, insuper $3\frac{1}{5}$, per 25, fit 80; & $\frac{768}{5}$ per 125 vndè erit $e^3 - 30\,e^2 + 80\,e - 19200 = 0$. Huius autem æquationis radix est 40, vt vnusquisque poterit experiri. *Supradicta explicantur.*

Sit æquatio $e^3 - 6\,e^2 + 3\frac{1}{6}\,e - 153\frac{2}{6} = 0$. Supponamus u, æquari 6 e, & fiet æquatio $u^3 - 36\,u^2 + 114\,u - 33120 = 0$. Debet enim 6, secundus terminus duci in 6, vt fiat 36. pro secundo termino nouæ æquationis; Deindè $3\frac{1}{6}$, duci debet in 36, quadratum ex 6, vt fiat 114; demum $153\frac{2}{6}$, duci debet in 116, cubum ex 6, vt habeatur 33120; & fiat æquatio $u^3 - 36\,u^2 + 114\,u - 33120 = 0$. Huius autem æquationis radix est 48; si itaque diuidamus 48, per 6, innotescet radix illius prioris æquationis. *Proponuntur alia ad idem.*

Quod si æquatio illa superior sic se habeat $e^3 - 6\,e^2 + 3\frac{1}{6}\,e - 153\frac{1}{3} = 0$; adeò vt fractio illa $\frac{2}{6}$, ad minimos terminos sit redacta. Oportet 6, secundum terminum ducere in 3; denominatorem fractionis, vt fiat 18, pro secundo termino nouæ æquationis; deindè $3\frac{1}{6}$, duci debet in 9, quadratum ex 3, vt fiat $28\frac{1}{2}$, pro tertio termino; demum oportet ducere $153\frac{1}{3}$, in 27, cubum ex 3, vt habeatur 4140, erit igitur æquatio huiusmodi $u^3 - 18\,u^2 + 28\frac{1}{2}\,u - 4140 = 0$. Istius autem æquationis radix est 24, si itaque hic numerus diuidatur per 3, orietur quotiens 8, & radix prioris æquationis. *Quando superior æquatio alio se haberet modo.*

Illud insuper non ignorandum est; hoc nil aliud esse, quàm multiplicare terminos æquationis per terminos continuè proportionales. Si enim sit æquatio. *Quid sit superiorem æquationem perficere.*

$$c^3 - 6c^2 + 3\frac{1}{4}c - 153\frac{3}{4} = 0$$
$$1 \;.\; 6 \;.\; 36 \;.\; 216$$

Supradictorum comprobatio. Liquido constat dum fit multiplicatio, vt suprà dicebamus multiplicari terminos æquationis per terminos proportionales 1. 6. 36. 216.

Ità etiam dum illa superior æquatio $a^3 - 6a^2 + 3\frac{1}{5}a - \frac{768}{5} = 0$; reducebatur ad aliam hanc $c^3 - 30c^2 + 80c^1 - 19200$, fit multiplicatio terminorum per numeros continuè proportionales.

$$a^3 - 6a^2 + 3\frac{1}{5}a - \frac{768}{5} = 0$$
$$1 \;.\; 5 \;.\; 25 \;.\; 125\;;$$

Adnotanda quædam. Prætereundum tamen non est, nimirùm quemadmodum æquationes ope multiplicationis à fractionibus liberantur, & ad faciliores reducuntur, ita quoque plerumque beneficio diuisionis in faciliores transmutari posse; si videlicet id lubet ob prolixos terminos, qui laboriosiorem æquationis explicationem reddunt.

Vt si foret æquatio $a^3 - 0a^2 - 504a - 86400 = 0$. Diuidantur eius termini per numeros propoitionales nimirum 1, 6, 36; 216.

$$a^3 - 0a^2 - 504a - 86400 = 0$$
$$1 \;.\; 6 \;.\; 36 \;.\; 216\;.$$

Fiet enim æquatio huiusmodi $c^3 - 0c^2 - 14c - 400 = 0$

Illius autem æquationis radix erat 48; huius verò erit 8, quandoquidem instituta est diuisio per 6; si igitur 8, multiplicemus per 6, quandoquidem instituta fuit diuisio per 6, fiet 48, radix prioris æquationis.

Hoc est Isomoeriæ opus supra explicatum. Huc spectat Isomoeriæ opus iam superiùs explicatum. Vnde dicebamus. Si $a^3 +$ $\frac{b\text{ sol. } a^1}{d}$ æquetur z solido ex hypothesi quod d a sit e planum; etiam ex ijs, quæ proponuntur $\frac{e\text{ pl. cubus} + b\text{ sol. } d\text{ e pl.}}{d^3}$ æquabitur z solido; omnibusque ductis in d^3, & e pl. cub. + b sol. d e pl. æquab. z sol. d^3, & ita de alijs quæ supra videri possunt, vbi etiam & methodum alteram aperuimus. Ita pariter si $a^4 + \frac{b\text{ sol. } a}{d}$ æquaretur $\frac{z\text{ pl. pl.}}{d}$ ex hypothesi quod d a sit e planum, ex ijs quæ proponuntur; $\frac{e\text{ pl. cubus} + b\text{ sol. } d\text{ e pl.}}{d^4}$ æquatur $\frac{z\text{ pl. pl.}}{d}$, & omnibus applicaris ad d^4 fit e pl. cubus + b sol. d e pl. = z pl. pl. d^3 Vide, quæ supra de Isomoeria tractantes, attulimus.

Aduertendum autem circa ea, quæ ibi diximus, idem esse $\frac{e\text{ pl. cub.}}{d^3} + \frac{b\text{ sol. e pl.}}{d^2}$ ac est $\frac{e\text{ pl. cub.} + b\text{ sol. } d\text{ e pl.}}{d^3}$, namque $\frac{b\text{ solidū e pl.}}{d^2}$ est fractio cuius numerator b sol. e pl, & denominator d^2 si per eandem quantitatem d multiplicetur, fit $\frac{b\text{ sol. } d\text{ e pl.}}{d^3}$ illi fractioni æqualis.

Ad quid hæc operatio conducat. Hæc autem operatio conducit feliciter ad faciendam quantitatem cognitam alicuius termini in æquatione alicui datæ æqualem. Esto æquatio $a^3 * - c^2 a + d^3 = 0$. Oporteat æquationem instituere, vt eius tertius terminus non sit c^2, vt hìc, sed potius $3b^2$. Supponamus e, æquari a $\frac{\text{℞ } 3b^2}{c^2}$, modo autem scribendum est $e^3 * - 3b^2 e + \frac{3b^3 d^3}{c^3}$ ℞ $3 = 0$. Hoc autem sic intelligendum est. Si supponamus e, æquari a $\frac{\text{℞ } 3b^2}{c^2}$, siuè e, æquari $\frac{ba}{c}$ ℞ 3, erit $a = \frac{ce}{b \text{ ℞ } 3}$, & consequenter $a^2 = \frac{c^2e^2}{3b^2}$, & $a^3 = \frac{c^3e^3}{3b^3 \text{ ℞ } 3}$, quæ sunt in æquatione substituenda; vt habeatur $\frac{c^3e^3}{3b^3\text{ ℞ } 3} * - \frac{c^3e}{b \text{ ℞ } 3} + d^3 = 0$, & per communem multiplicationem ipsius $3b^3$ ℞ 3, fiet $c^3e^3 * - 3b^2c^3e + 3b^3d^3$ ℞ $3 = 0$; & per diuisionem ipsius c^3, fiet $e^3 * - 3b^2 e - \frac{3b^3d^3}{c^3}$ ℞ $3 = 0$.

Supradictorum declaratio. Cæterum declaranda sunt superiùs dicta. Oportet aduertere idem esse a $\frac{\text{℞ } 3b^2}{c^2}$; ac est $\frac{ba}{c}$ ℞ 3. Nam, vt id clarius appareat. Supponamus a, valere 6; deindè loco ipsius ℞ 3, accipiamus numerum rationalem, eumque tamquam irrationalem tractemus. Sit igitur ℞ 4, & quidem deprehendemus idem esse a $\frac{\text{℞ } 4b^2}{c^2}$, ac est $\frac{ba}{c}$ ℞ 4.

Explicatio supradictorum. Supponamus b, valere 4, & c, valere 2, item a, valere 6. Iam constat a $\frac{\text{℞ } 4b^2}{c^2}$; idem

idem esse quod numerus 64, nempè 4 b^2, diuidatur per c^2, nimirum per 4, vt fiat 16, cuius radix 4, ducatur in a, nempè 6, fiet enim 24. At idem numerus prouenit si 4, nimirum b, ducatur in a, scilicet 6; numerusque productus 24, diuidatur per c, videlicet 2, vt proueniat 12, quo ducto in ℞ 4, nempè 2, prouenit 24. Item si sit a $\frac{℞\,9\,bb}{cc}$, idem erit quod $\frac{ba}{c}$ ℞ 9. Supponamus enim a, valere 6, & b, valere 8, cuius quadratum est 64, & c, valere 2, cuius quadratum est 4; ducamus 64, in 9, fit 5769 est quidem numerus, si diuidatur per 4, quadratum ipsius 2, fit quotiens 144, cuius radix est 12, qua ducta in 6, fit 72; tantum habetur pro $\frac{ba}{c}$ ℞ 9, siquidem b, valet 8, & a, valet 6, quare b a valebit 48, quo diuiso per c, uempe 2, fit 24, quo ducto in 3, nimirùm radicem quadratam numeri 9, fit 72, vt prius.

Cæterum si sit e $=$ a $\frac{℞\,3\,bb}{cc}$, erit idem quod e $= \frac{ba}{c}$ ℞ 3, & erit a $= \frac{ce}{b\,℞\,3}$, & $a^2 = \frac{c^2e^2}{3b}$, & $a^3 = \frac{c^3e^3}{3b^3\,℞\,3}$. Quæ quidem si in æquatione substituantur, habebitur æquatio huiusmodi $\frac{c^3e^3}{3b^3\,℞\,3}$ * $- \frac{ce}{b\,℞\,3}$ † $d^3 = 0$, & per communem multiplicationem ipsius 3 b^3 ℞ 3, fiet $c^3 e^3$ * $- 3\,b^2 c^2 e$ † $3\,b^3 d^3$ ℞ $3 = 0$, & per communem diuisionem ipsius c^3, fiet e^3 * $- 3\,b^2 e - \frac{3b^3d^3}{c^3}$ ℞ $3 = 0$. *Explicantur superius dicta.*

Dicebamus autem a, æquari $\frac{ce}{b\,℞\,3}$; cum enim e, æquaretur $\frac{ba}{c}$ ℞ 3, sequitur a, æquari $\frac{ce}{b\,℞\,3}$; quandoquidem si supponamus b, esse 4, & a, esse 5, b a, erit 20, quo diuiso per c, quam suppono esse 2, fit quotiens 10, quem duco in 6, numerum ad libitum, quidem suppositum loco ipsius ℞ 3, fit 60 pro e; modo si c, nempè 2, ducatur in e, scilicet 60 fit 120, quo diuiso per 4, ducto in 6, hoc est per 24, qui quidem numerus respondet b ℞ 3; quemadmodum 120 respondet c e, fit 5, pro a. *Eorundem explicatio continuata.*

Modo tractandum superest de cubicarum æquationum reductione, cum Problema planum extiterit. Id autem assequemur primo liberata æquatione à numerorum fractionibus, & à numeris surdis si qui intercesserint perpendendo ordinatim quantitates omnes, quæ absque fractione terminum vltimum diuidere possunt. Is enim peractis videndum est, num aliqua ex ipsis iuncta cum quantitate incognita per notam †, vel —, binomium componere possit à quo tota summa diuidatur; id enim argumento erit problema planum esse. Aut enim cognita quantitas huiusce binomij radix erit quæsita: vel æquatio diuisa per binomium prædictum ad duas erit dimensiones reuocata, cuius radix citrà difficultatem comparari potest. *De cubicarum æquationum reductione instituitur tractatio.*

Sit igitur æquatio $e^6 - 8\,e^4 - 124\,e^2 - 64 = 0$. Obseruandum est per quos numeros vltimus terminus 64, diuidi possit: reperiemus ad huiuscemodi diuisionem istos idoneos esse 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Quare examinando, ac perpendendo æquationem hanc, quam diximus num diuisionem patiatur per aliquod ex his binomijs $e^2 - 1$, vel e^2 † 1, item $e^2 - 2$, &c. Comperiemus æquationem diuid posse per $e^2 - 16$; diuisio autem hunc in modum instituitur. *Exemplum.*

Diuidatur	✠ $e^6 - 8\,e^4 - 124\,e^2 - 64$	-64	✠ 4
Per $e^2 - 16$	✠ $e^6 - 8\,e^4 - 4\,e^2 - 64$	-16	
		$-128\,e^2$	† $8\,e^2$
	$-16\,e^4 - 128\,e^2$	-16	
	$-16\,e^4 - 128\,e^2$		
		$-16\,e^4$	† $1\,e^4$
	0 0	-16	

Fit autem quotiens † 1 e^4 † 8 e^2 † 4.

Hæc verò diuiso tali pacto perficitur. Sumatur initium ab vltimo termino -64; diuidatur igitur -64, per -16, & fit quotiens † 4, constituendus ex parte quotientis multiplicetur ✠ 4 per -16 fitque -64, & per ✠ e^2, fitque ✠ 4 e^2 constituendum sub diuidendo, vt vides affectum tamen nota — (scribendum est enim, semper signum ✠, vel —, planè contrarium illi quod multiplicatione *Quomodo diuisio perficiatur.*

produ-

producitur, si volumus operationem addendo perficere; Sin autem scribatur, vt scribi debet ✠, vel —, &c.) facta additione, ipsius — 4 c^2 ad — 124 c^2, fit — 128 c^2, quod diuidatur per — 16, vt fiat quotiens ✠ 8 c^2, ducatur autem ✠ 8 c^2, in † c^2, fit* — 8 c^4, constituatur sub — 8 c^4, additione facta, habebitur — 16 c^4, quo diuiso per — 16, fit quotiens † 1 c^4, quo ducto in ✠ c^2, fit † 1 c^6, quo subtracto ex c^6, nihil remanet, & ita adimpleta est diuisio. Huius porrò æquationis c^6 — 8 c^4 — 124 c^2 — 64 = 0, radix est 16. Aduerte c^6 sumi pro cubo, &c.

Contraria scilicet nota, &c. Vel fit — c 6, addendũ ipsi ✠ c 6; vt remaneat 0.

Proponitur æquatio.

Sit æquatio ✠ c^6 — 12 c^4 — 520 c^2 — 600 = 0
Diuidatur — c^6 — 18 c^4 — 20 c^2 ✠ 600
Per c^2 — 30

0 — 30 c^4 — 540 c^2 0
— 30 c^4 — 540 c^2

0 0

— 600 — 30	† 20
— 540 c^2 — 30	✠ 18 c^2
— 30 c^4 — 30	✠ 1 c^4

Fit quotiens 1 c^4 ✠ 18 c^2 ✠ 20 = 0.
Huius autem æquationis c^6 — 12 c^4 — 520 c^2 — 600, radix est 30.

Alia æquatio

Sit æquatio ✠ c^6 — 30 c^4 — 960 c^2 — 2000 = 0
Diuidatur — c^6 — 20 c^4 — 40 c^2 ✠ 2000
per c^2 — 50

0 — 50 c^4 — 1000 c^2 0
— 50 c^4 — 1000 c^2

0 0

— 2000 — 50	✠ 40
— 1000 c^2 — 50	† 20 c^2
— 50 c^4 — 50	✠ 1 c^4

Fit quotiens 1 c^4 ✠ 20 c^2 ✠ 40
Huius autem æquationis c^6 — 30 c^4 — 960 c^2 — 2000 = 0.
Radix est 50.

Tertia æquatio.

Sit æquatio c^6 ✠ 32 c^4 — 380 c^2 — 400 = 0
Diuidatur — c^6 — 42 c^4 — 40 c^2 ✠ 400
per c^2 — 10

0 — 10 c^4 — 420 c^2 0
— 10 c^4 — 420 c^2

0 0

— 400 — 10	✠ 40
— 420 c^2 — 10	✠ 42 c^2
— 10 c^4 — 10	✠ 1 c^4

Fit quotiens 1 c^4 ✠ 42 c^2 ✠ 40
Huius æquationis c^6 ✠ 32 c^4 — 380 c^2 — 400 = 0.
Radix est 10.

SCHOLION

SCHOLION.

Notanda quædam circa supradicta.

HIc porro considerandum occurrit, suprapositam diuisionem trifariam institui posse, vel subtrahendo, vel addendo; vel partim subtrahendo, & partim addendo. Prius exemplum, cùm diuideremus $+ e^6 - 8\,e^4 - 124\,e^2 - 64$ *per* $e^2 - 16$, *itaut fieret quotiens* $+ 1\,e^4 + 8\,e^2 + 4$, *instituta est partim subtrahendo, & partim diuidendo, subtrahendo, quia scribimus 64, affectum nota* $-$, *quæ reuera prouenit ex multiplicatione* $+ 4$ *per* $- 16$, *vnde subtrahitur* $- 64$ *ex* $- 64$; *insuper scribimus* e^6 *affectum nota* $+$, *quæ re vera prouenit ex multiplicatione* $+ 1\,e^4$ *in* $+ e^2$, *at verò* $4\,e^2$, *scribimus affectum nota* $-$, *contraria illi, quæ alioquin prorsus multiplicatione producitur, fitque additio ipsius* $- 4\,e^2$ *ad* $- 124\,e^2$. *Deinde scribimus* $8\,e^4$, *affectum nota contraria illi, quæ alioquin multiplicatione producitur, & fit additio ipsius* $- 8\,e^4$. *Itaque operatio ipsa facta est partim subtrahendo, & partim addendo. In idem autem recidit; si fiat omnino subtrahendo; nam si loco* $- 4\,e^2$, *scribatur* $+ 4\,e^2$, *instituta subtractione ob notas affectionis contraria, prouenit* $- 128\,e^2$, *nec dissimiliter, si loco* $- 8\,e^4$ *scriberemus* $\dagger\, 8\,e^4$, *instituta subtractione, proueniet* $- e^4$, *vt patet ex præceptis supratraditis. Quod si omnino addendo fieri deberet; Primò 64, scribemus affectum nota* $+$ *contraria illi, quæ multiplicatione producitur, nec dissimiliter de aliјs; vnde stabit hoc modo. Præstat tamen instituere ipsam operationem semper subtrahendo.*

In idem recidit si operatio fiat subtrahendo.

Præstat instituere operationè semper subtrahendo.

Diuidatur	$+ e^6 - 8\,e^4 - 124\,e^2 - 64$	$- 64$ $- 16$	$+ 4$
per $e^2 - 16$	$- e^6 - 8\,e^4 - \quad 4\,e^2 + 64$	$- 128\,e^2$ $- 16$	$+ 8\,e^2$
	$0 - 16e^4 - 128\,e^2 \;\; 0$	$- 16\,e^4$ $- 16$	$+ 1\,e^4$
	$- 16e^4 - 128\,e^2$		
	$0 \qquad 0$		

Cætera autem exempla facta sunt semper addendo. Hæc autem animaduertisse iuuat ad maiorem supradictorum explicationem. Superioris operationis comprobatio sic se habet. Itaque huiusmodi operatio perficitur, vel partim subtrahendo, & partim addendo, vel subtrahendo tantùm, vel addendo tantùm vt supra explicatum fuit.

$$
\begin{array}{r}
e^4 \dagger 8\,e^2 + 4 \\
e^2 - 16 \\
\hline
- 16\,e^4 - 128\,e^2 - 64 \\
e^6 + 8\,e^4 + 4\,e^2 \qquad\quad \\
\hline
e^6 - 8\,e^4 - 124\,e^2 - 64
\end{array}
$$

Hæc pragmatia facta est addendo.

Sit æquatio	$+ e^6 + 10\,e^4 - 44\,e^2 - 48 = 0$	$- 48$ $- 4$	$+ 12$
Diuidatur	$- e^6 - 14\,e^4 - 12\,e^2 + 48$	$- 56\,e^2$ $- 4$	$+ 14\,e^2$
per $e^2 - 4$	$0 - 4\,e^4 - 56\,e^2 \qquad 0$	$- 4\,e^4$ $- 4$	$\dagger\, 1\,e^4$
	$- 4\,e^4 - 56\,e^2$		
	$0 \qquad 0$		

Huius æquationis $e^6 + 10\,e^4 - 44\,e^2 - 48 = 0$.
Radix est 4.

Hæc pragmatia instituta est subtrahendo.

$$\begin{array}{llr|r}
\text{Diuidatur} & & + c^6 + b^2 c^4 - 2 c^2 e^4 - b^4 e^2 + c^4 c^2 - b^6 - 2 b^2 c^2 - b^2 c^4 & + 2 b^2 c^2 e^2 \\
\text{per } c^2 - b^2 - c^2) & & + e^6 - b^2 e^4 - c^2 e^4 - 2 b^4 e^2 + c^4 c^2 - b^6 - b^4 c^2 - b^2 c^4 & + 2 b^2 c^2 e^2 \\
\hline
& & + 2 b^2 e^4 - c^2 c^4 + b^4 e^2 \quad\quad - b^4 c^2 & + b^2 c^2 e^2 \\
& & + 2 b^2 e^4 - c^2 c^4 + b^4 e^2 & + b^2 c^2 e^2 \\
\hline
& & 0 \quad 0 \quad 0 & 0 \\
\hline
\text{Quotiens} & & + c^4 + 2 b^2 c^2 - c^2 c^2 + b^4 + b^2 c^2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{array}{c} + c^6 \\ + c^2 \end{array} & \begin{array}{c} + c^4 + 2 b^2 c^4 \\ + \quad e^2 \end{array} & \begin{array}{c} + 2 b^2 c^2 - c^2 c^4 \\ + \quad c^2 \end{array} & - c^2 e^2 \\
\begin{array}{c} + b^4 c^2 \\ + \quad c^2 \end{array} & \begin{array}{c} + b^4 + b^2 c^2 c^2 \\ + \quad e^2 \end{array} & + b^2 c^2 &
\end{array}$$

Animaduersio supradicta.

Huius autem æquationis radix est $b^2 + c^2$. Animaduertendum autem est, nos superiùs non vsurpasse e^6 pro quantitate sex dimensionum, sed pro quantitate trium tantummodo; siquidem in illa æquatione non reperiuntur e^5, e^3, neque e; Ac proinde commodissimè pro illa substitui potest ista $u^3 + b^2 u^2 - 2 c^2 u^2 - b^4 u + c^4 u - b^6 - 2 b^4 c^2 - b^2 c^4 = 0$. Nempè supponendo u, æquari e^2, atque substituendo u^2, in locum ipsius e^4, & u^3, in locum ipsius e^6. Cognito autem pretio huius u, extractione radicis ex eodem; peruenitur in cognitionem ipsius e.

Neque dissimili modo; si sit æquatio $a^4 = - b a^2 + c^2$; Possunt enim quatuor dimensiones ipsius a^4, ad duas reuocari, & itá æquatio institui poterit $e^2 = - b e + c^2$. Supponendo nimirum e^2, æquari a^4, atque adeò e, æquari a^2; quamobrem sicuti illius æquationis sit radix $e = - \frac{1}{2} b + \text{R}(\frac{1}{4} b^2 + c^2)$ itá radix illius erit $a = \text{R}(- \frac{1}{2} b + \text{R}(\frac{1}{4} b^2 + c^2))$.

Proponitur æquatio, eiusque reductio.

Sit æquatio $a^4 + 30 a^2 = 25056$.

Potest ad hanc reuocari $e^2 + 30 e = 25056$; in idem enim recidit cum superiori; eadem enim radix extrahitur. Cùm autem supponeremus e, æquari a^2, innotuit verò 144, pro pretio ipsius e; ergo a^2, valebit 144, quare a, valebit 12, vt enim a, est radix ipsius a^2, itá 12, est radix numeri 144.

Quando fuerit æquatio, in qua incognita quantitas quatuor est dimensionum.

Quod si fuerit æquatio, in qua quidem incognita quantitas quatuor dimensiones habeat, sublatis surdis, fractisque numeris; quando ij intercesserint: perpendendum est, num binomium reperiri possit constans ex incognita quantitate +, vel —, aliqua quantitate diuidente sine fractione terminum vltimum æquationis, quod quidem binomium totam diuidat summam. Si enim hoc binomium reperiatur, aut cognita quantitas, huius binomij erit quæsita radix, vel saltem diuisione confecta, relinquentur tantummodo in equatione tres dimensiones, adeò vt illa iterum examini sit exponenda. Si verò non contingat huiusmodi binomium reperiri: oportet augendo, minuendoque radicis valorem, tollere secundum terminum summæ; deindè ipsam ad aliam reuocare, quæ tres tantummodo dimensiones contineat.

Proponitur æquatio, & Ars explicatur, qua fiat reductio.

Si proponatur æquatio $+ a^4 * p a^2 \; q a \; r = 0$.

Oportebit æquationem hunc in modum scribere:

$$+ e^6 \; 2 p e^4 \; \begin{matrix} + p^2 \\ 4 r \end{matrix} e^2 - q^2 = 0$$

Id autem maiusculis characteribus intueri licebit, vt hìc inferiùs patet.

+ AQQ*

$$\dagger AQQ^* \quad PAQ \quad QA \quad R = o.$$

Hoc eſt ✠ AQQ* P in AQ Q in A R = o.
Deindè verò oportebit ſcribere, vt infrà.

$$\dagger ECC \quad PEQQ2 \quad \begin{matrix} PQ \\ R\,4 \end{matrix} \quad EQ - QQ^{:''} = o.$$

Hoc eſt † ECC P in EQQbis $\begin{matrix} \dagger\ PQ \\ R\ \text{quater} \end{matrix}$ EQ — Q quadrato = o.

Ad ſigna verò ✠, & — quod attinet, illud non ignorandum; quod ſi habeatur ✠ p, in priori æquatione: in poſteriori ſcribi debet ✠ 2 p; vel ſi habeatur — p, ponere oportet — 2 p, & contrà; quod ſi habeatur ✠ r, hic oportebit ſcribere — 4 r; & ſi demum ſit vel ✠, vel — q, perpetuò hic ſcribere oportet — q^2, & † p^2, ſeltem cum a^2, & e^6, ſignis ✠ affectæ affectæ ſupponuntur. Quod ſi ſignis — afficiantur; oppoſitum fieri debet. *Notanda quedam circa ſigna ✠, & —*

Sit æquatio, vt vides ✠ a^4 * — 4 a^2 — 8 a ✠ 35 = o.

$$✠\ a^4 * - 4\,a^2 - 8\,a\ ✠\ 35 = o.$$

$$✠\ e^6 - 2\,p\,e^4 \quad \begin{matrix} ✠\ p^2 \\ -\,4\,r \end{matrix} \quad e^2 - q^2 = o.$$

$$✠\ e^6 - 8\,e^4 - 124\,e^2 - 64 = o.$$

Loco igitur illius æquationis oportet ſcribere ✠ e^6 — 8 e^4 — 124 e^2 — 64 = o

Dicebamus enim æquationem ſic ordinandam eſſe; vt ſit huiuſmodi.

$$✠\ e^6 - 2\ p\ e^4 \quad \begin{matrix} ✠\ p^2 \\ -\,4\,r \end{matrix} \quad e^2 - q^2 = o.$$

Cum prius eſſet † a^4 * — 4 a^2 — 8 a ✠ 35 = o, hoc eſt a^4 * — p a^2 — q a ✠ r = o.

Cum igitur quantitas ſuperius poſita p, ſit — 4; proinde erit — 8 e^4; ſiquidem hic eſt 2 p e^4; illa verò quæ ponebatur r, erit 35, quater ductus in e^2, cum prius eſſet 36; hic enim ponitur 4 r e^2; atque adeò $\pm^{r}_{4}$ e^2; erit ✠ 16 e^2 — 140 e^2, hoc eſt erit totum id, quod diximus — 124 e^2. Cum demum q, ſit 8, proinde erit — 64, loco ipſius q^2. Cæterum illius æquationis e^6 — 8 e^4 — 124 e^2 — 64 = o, hoc eſt e^3 — 8 e^2 — 124 e — 64 = o, radix eſt 16. *Explicatio ſupradictorum.*

Verum poſſumus in his perficiendis operationibus adhibere pro quantitatibus cognitis quaſcumque ſpecies, ſiuè elementa; qua propter ſi minus arridet, vti characteribus illis p, q, r, loco ipſorum ſubſtitui poſſunt, b, d, g, Vietæ familiares. *Obſeruanda quædam.*

Sit æquatio a^4 * — 25 a^2 — 60 a — 36 = o; cuius radix eſt 6; Iuxta prædicta Nos huiuſmodi æquationem ad hanc reuocabimus e^6 — 50 e^4 ✠ 769 e^2 — 3600 = o. Huius auteam æquationis radix eſt 16.

 Si

Sit æquatio $a^{4} * - 25 a^{2} - 60 a - 36 = 0$; cuius radix eſt 6; Iuxtà prædicta nos huiuſmodi æquationem ad hanc reuocabimus $c^{6} - 50 c^{4} + 769 c^{2} - 3600 = 0$. Huius autem æquationis radix eſt 16.

Proponitur alia æquatio.

Sit æquatio $+ a^{4} * - 17 a^{2} - 20 a - 6 = 0$. Reducetur ad hanc, nimirum $c^{6} - 34 c^{4} + 313 c^{2} - 400 = 0$. Huius autem æquationis radix eſt 16; illius vera radix erat ℞ 7 + 2, tres autem falſæ ℞ 7 − 2, 2 + ℞ 2, & 2 − ℞ 2. Innoteſcit autem huius æquationis radix 16, Arte iam ſuperiùs explicata; qua cognita prædicta æquatio in duas alias diuidetur, vt inferiùs dicam. Innoteſcit inquam radix 16, vt ſupra docuimus. Vt autem ſuperiori exemplo rem illuſtremus, præſtabit hanc operationem ſubijcere.

Exemplum diuiſionis. Hæc operatio facta eſt addendo.

Diuidatur $+ c^{6} - 50 c^{4} + 769 c^{2} - 3600 = 0$
per $c^{2} - 16) - c^{6} + 34 c^{4} - 225 c^{2} + 3600$

$$0 - 16 c^{4} + 544 c^{2} \quad 0$$
$$- 16 c^{4} + 544 c^{2}$$
$$0 \quad 0$$

$$\begin{array}{r|l} -3600 & +225 \\ -16 & \\ +544c^{2} & -34c^{2} \\ -16 & \\ -16c^{4} & +c^{4} \\ -16 & \end{array}$$

Patet igitur iſtius æquationis radicem eſſe 16.

Exemplum alterum. Hæc operatio facta eſt addendo.

Diuidatur $+ c^{6} - 8 c^{4} - 124 c^{2} - 64 = 0$
per $c^{2} - 16) - c^{6} - 8 c^{4} - 4 c^{2} + 64$

$$0 - 16 c^{4} - 128 c^{2} \quad 0$$
$$- 16 c^{4} - 128 c^{2}$$
$$0 \quad 0$$

$$\begin{array}{r|l} -64 & +4 \\ -16 & \\ -128c^{2} & +8c^{2} \\ -16 & \\ -16c^{4} & +c^{4} \\ -16 & \end{array}$$

Conſtat etiam huius æquationis radicem eſſe 16.

Proponitur æquatio.

Ita quoque ſi ſit æquatio huiuſmodi; nimirum.

$$+ u^{4} * \begin{array}{l} + \frac{1}{2} b^{2} \\ - c^{2} \end{array} u^{2} \begin{array}{l} - b^{3} \\ - b c^{2} \end{array} u \begin{array}{l} + \frac{1}{16} b^{4} \\ - \frac{1}{4} b^{2} c^{2} \end{array} = 0.$$

Scribatur hæc.

$$e^{6} \begin{array}{l} + b^{2} \\ - 2 c^{2} \end{array} e^{4} \begin{array}{l} - b^{4} \\ + c^{4} \end{array} e^{2} \begin{array}{l} - b^{6} \\ - 2 b^{4} c^{2} \\ - b^{2} c^{4} \end{array} = 0.$$

Eſt enim $\frac{1}{2} b^{2} - c^{2}$, idem quod p, & $\frac{1}{4} b^{4} - b^{2} c^{2} + c^{4}$, idem quod p^{2}, & prætereà $- \frac{1}{4} b^{4} + b^{2} c^{2}$, idem eſt quod 4 r, atque demum $- b^{6} - 2 b^{4} c^{2} - b^{2} c^{4}$, idem eſt quod $- q^{2}$.

Cognita æquationis radice, vt ſuprà dicebamus, diuidetur æquatio ope ipſius quidem radicis in duas, ex quibus prioris æquationis radices deducentur; exempligr.

Superio-

Superioris ęquationis † $e^6 - 50\, e^4 + 769\, e^2 - 3600 = 0$, ad quam altera illa $+\, a^4 * - 25\, a^2 - 60\, a - 36 = 0$, reducebatur; illius inquam æquationis per diuisionem radix innotuit 16, vt vidimus. Nunc ità procedendum, scilicet pro æquatione † a^4 *, $p\, a^2$, $q\, a$, $r = 0$. Oportet has duas æquationes scribere. *Explicatio supradictorum.*

$$+\, a^2 - e\, a + \frac{1}{2}\, e^2 \quad \frac{1}{2}\, p \quad \frac{q}{2e} = 0.$$
$$+\, a^2 + e\, a + \frac{1}{2}\, e^2 \quad \frac{1}{2}\, p \quad \frac{q}{2e} = 0.$$

Obseruandum est autem circa signa †, & —; hìc data opera prætermissa fuisse. Si enim in pręcedenti æquatione habeatur † p, in vtraque istarum duarum poni debet $+ \frac{1}{2}\, p$, & si in priori habebatur — p, hìc poni debet $- \frac{1}{2}\, p$. At verò ponendum est † $\frac{q}{2e}$, in vna ipsarum ęquationum, vbi habebatur — e a, & — $\frac{q}{2e}$, in altera, vbi habetur † e a, prout habetur † q, in prima, & contrario quidem modo; si ibi adsit — q, poni debet $- \frac{q}{2e}$ in illa, vbi nimirum est ea; & $\frac{q}{2e}$ in altera, vbi reperitur + e a; Sit exemplum superiùs positum † $a^4 * - 25\, a^2 - 60\, a - 36 = 0$; reuocatur ad hanc; puta † $e^6 - 50\, e^4 + 769\, e^2 - 3600 = 0$. Huius æquationis radix est 16, diuisionis præsidio comparata. Loco igitur illius æquationis beneficio radicis inuentæ, duæ sunt æquationes hunc in modum conscribendæ. *Obseruatio circa signa +, & —.*

$+\, a^2 - 4\, a - 12 = 0$ Vel $+\, a^2 - 4\, a = 12$.
$+\, a^2 + 4\, a + 3 = 0$

Iam igitur æquationes habemus non transcendentes gradum quadraticum. Esto igitur illa prior ad hanc formam per antithesin reuocata.

$a^2 - 4\, a =$	12
2	4
2	16
4	4
	2
	6

Dimidium numeri radicum est 2, cuius quadratum 4 additum 12 comparationis homogeneo facit 16, cuius latus quadratum est 4, cui addito 2, dimidio numeri radicum fit 6, radix illius ęquationis, nimirum $a^4 - 25\, a^2 - 60\, a - 36 = 0$. *Explicatio supradictorum.*

Cæterùm hæc æquatio diuisa fuit in illas duas methodo superiùs insinuata. Si enim e^2, est 16, vtique e, erit 4, quare $\frac{1}{2}\, e^2$, erit 8; at verò 25, idem erit quod p; insuper 60, idem quod q, quamobrem $\frac{1}{2}\, e^2 - \frac{1}{2}\, p - \frac{q}{2e}$, idem erit quod — 12; quapropter erit æquatio, vt supra $+\, a^2 - 4\, a - 12 = 0$.

$+\, 8$		$+ \frac{1}{2}\, e^2$
$-\, 12$	$\frac{1}{2}$	$- \frac{1}{2}\, p$
$-\, 7$	$\frac{1}{2}$	$- \frac{q}{2e}$
$-\, 20$		
$+\, 8$		
$-\, 12$		

Verùm enim verò æquatio illa $a^2 + 4\, a + 3 = 0$, impossibilis est, nullam habens radicem neque veram, neque falsam; proindè solùm habebit radices, quas dicunt imaginarias.

SCHOLION

SCHOLION.

Aduertenda quædam in gratiã supradictorum.

VT quæ ſuperiùs tradidimus meliùs intelligi poſſint, iuuabit hic aliqua adnotare.

Iam ſuperiùs ordinatum eſt; cùm de reductione æquationis quadrato quadraticæ, ad cubicam ageremus; ordinatum eſt inquam loco illius æquationis $\dagger\, a^4 * . p a^2 . q a . r . = 0$ ſcribendam eſſe $\dagger\, e^6 : 2 p e^4 \; {}^{p^2}_{-4r}\; e^2 - q^2 = 0$, & quantùm ad ſigna quidem abundantiæ, atque defectus iuxta methodum hanc Carteſianam hoc obſeruandum eſſe, vt ſi in præcedenti æquatione habeatur ✱ p; in poſteriori conſtitui debeat $\dagger\, 2 p$; quod ſi in illa habeatur $- p$; hic conſtitui debeat $- 2 p$; at verò contra; ſi ibi reperiatur $\dagger\, r$; hic poni debeat $- 4 r$, vel ſi ibi habeatur $- r$, hic ſcribi debeat $\dagger\, 4 r$, & ſiue in præcedenti æquatione ſit ✱ q, ſiue $- q$; ſemper in poſteriori ponendum eſſe $- q^2$, & $\dagger\, p^2$ ſaltem ſi a^4, & e^6 ſignis $\dagger$ afficiantur; contra verò ſi ſigno $-$ afficerentur. Sed hæc ſupra iam declarata ſunt. Si itaque fuerit æquatio.

$$u^4 * \begin{array}{c}\frac{1}{2} b^2 \\ -c^2\end{array} u^2 \begin{array}{c}- b^3 \\ - b c^2\end{array} u \begin{array}{c}✱\ \frac{1}{16} b^4 \\ - \frac{1}{4} b^2 c^2\end{array} = 0$$

Dictæ æquationis continuatio.

Propterea quod termino p reſpondet $\frac{1}{2} b^2 - c^2$; vtique $2 p$ erit ${}^{b^2}_{-2c^2}$.

Et quoniam termino q reſpondet $- b^3 - b c^2$, ſi loco ipſius q, reponi debet $p^2 \dagger 4 r$, vt Ars ipſa præcipit, atque ipſi p dicebamus reſpondere $\frac{1}{2} b^2 - c^2$; oportet proinde ducere quadratice ipſum

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2} b^2 - c^2 \\ \frac{1}{2} b^2 - c^2 \\ \hline - \frac{1}{2} b^2 c^2 \dagger c^4 \\ \frac{1}{4} b^4 - \frac{1}{2} b^2 c^2 \qquad \\ \hline \frac{1}{4} b^4 - b^2 c^2 ✣ c^4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} - \frac{20}{16} b^4 ✱ \frac{1}{4} b^2 c^2 \\ \frac{4}{16} b^4 - b^2 c^2 \dagger c^4 \\ \hline - b^4 ✱ c^4 \end{array}$$

& fiet $\frac{1}{4} b^4 - b^2 c^2 \dagger c^4$ reſpondens ipſi p^2. Quoniam verò debet eſſe $\dagger\, {}^{p^2}_{4r}$; & in æquatione ipſi r reſpondet $\frac{5}{16} b^4 \dagger \frac{1}{4} b^2 c^2$ oportet ob id ſumere quadruplum ipſius, nempe $\frac{20}{16} b^4 \dagger b^2 c^2$; & hoc addendum eſt ipſi $\frac{1}{4} b^4 - b^2 c^2 \dagger c^4$, quod p quadrato reſpondere dicebamus. Facta autem additione prouenit $- b^4$ ✱ c^4. Quoniam denique termino q, reſpondet $b^3 - b c^2$ proinde accipere oportet huius quadratum, nimirum $- b^6 - 2 b^4 c^2 - b^2 c^4$, & ita ſcribenda eſt æquatio.

$$e^6 \begin{array}{c}\dagger\, b^2 \\ - 2 c^2\end{array} e^4 \begin{array}{c}- b^4 \\ ✣\, c^4\end{array} e^2 \begin{array}{c}- b^6 \\ - 2 b^4 c^2 \\ - b^2 c^4 -\end{array} = 0$$

Huius æquationis inſtituitur diuiſio modo ſupra explicato.

Nec

Æquationum limites.

Nec prętermittam, haud mediocriter conferre ad ęquationes explicandas, earumque latera exhibenda, cùm numeris pręsertim tractantur, limites præfinire, inter quos ipsarum æquationum radices coercentur. Hac enim Arte cognoscimus saltem radicem minorem esse aliquo numero, altero autem maiorem. Itaque

Quando fuerint æquationes quadraticæ. Prima huius ordinis æquatio, cuius limites inquiruntur.

Si proponatur $a^2 - ba + z^2$ æquari o, per metathesin z^2 æquabitur $ba - a^2$. Prima autem parte existente reali, alteram quoque realem esse oportet. Vnde necesse est ba, maius esse, quàm a^2; & vtroque termino per a diuiso; erit b maior, quàm a, & per antithesin a^2 æquabitur $ba - z^2$, quare pars altera realis erit, & ba maius erit, quàm z^2. Diuiso vtroq; termino per b; erit a maior, quàm $\frac{zz}{b}$, quamobrem vtraq; radix æquationis propositæ maior est, quàm $\frac{zz}{b}$, minor tamen, quàm b.

Adnotanda quædam.

Hìc autem perpende, nimirum in huiusmodi æquatione, si homogeneum datæ mensuræ applicetur ad coefficientem longitudinem sublateralem, magnitudinem ortiuam esse minorem vtraque æquationis radice; ipsamque coefficientem longitudinem iam dictam maiorem esse vtraque æquationis radice.

Secunda æquatio, cuius limites inquiruntur.

Proponatur $a^2 - ba - z^2$ æquari o, & per antithesin a^2 æquabitur $ba + z^2$; quare a^2 maius erit, quàm z^2, & a maior erit, quàm z, propterea za maius erit, quàm z^2. Vnde a^2 minus erit, quàm $ba + za$; ac ob id si vtraque pars diuidatur per a; erit quidem a minor, quàm $b + z$. Deinde quoniam a^2 æquatur $ba + z^2$, erit a^2 maius, quàm ba; propterea vterque terminus si diuidatur per a; erit a maior, quàm b; & ba maius, quàm b^2; cùmq; a^2 æquetur $ba + z^2$, erit a^2 maius, quàm $b^2 + z^2$; nempe a, maior erit, quàm $\sqrt{b^2 + z^2}$, & quia deinde a maior est, quàm z, erit ba maius, quàm bz; & a^2 maius, quàm $+ z^2 bz$, nimirum a maior erit, quàm $\sqrt{bz + z^2}$; ob id radix propositæ æquationis maior erit, quàm maxima harum duarum $\sqrt{b^2 + z^2}$, & $\sqrt{bz + z^2}$, minor tamen, quàm $b + z$.

Adnotanda quædam.

Nota radicē esse maiorem maxima duarum quarum vna potest aggregatū planorum, quorum vnum est quadratum coefficientis longitudinis sublateralis, aliud est homogeneum datæ mensuræ, altera potest aggregatum planorum, quorum vnum fit ex abs coefficiente, in rectam quæ potest homogeneum datæ mensuræ; alterum est ipsum homogeneum; est tamen minor aggregato ex coefficiente, & rececta, quæ potest isum homogeneum datæ mensuræ.

Tertia æquatio, cuius limites indagantur.

Proponatur $a^2 + ba - z^2$ æquari o. Per antithesin $a^2 + ba$ æquabitur z^2; quapropter $\frac{zz}{b}$ maius erit, quàm a. Deinde eadem existente æquatione, z^2 erit maius, quàm a^2, ac ob id z maior erit, quàm a; propterea za maius erit, quàm a^2, sed $a^2 + ba$ æquabatur z^2; ergo $za + ba$ maius erit, quàm z^2, diuisa proinde vtraque æquationis parte per $b + z$, fiet a maior, quàm $\frac{zz}{b+z}$. Itaque radix a, maior erit, quàm $\frac{zz}{b+z}$; minor tamen, quàm $\frac{zz}{b}$.

Adnotanda quædam.

Nota in hac ęquatione radicem esse maiorem, quàm ortiua magnitudo, proueniēs ex applicatione homogenei datę mēs. ad coefficiētē lōgit. plus ea, quę potest ipsū homogeneū; sed minorē, quā ortiua magnitudo ex applicatione homogenei ad coefficiētē lōgitudinē.

Quando fuerint æquationes cubicæ.

Quod si fuerint æquationes cubicæ, in quibus secundus terminus desit: hac Arte eadem inquiruntur.

Prima huius ordinis æquatio, cuius limites inquiruntur.

Proponatur $a^3 * - b^2 a + z^3 = o$. Per metathesin quidem a^3 æquabitur $+ b^2 a - z^3$, atque adeo $b^2 a$ maius erit, quàm z^3, quamobrem vtroque termino diuiso per b^2, & a maior erit, quàm $\frac{z^3}{b^2}$; deinde per metathesin $b^2 a - a^3$ æquabitur z^3; ac ob id b^2 maius erit, quam a^2, & b maior, quàm a. Itaque vtraque radix a propositæ æquationis maior erit, quàm $\frac{z^3}{b^2}$, & minor, quàm b.

Adnotanda quædam.

Hìc obserua, radicem vtramque maiorem esse ortiua magnitudine ex applicatione homogenei datæ mensurę ad coefficiens planum sublaterale, at verò minorem esse magnitudine, cuius quadratum est coefficiens planum prædictum.

Secunda æquatio, cuius limites indagantur.

Proponatur $a^3 * - b^2 a - z^3$ æquari o. Per antithesin quidem $a^3 - b^2 a$ æquabitur z^3, & a^2 maius erit, quàm b^2, & a maior erit, quàm b, & $a^3 - z^3$ ęquabitur $b^2 a$, atque adeo a^3 maior erit, quàm z^3, & a maior, quàm z, vnde $z^2 a$ maius, quàm z^3. At verò per metathesin fit $b^2 a + z^3$ ęquale a^3; quare $b^2 a + z^2 a$ maius erit, quàm a^3, & vtraque parte applicata ad a, & $b^2 + z^2$ erit maius, quàm a^2, ob id a minor erit, quàm $\sqrt{b^2 + z^2}$. Reperta igitur est a radix æquationis propositæ maior, quàm b, & z; at verò minor, quàm $\sqrt{b^2 + z^2}$.

Quod

Aduertenda quadam.

Quod si non placet adhibere latus cubicum ipsius z^3 loco z^3; in vinculo assumi posset quantitas aliqua, quæ minor non sit; quod assequemur citra laborem cognitis tribus dimensionibus ipsius z^3, sumendo loco ipsius z^3, rectangulum sub duabus quantitatibus, quarum alterutra minor non sit ipsa z.

Obseruanda quadam.

Hic autem obserua huius æquationis radicem maiorem esse, quàm illa, cuius cubus est ho nogeneum datæ mensuræ; & eandem radicem minorem esse ea magnitudine, quæ potest aggregatum ex plano coefficiente sublaterali, & quadrato, cuius, cubus est homogeneum datæ mensuræ.

Proponitur eiusdē ordinis æquatio cubica, cuius limites inquiruntur.

Proponatur a^3 * † b^2 a — z^3 æquari o. Per metathesin a^3 æquabitur z^3 — b^2 a, quare $\frac{z^3}{b^2}$ erit maior, quàm a. Deinde erit quoque b^2 a ⥱ z^3 — a^3, atque adeo z^3 maior erit, quàm a^3, & ob id z maior, quàm a, ac propterea z^2 a maius erit, quàm a^3. Sed per antithesin propositæ æquationis est quoque a^3 ✠ b^2 a ⥱ z^3, quare b^2 a † z^2 a maius erit quàm z^3; Vtraque autem æquationis parte applicata ad z^2 † b^2 & a maior erit quàm $\frac{z^3}{z^2+b^2}$; quare adinuenta fuit radix æquationis propositæ; puta a; maior, quàm $\frac{z^3}{b^2+z^2}$ sed minor quàm $\frac{z^3}{b^2}$, & z.

Hoc loco illud aduerte, nihil prohibere, quo minus loco z^2, accipiatur rectangulum duarum maximarum dimensionū z^3, ad euitandā cubicæ radicis extractionē ex z^3.

Obseruanda quadam.

Hic autem obserua, magnitudinem ortiuam ex applicatione homogenei datæ mensuræ ad planum coefficiens sublaterale, maiorem esse, quàm radix æquationis propositæ, & insuper magnitudinem, cuius cubus est homogeneum datæ mensuræ maiorem esse, quàm eadem radix, & hanc ipsam radicem maiorem esse magnitudine ortiua ex applicatione homogenei datæ mensuræ ad aggregatum ex plano coefficiente sublaterali, & quadrato eius, cuius cubus est homogeneum datæ mensuræ.

Quando sunt æquationes cubicæ in quibus penultimus terminus deest.

Quòd si fuerīt æquationes cubicæ, in quibus penultimus terminus desit, ita ratiocinādū.

Proponatur a^3 — b a^2 * † z^3 æquari o. Per metathesin a^3 † z^3 æquabitur b a^2 quamobrē a^2 maius erit, quàm $\frac{z^3}{b}$. Rursus z^3 æquabitur b a^2 — a^3, ac ob id b, maior erit, quàm a. Quælibet igitur radicum a, propositæ æquationis maior erit, quàm ℞ $\frac{z^3}{b}$, & minor, quàm b.

Proponitur huius ordinis æquatio cubica.

Proponatur a^3 — b a^2 * — z^3 æquari o. Per metathesin a^3 — b a^2 æquabitur z^3 quare a, maior erit, quàm b; Rursus a^3 — z^3 æquabitur b a^2, ac proinde a maior erit, quàm z & a^2 maius, quàm z^2, & insuper z a^2 maius, quàm z^3.

Sed per transpositionem b a^2 † z^3 æquatur a^3. Propterea b a^2 † z a^2 maius erit, quàm a^3. Diuidatur vtraque pars per a^2, & erit b † z maior, quàm a. Inuenta igitur est radix a, æquationis propositæ, maior, quàm b, & z. Sed minor, quàm b † z. Hinc verò perspicuè colligitur ad euitandam radicis cubicæ extractionem ex z^3, quod loco z, sumi possit minor trium dimensionum ipsius z^3, quando a, maior est, & quando minor perhibietur, quàm b † z, cùm tunc loco z maxima trium dimensionum ipsius z^3, accipi possit.

Proponitur æquatio cubica eiusdem ordinis.

Proponatur a^3 † b a^2 * — z^3 æquari o. Per metathesin fiet a^3 ⥱ z^3 — b a^2 atqueadeo $\frac{z^3}{b}$ maius erit, quàm a^2, est siquidem b a^2 ⥱ z^3 — a^3 ac ob id z maior, quàm a, & z a^2 maius, quàm a^3. Sed a^3 † b a^2 æquatur z^3. Proinde z a^2 † b a^2 maius erit, quàm z^3, nimirum vtraque æquationis parte diuisa per z † b erit a^2 maius, quàm $\frac{z^3}{z+b}$ quare a radix æquationis propositæ maior est, quàm ℞ $\frac{z^3}{b+z}$ at verò minor quàm ℞ $\frac{z^3}{b}$, & z. Constat præterea z^2 a † b z a maius esse, quàm z^3, & z a ✠ b a, maius, quàm z^2, ac proinde a maior; quàm $\frac{z^2}{b+z}$ cùm z maior sit quàm a.

Si verò in æquationibus cubicis omnes termini extent, ita ratiocinandum.

Quando in æquationibus cubicis omnes termini extant.

Proponatur a^3 — b a^2 † d^2 a — z^3 æquari o. Per metathesin a^3 — b a^2 æquabitur z^3 — d^2 a. Propterea si a, æquetur ipsi b, etiam a ipsi $\frac{z^3}{d^2}$ æquabitur. Quamobrem si contra b, æquetur $\frac{z^3}{d^2}$ hoc est b d^2 æquetur z^3 erit similiter a propositę ęquationis radix, æqualis b, & $\frac{z^3}{d^2}$. Insuper si a^3 — b a^2 est realis scilicet a, maior sit, quàm b, etiam z^3 — d^2 a, realis erit, & ob id $\frac{z^3}{d^2}$ maior quàm a. Quod si eadem quantitas a^3 — b a^2 sit minor nihilo, fiat metathesis hanc in modum b a^2 — a^3 ⥱ d^2 a — z^3. Quoniam verò supponitur b a^2 — a^3 realis esse; nempe b maior, quàm a; propterea d^2 a — z^3 etiam realis erit, atqueadeo. a, erit maior, quàm $\frac{z^3}{d^2}$.

Itaq; reperta est ęquationis radix ęqualis b, & ipsi $\frac{z^3}{d^2}$ cum hi termini sint inter se ęquales

Simili modo ratiocinandum, tàm in æquationibus huius, quàm alterius cuiuscunque ordinis, &c. de quibus, adeundus est Florimondus de Beaune, à Bartolino impressus.

INDEX CAPITVM RERVMQVE MEMORABILIVM,

QVÆ IN HOC PRIMO HVIVS SECVNDÆ PARTIS TRACTATV CONTINETVR.

IN SECVNDAM OPERIS PARTEM PRÆFATIO. pag. 5.

In quibus hęc Ars cōsistat,& de ijs,quę sūt ad ipsam præmittēda. Caput. I. pag. 9.

Cùm

INDEX

De Poteſtatum Geneſi. Cap. VI. pag. 65.

Prose-

INDEX

De Æquatione Algebrica. Cap. IX. pag. 113

De Æquationis Inuentione. Cap. X. pag. 115.

Nume-

Alia traduntur, vnde licet Artifici, æquationum constitutionem, atque naturam indagare. Cap. XVIII. pag. 151.

De æquationibus deducendis.
Cap. XIX. pag. 156.

In

Hoc

INDEX

LAVS DEO.